



Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ. & Μηχ. Η/Υ

Ηλεκτρονικά Ισχύος

Μάθημα 3^ο

Ανάλυση Fourier, Αρμονικές, Παραμόρφωση

Γιώργος Ορφανουδάκης

Περιεχόμενα

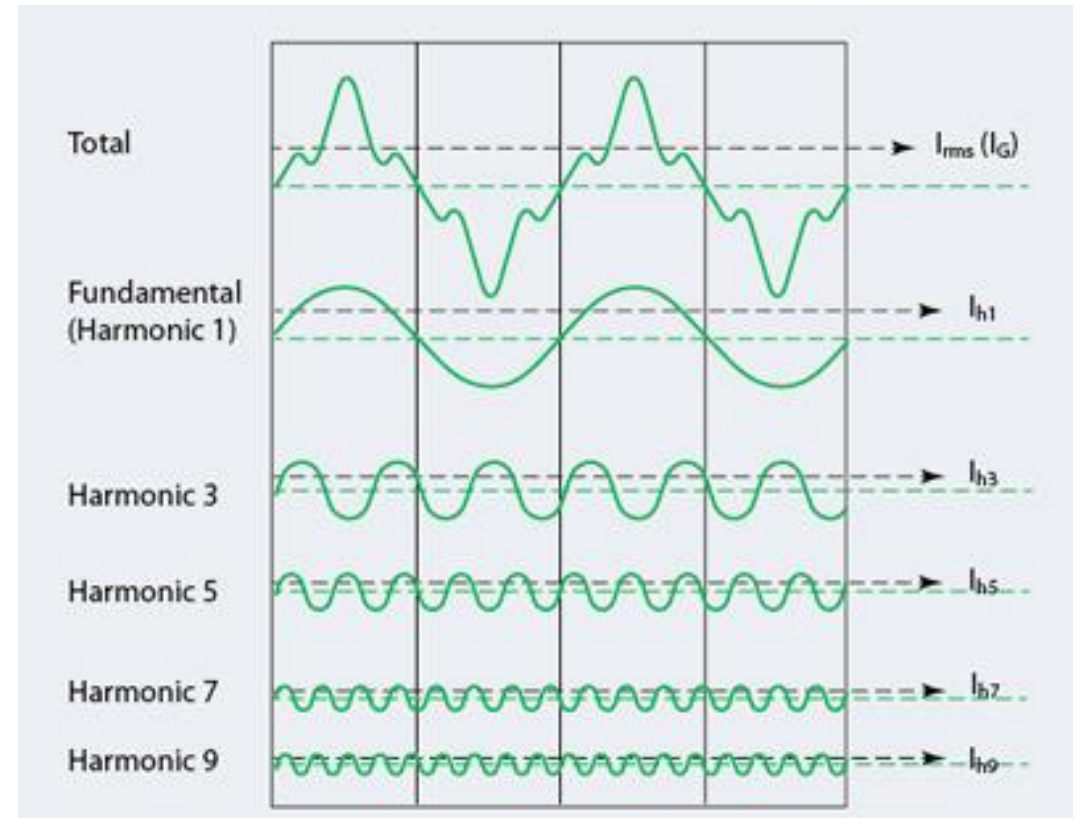
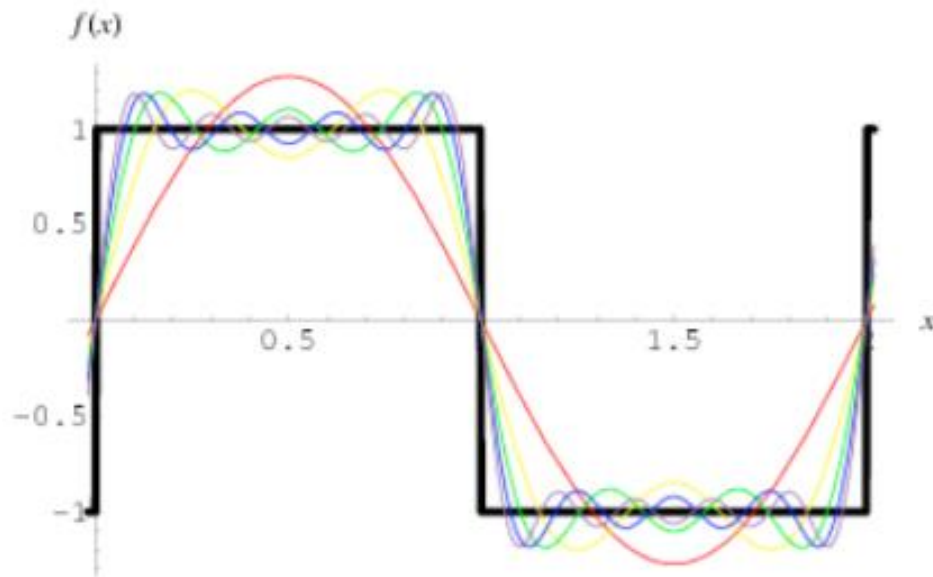
1. Ανάλυση Fourier
2. Αρμονικές
3. Φάσμα
4. Παραμόρφωση
5. Γραμμικά / μη γραμμικά φορτία

Ανάλυση Fourier – Αρμονικές

- Ο J. Fourier (1768 – 1830) ήταν Γάλλος φυσικός και μαθηματικός
- Έδειξε ότι μία περιοδική συνάρτηση (που πληροί ορισμένους μαθηματικούς περιορισμούς) μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα μίας σταθεράς και ημιτόνων και/ή συνημιτόνων
- Οι όροι του αθροίσματος (ημίτονα/συνημίτονα) μπορεί να είναι πεπερασμένοι σε πλήθος ή άπειροι (σειρά Fourier)
- Αν η συχνότητα της περιοδικής συνάρτησης είναι f , τότε τα ημίτονα/συνημίτονα έχουν συχνότητες ίσες με ακέραια πολλαπλάσια της f , δηλ. $f_h = h \times f$, όπου $h = 1, 2, 3, \dots$
- Κάθε διαφορετική συχνότητα $f_h = h \times f$ αντιστοιχεί σε μία «αρμονική συνιστώσα», ή απλά «αρμονική» (harmonic) της f
- Ο συντελεστής h λέγεται «τάξη» (order) της αρμονικής
- Η αρμονική με τάξη $h = 1$ λέγεται «θεμελιώδης» (fundamental)

Ανάλυση Fourier – Αρμονικές

- Δηλαδή μία τυχαία περιοδική κυματομορφή ή μία γνωστή όπως π.χ. παλμική/τριγωνική/πριονωτή κυματομορφή μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ημιτόνων/συνημιτόνων;
- **ΝΑΙ!** Βλ. παραδείγματα στις εικόνες



Μετάβαση στο πεδίο του χρόνου

- Εάν δοθεί μία σταθερά και μία σειρά ημιτόνων/συνημιτόνων, είναι εύκολο να υπολογιστεί το άθροισμά τους και να σχεδιαστεί η κυματομορφή που προκύπτει
 - Είναι όλα συναρτήσεις του χρόνου
 - Προστίθενται οι τιμές όλων των ημιτόνων/συνημιτόνων που αντιστοιχούν στην ίδια χρονική στιγμή
 - Η διαδικασία αυτή λέγεται «μετάβαση στο πεδίο του χρόνου»
- Παράδειγμα:
 - Βλ. αρχείο Excel: «Μετάβαση στο πεδίο του χρόνου»
- Πώς επιτυγχάνεται όμως το αντίστροφο;
 - Δηλαδή, εάν δοθεί μία τυχαία περιοδική κυματομορφή, πώς μπορούν να βρεθούν η σταθερά και τα ημίτονα/συνημίτονα, τα οποία εάν αθροισθούν θα προκύψει η δεδομένη κυματομορφή;

Συντελεστές σειράς Fourier

- Μετασχηματισμός Fourier / Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform – FFT)
- Υλοποιημένος αλγόριθμος FFT σε λογισμικά (π.χ. MATLAB-Simulink) και συσκευές (π.χ. παλμογράφους, αναλυτές ισχύος)
- Βρίσκει τις αρμονικές από τις οποίες αποτελείται η δεδομένη κυματομορφή, δηλ. τη σταθερά και τα πλάτη-συχνότητες-φάσεις των ημιτόνων/συνημιτόνων
- Εάν είναι γνωστές οι πιθανές συχνότητες των αρμονικών, τα πλάτη και οι φάσεις τους μπορούν να βρεθούν με τα παρακάτω ολοκληρώματα

Συντελεστές σειράς Fourier (2)

- Συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου:

$$x(t) = X_0 + \sum_{h=1}^k X_h(t)$$

με

- $X_0 = \bar{X} = X_{DC}$ Μέση τιμή ή DC συνιστώσα
- $X_h(t) = a_h \cos(h\omega t) + b_h \sin(h\omega t)$

όπου

- $a_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(h\omega t) d(\omega t)$
- $b_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(h\omega t) d(\omega t)$

Ισοδύναμα

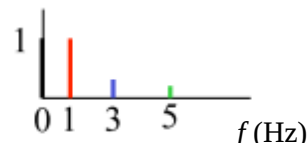
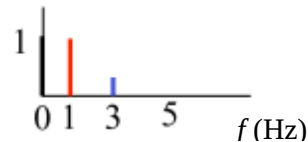
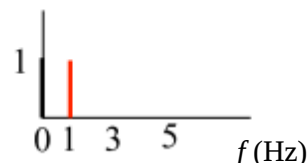
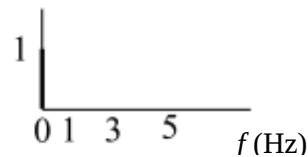
$$X_h(t) = \widehat{X}_h \cos(h\omega t + \varphi_h)$$

- $\widehat{X}_h = \sqrt{a_h^2 + b_h^2}$ Πλάτος αρμ. h
- $\varphi_h = \arctan\left(-\frac{b_h}{a_h}\right)$ Φάση αρμ. h

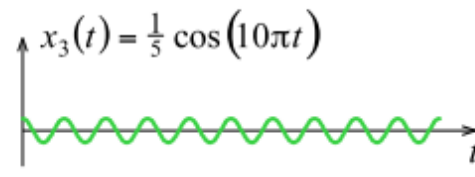
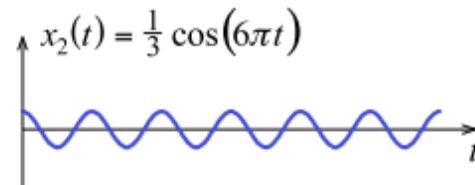
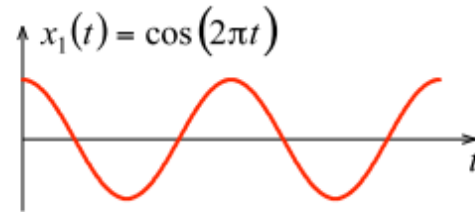
Φάσμα – Παράδειγμα

- Φάσμα (πλάτους):
 - Η γραφική αναπαράσταση του πλάτους των αρμονικών συνιστωσών
 - Αναπαράσταση της συνάρτησης στο «πεδίο της συχνότητας»
- Άξονες
 - Χ: Συχνότητα (f – Hz) / Γωνιακή συχνότητα (ω – rad/s) / Τάξη αρμονικής (h – 1, 2, 3 ...)
 - Υ: Πλάτος ή RMS τιμή αρμονικής

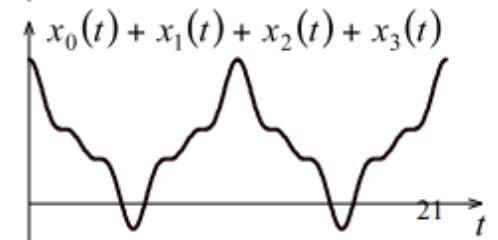
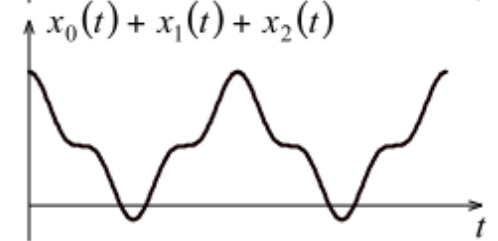
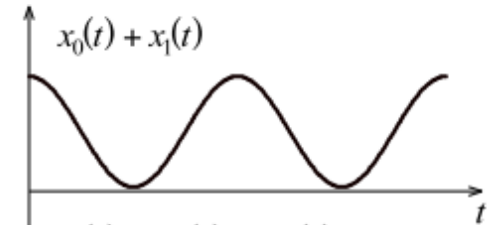
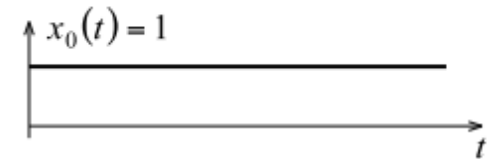
Πεδίο συχνότητας (φάσμα)



Πεδίο χρόνου



Πεδίο χρόνου – Άθροισμα



Κατηγοριοποίηση αρμονικών

Οι αρμονικές συνιστώσες διακρίνονται σε:

- Περιττές αρμονικές (odd harmonics): $5^{\text{η}}$, $7^{\text{η}}$, $11^{\text{η}}$...
- Άρτιες αρμονικές (even harmonics): $2^{\text{η}}$, $4^{\text{η}}$, $6^{\text{η}}$, ...
- Τριπλές αρμονικές (triplen harmonics): $3^{\text{η}}$, $9^{\text{η}}$, $15^{\text{η}}$, ... οι οποίες είναι μονά πολ/σια του 3.

Σημασία ανάλυσης Fourier

- Πολλά φαινόμενα στη φύση και συγκεκριμένα στα ηλεκτρικά κυκλώματα μελετώνται ευκολότερα εάν αναπαρασταθούν σαν συναρτήσεις της συχνότητας, παρά σαν συναρτήσεις του χρόνου (που είναι στην πραγματικότητα)
- Γιατί ανάλυση σε ημίτονα/συνημίτονα και όχι αθροίσματα άλλων συναρτήσεων;
 - Διότι τα ημίτονα/συνημίτονα παραμένουν ημιτονοειδή, με την ίδια συχνότητα μετά από παραγωγή/ολοκλήρωση
 - Πολύ σημαντική ιδιότητα για ανάλυση πολλών κοινών συστημάτων (γραμμικών μη χρονικά μεταβαλλόμενων – Linear Time Invariant – LTI systems)
- Παράδειγμα 1: Εμπέδηση πηνίου σαν συνάρτηση της συχνότητας
 - Βασική εξίσωση: $v_L = L \frac{di}{dt}$
 - Για τάση-ρεύμα με συχνότητα f : $Z_L = j\omega L = j2\pi f L$
 - Εννοείται ημιτονοειδής τάση-ρεύμα!
- Εφαρμογή: Μεταφορά στο πεδίο της συχνότητας – Επίλυση – Μεταφορά πίσω στο πεδίο του χρόνου

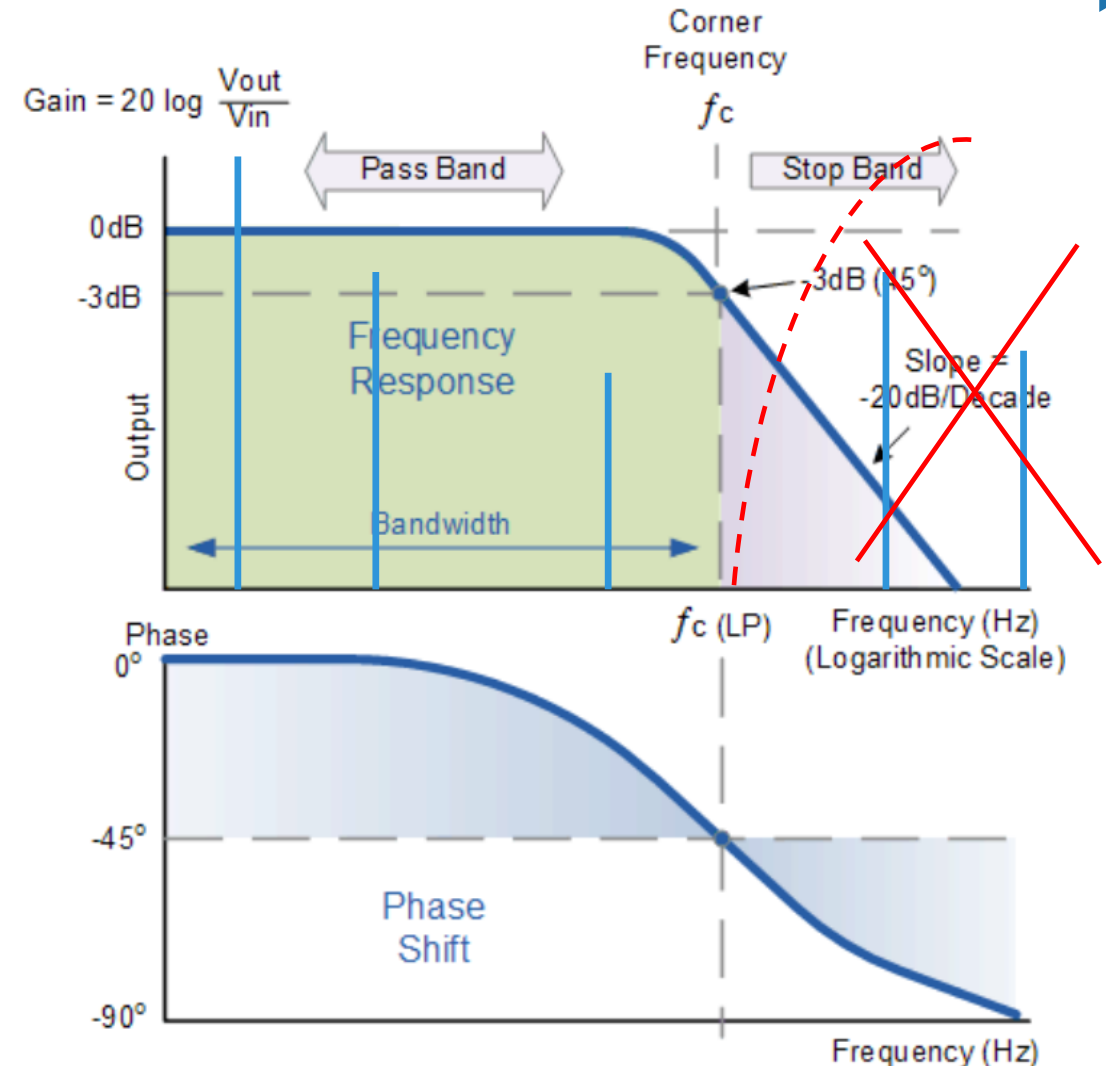
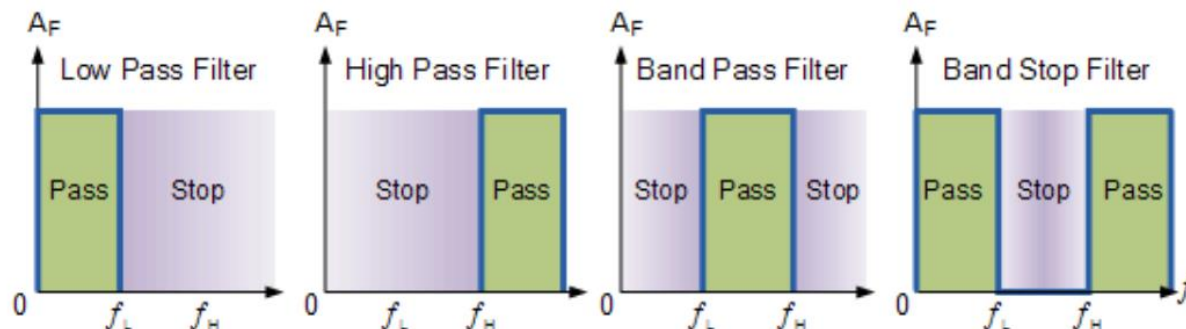
Εφαρμογή ανάλυσης Fourier – Παράδειγμα 1:

Ρεύμα πηνίου με μη ημιτονοειδή τάση στα άκρα του

1. Αναλύουμε την κυματομορφή της τάσης στις αρμονικές της συνιστώσες
 - Θα είναι περισσότερες από μία (την θεμελιώδη) αφού η τάση δεν είναι ημιτονοειδής
 - Μεταβαίνουμε στο «πεδίο της συχνότητας», δηλ. εκτελούμε πλέον υπολογισμούς με βάση τη συχνότητα, όχι τον χρόνο
2. Υπολογίζουμε την εμπέδηση του πηνίου, $Z_{L,h}$, για κάθε αρμονική χωριστά
 - $Z_{L,h} = jh\omega L = j2\pi hfL$
3. Υπολογίζουμε το ρεύμα του πηνίου διαιρώντας την κάθε αρμονική της τάσης με την εμπέδηση του πηνίου στην αντίστοιχη συχνότητα
 - $I_h = V_h / Z_{L,h}$
 - Προκύπτουν έτσι οι αρμονικές συνιστώσες του ρεύματος
4. Γράφουμε τις αρμονικές αυτές σαν ημίτονα/συνημίτονα και τις προσθέτουμε
 - Μεταβαίνουμε έτσι πίσω στο «πεδίο του χρόνου», αφού το αποτέλεσμα είναι η κυματομορφή του ρεύματος, δηλ. συνάρτηση του χρόνου

Παράδειγμα 2 – Συνδυασμός φάσματος με διάγραμμα Bode για βαθυπερατό φίλτρο

- Τα διαγράμματα Bode απεικονίζουν την επίδραση που έχει ένα σύστημα πάνω σε κάθε αρμονική της εισόδου του
- Αν μεταφέρουμε την κυματομορφή εισόδου στο πεδίο της συχνότητας, λάβουμε δηλαδή το φάσμα και το θέσουμε επάνω σε ένα διάγραμμα Bode π.χ. ενός φίλτρου, μπορούμε να εκτιμήσουμε το φάσμα της εξόδου του φίλτρου και την αντίστοιχη κυματομορφή



RMS τιμή με βάση την ανάλυση Fourier

- Υπενθύμιση:

$$x(t) = X_0 + \sum_{h=1}^k X_h(t)$$

$$X_h(t) = \widehat{X}_h \cos(h\omega t + \varphi_h)$$

$$\widehat{X}_h = \sqrt{a_h^2 + b_h^2} \quad \text{Πλάτος αρμ. } h$$

$$\varphi_h = \arctan\left(-\frac{b_h}{a_h}\right) \quad \text{Φάση αρμ. } h$$

Πεδίο του χρόνου

$$\bar{X} = X_0 = X_{DC} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\theta) d\theta$$

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(\theta) d\theta}$$

Πεδίο της συχνότητας

$$X_{RMS} = \sqrt{X_0^2 + \sum_{h=1}^k X_{h,RMS}^2} = \sqrt{X_0^2 + \sum_{h=1}^k \frac{\widehat{X}_h^2}{2}}$$

Ολική αρμονική παραμόρφωση Total Harmonic Distortion (THD)

- Ωφέλιμο – «καθαρό» μέρος:
 - Ημίτονο: Η θεμελιώδης αρμονική συνιστώσα ($h = 1$)
- Παραμόρφωση (distortion):
 - Το σύνολο των υπόλοιπων αρμονικών συνιστωσών
- Total Harmonic Distortion (THD): Ορίζεται ως ο λόγος
 - της RMS τιμής της παραμόρφωσης
 - προς την RMS τιμή της θεμελιώδους

RMS τιμή παραμόρφωσης

$$X_{dist,RMS} = \sqrt{X_0^2 + \sum_{h=2}^k X_{h,RMS}^2} = \sqrt{X_{RMS}^2 - X_{1,RMS}^2}$$

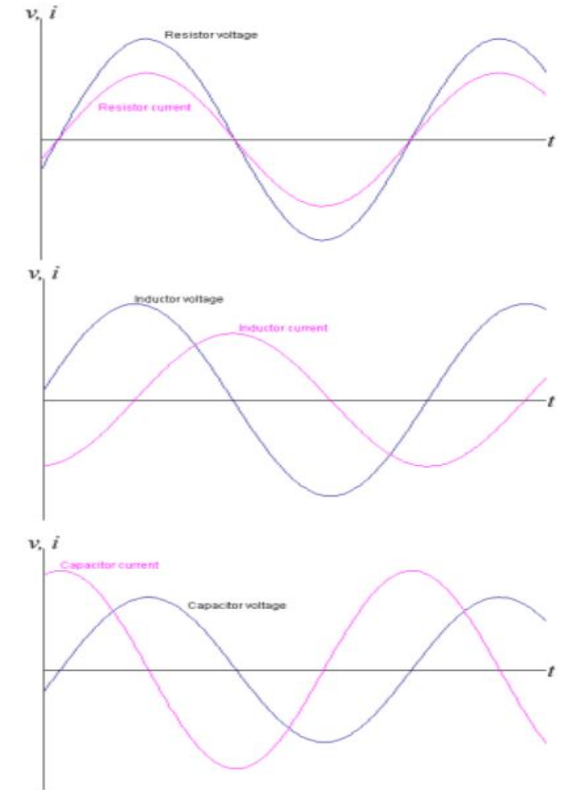
Ολική αρμονική παραμόρφωση (THD)

$$THD = \frac{X_{dist,RMS}}{X_{1,RMS}} \times 100\%$$

- Σημ.: Για πολύ παραμορφωμένες κυματομορφές μπορεί να ισχύει $THD > 100\%$

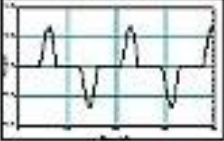
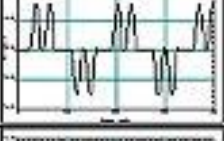
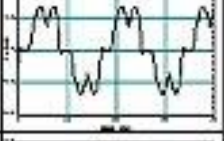
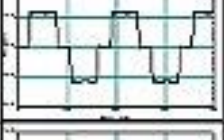
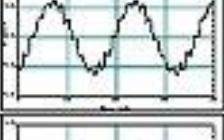
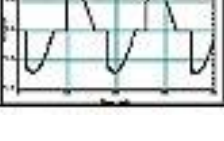
Γραμμικά Φορτία

- Για ημιτονοειδή τάση τροφοδοσίας, λαμβάνουν ημιτονοειδές ρεύμα.
- Παθητικά φορτία
 - Αντιστάσεις
 - Πηνία
 - Πυκνωτές
 - Ή συνδυασμοί τους συνδεδεμένοι σε σειρά/παράλληλα
- AC κινητήρες



Μη γραμμικά φορτία

- Παρότι η τάση τροφοδοσίας τους είναι ημιτονοειδής, δεν λαμβάνουν ημιτονοειδές ρεύμα.
- Κυρίως λόγω χρήσης ηλεκτρονικών ισχύος
- Παραδείγματα συσκευών:
 - ρυθμιστές στροφών κινητήρων
 - UPS
 - dimmer
 - ηλεκτρονικά ballast για λαμπτήρες φθορισμού
 - τροφοδοτικά για λαμπτήρες LED
 - τροφοδοτικά υπολογιστών
 - επαγωγικές εστίες
 - ...

Type of Load	Waveform	<i>THD_i</i>
Typical Computer Load		80% (high 3 rd harmonic)
Semi converter		High 2 nd , 3 rd , 4 th harmonic in part load
6 Pulse ac-dc Drive, with capacitor on the dc side, without choke		80%
6 Pulse ac-dc Drive, with capacitor on the dc side, with 3% choke		40%
6 Pulse ac-dc Drive, with inductance on the ac side		28%
12 Pulse ac-dc Drive,		15%
Ac-dc-ac Drive		

Σχετικό υλικό

- Από το βιβλίο «Ηλεκτρονικά Ισχύος», Ι. Κιοσκερίδη, εκδ. Τζιόλα, 2^η έκδοση
 - Κεφάλαιο 9
- Από τις «Σημειώσεις» στο eClass
 - Κεφάλαιο 3