

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΙΣΧΥΟΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Μάθημα 3^ο – Ανάλυση Fourier και Αρμονικές

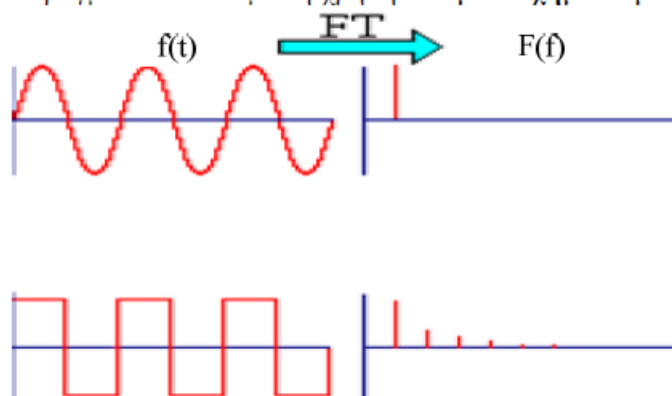
(Με επιλογές θεωρίας από τις «Σημειώσεις Εργαστηρίου Ηλεκτρονικών Ισχύος» του Δρ.-Μηχ. Νικολάου Π. Πολύζου, Επίκουρου Καθηγητή, έτος 2008)

1.10 ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Τα μη-ημιτονοειδή περιοδικά σήματα αποτελούνται από πολλά διακριτά ημιτονοειδή σήματα ή ημιτονοειδής συνιστώσες. Η διαδικασία λήψης του φάσματος συχνοτήτων $F(f)$ που απαρτίζουν κάθε χρονικά μεταβαλλόμενο περιοδικό σήμα $f(t)$ ονομάζεται **ανάλυση Fourier** και πραγματοποιείται με τη χρήση του **μετασχηματισμού**

Fourier (Fourier Transform, FT). Τυπικά παραδείγματα του φάσματος των συχνοτήτων κάποιων απλών περιοδικών σημάτων, τα οποία αποτελούνται από ορισμένο ή άπειρο αριθμό ημιτονοειδών συνιστωσών, παρουσιάζονται στο σχήμα 1.13.

Γενικά κάθε συνεχής μη ημιτονοειδής κυματομορφή $f(t)$ που επαναλαμβάνεται με γωνιακή συχνότητα ω μπορεί να εκφραστεί ως :



Σχήμα 1.13: Τυπικές κυματομορφές και το φάσμα των συχνοτήτων τους.

$$f(t) = F_0 + \sum_{h=1}^{\infty} f_h(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} \{a_h \cdot \cos(h \cdot \omega \cdot t) + b_h \cdot \sin(h \cdot \omega \cdot t)\} \quad (1.30)$$

όπου $F_0 = a_0/2$ είναι η μέση τιμή της συνάρτησης, ενώ :

$$\begin{aligned} a_h &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(h \cdot \omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t), & h &= 0, 1, \dots, \infty \\ b_h &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(h \cdot \omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t), & h &= 1, 2, \dots, \infty \\ F_0 &= \frac{1}{2} \cdot a_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \cdot d(\omega \cdot t) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot dt \end{aligned} \quad (1.31)$$

Στην εξίσωση (1.30), κάθε συνιστώσα

$$f_h(t) = a_h \cdot \cos(h \cdot \omega \cdot t) + b_h \cdot \sin(h \cdot \omega \cdot t)$$

μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως

$$f_h(t) = F_h \cdot \cos(h \cdot \omega \cdot t + \varphi_h)$$

όπου

$$F_h = \sqrt{a_h^2 + b_h^2} \text{ το πλάτος της συνιστώσας } h, \text{ και}$$

$$\varphi_h = \arctan\left(-\frac{b_h}{a_h}\right) \text{ η φάση αυτής *}.$$

Ενεργές (rms) τιμές

Επειδή κάθε συνιστώσα $f_h(t)$ είναι ημιτονοειδής, η ενεργός τιμή της ισούται με

$$F_{h,rms} = \frac{F_h}{\sqrt{2}}$$

Η ενεργός τιμή, F_{rms} , της συνάρτησης $f(t)$, μπορεί να εκφραστεί με βάση τις ενεργές τιμές των συνιστωσών της, ως

$$F_{rms} = \sqrt{F_0^2 + \sum_{h=1}^{\infty} F_{h,rms}^2}$$

* Σημείωση

Η $f_h(t)$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα και με μορφή ημιτόνου αντί συνημιτόνου ως

$$f_h(t) = F_h \cdot \sin(h \cdot \omega \cdot t + \varphi'_h)$$

με πλάτος πάλι F_h και φάση $\varphi'_h = \arctan\left(\frac{a_h}{b_h}\right)$

1.11 ΜΗ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΙΣ ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΕΣ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Στα ηλεκτρονικά κυκλώματα ισχύος οι κυματομορφές εξόδου συνήθως αποτελούνται από τμήματα της κυματομορφής εισόδου οι οποίες επαναλαμβάνονται με περίοδο T και συχνότητα $f=\omega/2\pi=1/T$. Αυτή η συχνότητα επανάληψης ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα** και συμβολίζεται συνήθως με το δείκτη 1. Εκτός από τον κύριο όρο στη θεμελιώδη συχνότητα, οι κυματομορφές εξόδου περιέχουν και όρους σε ανεπιθύμητες συχνότητες που είναι αρμονικές (πολλαπλάσιες) της θεμελιώδους συχνότητας. Οι όροι αυτοί υπολογίζονται συνήθως με την ανάλυση Fourier.

Επίσης, η διακοπτική λειτουργία των ηλεκτρονικών μετατροπέων ισχύος έχει ως αποτέλεσμα το ρεύμα γραμμής που απορροφάει ο μετατροπέας από το δίκτυο να αποκλίνει σημαντικά από την ημιτονοειδή κυματομορφή. Λόγω του ισχυρού δικτύου η παραμόρφωση της τάσης θεωρείται συνήθως αμελητέα, άρα η τάση του δικτύου παραμένει καθαρά ημιτονοειδής στη θεμελιώδη συχνότητα (ω_1), ενώ το ρεύμα εισόδου σε κατάσταση ισορροπίας αποτελείται από το άθροισμα των αρμονικών όρων που προκύπτουν από την ανάλυση Fourier. Επομένως, ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} v_s(t) &= \sqrt{2} \cdot V_s \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \\ i_s(t) &= i_{s1}(t) + \sum_{h \neq 1} i_{sh}(t) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Όπου i_{s1} ο θεμελιώδης όρος στη συχνότητα του δικτύου ($f1$) και i_{sh} είναι ο όρος στην h αρμονική συχνότητα του δικτύου ($h \cdot f1$). Αυτοί οι όροι του ρεύματος μπορούν να εκφραστούν ως εξής :

$$i_s(t) = \sqrt{2} \cdot I_{s1,rms} \cdot \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + \sum_{h \neq 1} \sqrt{2} \cdot I_{sh,rms} \cdot \sin(\omega_h t - \varphi_h) \quad (1.35)$$

Και φ_1 η διαφορά φάσης μεταξύ I_{s1} και της τάσης εισόδου. Η ενεργός τιμή του ρεύματος δικτύου δίνεται από την εξίσωση :

$$I_s = \sqrt{\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} i_s^2(t) \cdot dt} = \sqrt{I_{s1,rms}^2 + \sum_{h \neq 1} I_{sh,rms}^2} \quad (1.36)$$

Η παραμόρφωση στην κυματομορφή του ρεύματος (αλλά και της τάσης) μετράται ποσοτικά από την **ολική αρμονική παραμόρφωση** (*total harmonic distortion, THD*). Η παραμόρφωση του ρεύματος (i_{dis}) και η ενεργός τιμή της δίνονται από :

$$\begin{aligned} i_{dis}(t) &= i_s(t) - i_{s1}(t) = \sum_{h \neq 1} i_{sh}(t) \\ I_{dis} &= \sqrt{(I_{s,rms}^2 - I_{s1,rms}^2)} = \sqrt{\sum_{h \neq 1} I_{sh,rms}^2} \\ \%THD &= 100 \cdot \frac{I_{dis}}{I_{s1,rms}} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ενεργού ισχύος (*εξίσωση 1.3*) και γνωρίζοντας ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα όρων με διαφορετική συχνότητα είναι πάντα ίσα με μηδέν, προκύπτει πως ενεργό ισχύ σε ένα κύκλωμα προσφέρει μόνο η βασική αρμονική του ρεύματος, ενώ όλες οι ανώτερες αρμονικές αυξάνουν την άεργο ισχύ του κυκλώματος. Αν υπήρχε ένα κύκλωμα, που παραμορφωνόταν και η τάση εισόδου, ενεργό ισχύ θα μετέφεραν όλα τα γινόμενα των αρμονικών της τάσης και του ρεύματος της ίδιας συχνότητας, ενώ τα γινόμενα των διαφορετικών συχνοτήτων θα ήταν άεργος ισχύς. Οπότε, για την **φαινόμενη** και την **πραγματική ισχύ** θα ισχύει:

$$\begin{aligned} S &= V_{s,rms} \cdot I_{s,rms} \\ P &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \sqrt{2} \cdot V_{s,rms} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \cdot \sqrt{2} \cdot I_{s1,rms} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t - \varphi_1) \cdot dt = V_{s,rms} \cdot I_{s1,rms} \cdot \cos(\varphi_1) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, ο **συντελεστής ισχύος** θα είναι :

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{V_{S,rms} \cdot I_{S1,rms} \cdot \cos \phi_1}{V_{S,rms} \cdot I_{S,rms}} = \frac{I_{S1,rms}}{I_{S,rms}} \cos(\phi_1) \quad (1.39)$$

Ο **συντελεστής μετατόπισης** (*displacement power factor, DPF*) που είναι ο ίδιος με το συντελεστή ισχύος σε γραμμικά κυκλώματα με ημιτονοειδείς τάσεις και ρεύματα, ορίζεται ως το ημίτονο της γωνίας ϕ_1 :

$$DPF = \cos(\phi_1) \quad (1.40)$$

Επομένως ο συντελεστής ισχύος σε ένα μη ημιτονοειδές ρεύμα αν λάβουμε υπόψη μας τις εξισώσεις 1.36 και 1.37 γίνεται :

$$PF = \frac{I_{S1,rms}}{I_{S,rms}} DPF \quad (1.41)$$

Αρα συμπεραίνουμε ότι μια μεγάλη παραμόρφωση στην κυματομορφή του ρεύματος θα οδηγήσει σε μια μικρή τιμή του I_{S1}/I_S και κατά συνέπεια σ' ένα χαμηλό συντελεστή ισχύος.

Φάσμα πλάτους ημιτονοειδούς κυματομορφής με DC συνιστώσα και αρμονικές – Παράδειγμα

Θεμελιώδης συχνότητα $f_1 = 1$ Hz

Θεμελιώδης κυματομορφή $x(t)$, με πλάτος 1 (και συχνότητα f_1) (**κόκκινη**): $x(t) = \cos(2\pi t)$

DC συνιστώσα $x_0(t)$ με πλάτος 1 (**μαύρη**): $x_0(t) = 1$

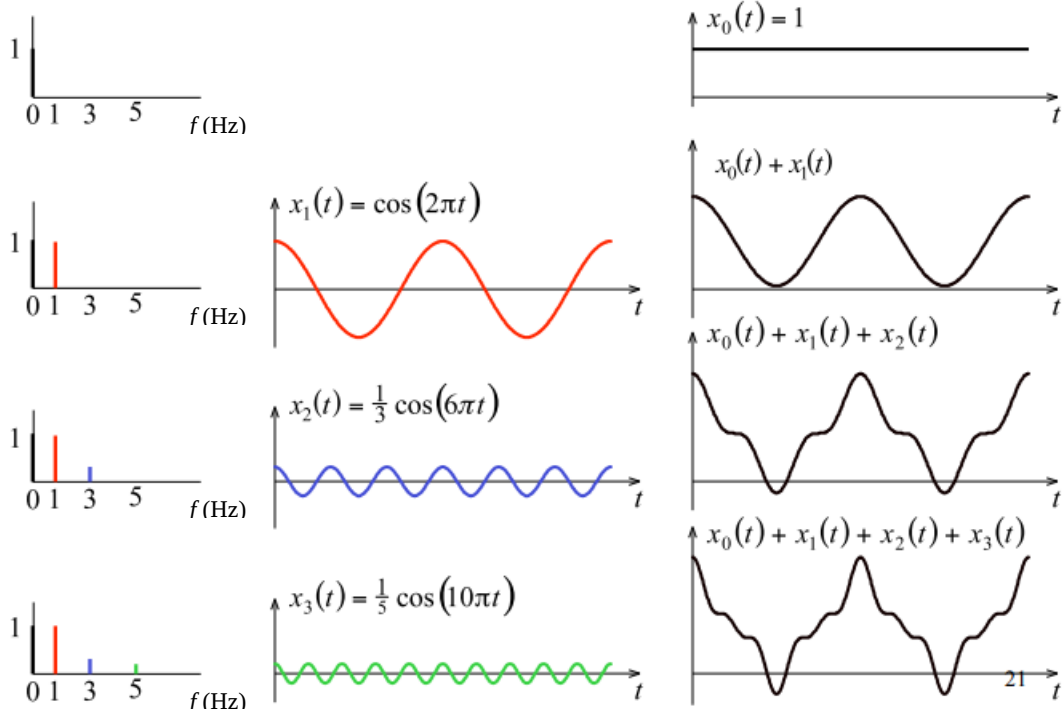
Αρμονική $x_2(t)$ με πλάτος 1/3 και συχνότητα 3 Hz (**μπλε**): $x_2(t) = 1/3 \cos(6\pi t)$

Αρμονική $x_3(t)$ με πλάτος 1/5 και συχνότητα 5 Hz (**πράσινη**): $x_3(t) = 1/5 \cos(10\pi t)$

Πεδίο συχνότητας (φάσμα)

Πεδίο χρόνου

Πεδίο χρόνου – Άθροισμα



Άσκηση

Να υπολογιστεί η μέση και η ενεργός τιμή των ακόλουθων μαθηματικών συναρτήσεων :

α) $x(t)=10 + 10 \cdot \sin(314 \cdot t) + 10 \cdot \sin(628 \cdot t)$

β) $x(t)=10 + 10 \cdot \sin(314 \cdot t) + \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \sin(314 \cdot t)$

γ) $x(t)=\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \sin(314 \cdot t) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(628 \cdot t)$

δ) $x(t)=10 + 10 \cdot \cos(314 \cdot t)$

ε) $x(t)=10 + 10 \cdot \sin(314 \cdot t + \pi/3) + 10 \cdot \cos(628 \cdot t)$

και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους της καθεμιάς.

Ενδεικτική απάντηση για το α)

Αναλύουμε την $x(t)$ σε συνιστώσες. Κάθε συνιστώσα πρέπει να έχει διαφορετική συχνότητα:

$x_0(t) = 10$ (DC συνιστώσα)

$x_1(t) = 10 \sin(314t)$. Πλάτος 10, συχνότητα (θεμελιώδης) $f_1 = 314/(2\pi) \approx 50$ Hz

$x_2(t) = 10 \sin(628t)$. Πλάτος 10, συχνότητα $f_2 = 2f_1 = 628/(2\pi) \approx 100$ Hz

Η μέση τιμή της $x(t)$ ισούται με την DC συνιστώσα της, δηλαδή με 10.

Η rms τιμή της $x(t)$ ισούται με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων της DC συνιστώσας και των rms τιμών των επιμέρους ημιτονοειδών συνιστωσών,

$$X_{rms} = \sqrt{X_0^2 + \sum_{h=1}^2 X_{h,rms}^2}$$

Οι rms τιμές των (δύο) ημιτονοειδών συνιστωσών είναι

$$X_{1,rms} = 10/\sqrt{2}$$

$$X_{2,rms} = 10/\sqrt{2}$$

Άρα:

$$X_{rms} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{100 + 50 + 50} = 10\sqrt{2}$$

Το φάσμα πλάτους της $x(t)$ φαίνεται παρακάτω.

