<u>**Κεφάλαιο 2^{ο}**: Σφάλματα</u>

2.1 Εισαγωγή

Σε κάθε μέτρηση που πραγματοποιείται, ένας βασικός παράγοντας που καθορίζει το αποτέλεσμα είναι η απόκλιση της τιμής που μετράμε ή υπολογίζουμε σε σχέση από την πραγματική τιμή. Όπως ήδη επισημάνθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η εγκυρότητα μιας μέτρησης χαρακτηρίζεται με βάση το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα ενώ αντίστοιχα στο όργανο υπάρχει η κλάση του οργάνου η οποία καθορίζει πόσο σφάλμα έγινε σε μία συγκεκριμένη χρήση του. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με δύο άλλα σοβαρά θέματα: α) τα είδη των σφαλμάτων και πως επηρεάζουν τις μετρήσεις και β) την μέθοδο με την οποία προσδιορίζουμε το σφάλμα στην περίπτωση που επεξεργαζόμαστε τις ενδείξεις των οργάνων με βάση κάποια προκαθορισμένη συνάρτηση.

2.2 Είδη σφαλμάτων.

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες σφαλμάτων που μπορούν να επηρεάσουν μία μέτρηση:

α) <u>τα περιβαλλοντικά σφάλματα και τα σφάλματα παρατήρησης</u>. Τα σφάλματα αυτά οφείλονται κυρίως σε λάθος χρήση των οργάνων. Τέτοιου τύπου λάθη είναι η χρήση ενός οργάνου σε λάθος θερμοκρασία ή υγρασία, σε λάθος θέση, παρουσία πεδίων που επηρεάζουν την μέτρηση (π.χ. χρήση του οργάνου κινητού μαγνήτη κοντά σε μαγνητικά πεδία) αλλά και η κακή ανάγνωση της ένδειξης. Ειδικά όσο αφορά το τελευταίο, μία σωστή ανάγνωση της ένδειξης απαιτεί η ένδειξη, η άκρη του δείκτη και το μάτι του παρατηρητή να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη ευθεία.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, κάθε όργανο αναφέρει σε εμφανές σημείο τις σωστές παραμέτρους λειτουργίας του, όπως επίσης ο κατασκευαστής εφοδιάζει το όργανο με τις απαραίτητες οδηγίες χρήσης. Επομένως ο χρήστης του οργάνου είναι πάντοτε εφοδιασμένος με αρκετά στοιχεία για να χρησιμοποιήσει σωστά το όργανο και αν επιθυμεί σωστές μετρήσεις, οφείλει να το κάνει.

β) <u>τα τυχαία σφάλματα.</u> Όπως φαίνεται από τη λέξη, αυτά εμφανίζονται τυχαία και ακολουθούν τους νόμους των πιθανοτήτων. Υπάρχουν όμως κατάλληλες διαδικασίες και αντίστοιχος μαθηματικός φορμαλισμός που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε την επίδραση τους στο τελικό αποτέλεσμα.

γ) <u>τα συστηματικά σφάλματα.</u> Τα σφάλματα αυτά οφείλονται σε κατασκευαστικές ατέλειες και μηχανικά σφάλματα των οργάνων, στην αλλαγή της τιμής της μετρούμενης ποσότητας λόγω της σύνδεσης του οργάνου, στις προσεγγίσεις των μεθόδων υπολογισμού, στη γήρανση των οργάνων και σε άλλους παράγοντες οι οποίοι όμως μπορούν να προβλεφθούν και να ληφθούν υπόψη στο τελικό αποτέλεσμα.

2.3 Τυχαία σφάλματα. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα τυχαία σφάλματα οφείλονται σε άγνωστες μη προβλέψιμες αιτίες (τυχαία προέλευση) και περιγράφονται με την θεωρία πιθανοτήτων. Πρακτικά, αν θέλουμε να μετρήσουμε την τιμή μιας ποσότητας και πάρουμε ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων, οι μετρήσεις θα διαφέρουν μεταξύ τους κατά αυθαίρετο τρόπο, με τις διαφορές να ακολουθούν τους παρακάτω κανόνες:

i) οι μικρές διαφορές συμβαίνουν συχνότερα από τις μεγάλες (ή αντίστοιχα τα μικρά τυχαία σφάλματα συμβαίνουν συχνότερα από τα μεγάλα)

ii) οι μεγάλες διαφορές εμφανίζονται σπάνια (ή αντίστοιχα τα μεγάλα τυχαία σφάλματα είναι απίθανα)

iii) οι διαφορές μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές με την ίδια συχνότητα (ή αντίστοιχα ίσα θετικά ή αρνητικά τυχαία σφάλματα εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα).

Υπάρχει αναλυτικός φορμαλισμός με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε το επονομαζόμενο πιθανό σφάλμα Ε, τον οποίο όμως πρέπει να χρησιμοποιούμε αφού έχουμε λάβει υπόψη όλες τις άλλες πηγές σφαλμάτων. Ο φορμαλισμός αυτός είναι:

α) αν θέλουμε να μετρήσουμε μέγεθος x, πραγματοποιούμε n μετρήσεις και βρίσκουμε την μέση τιμή των μετρήσεων που ορίζεται ως:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} \qquad (2.1)$$

Η μέση τιμή $\overline{x}$ θεωρείται η τιμή που πλησιάζει περισσότερο στην σωστή τιμή του μεγέθους x.

β) υπολογίζουμε την μέση απόκλιση D που ορίζεται ως:

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - \overline{x} \right|}{n} \qquad (2.2)$$

Η μέση απόκλιση D μας δίνει την μέση τιμή των αποκλίσεων των επί μέρους μετρήσεων από την μέση τιμή.

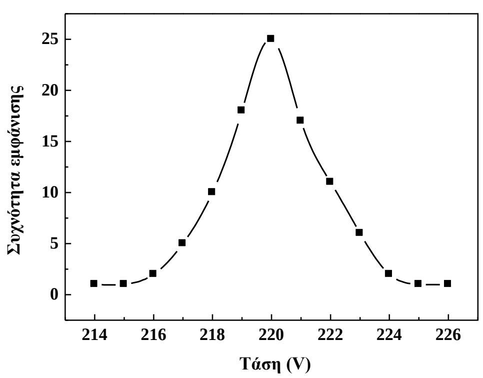
γ) υπολογίζουμε το πιθανό σφάλμα Ε της μέσης τιμής $\overline{x}$ από την σχέση:

$$E = \frac{D}{\sqrt{n}} 0.845 \qquad (2.3)$$

Όπου το 0.845 προέρχεται από την θεωρία πιθανοτήτων. Βλέπουμε επομένως ότι για να έχουμε μικρό πιθανό σφάλμα στην μέση τιμή πρέπει να έχουμε σχετικά μεγάλο αριθμό μετρήσεων (όχι απαραίτητα πολύ μεγάλο λόγω της τετραγωνικής ρίζας).

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω: έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε την τάση στο δίκτυο της ΔΕΗ. Πραγματοποιούμε δέκα μετρήσεις που δίνουν 218V, 222V, 220V, 215V, 226V, 228V, 214V, 225 V, 215 V και 227 V. Η μέση τιμή των μετρήσεων είναι $\overline{V} = 221V$, η μέση απόκλιση D=4.6V και το πιθανό σφάλμα στη μέση τιμή E=1.23V.

Μία άλλη προσέγγιση του προβλήματος των τυχαίων σφαλμάτων είναι η χρήση κατανομών. Για να γίνει κατανοητή η έννοια της κατανομής, ας δούμε ένα παράδειγμα μεγάλου αριθμού μετρήσεων που παρουσιάζουν τυχαίο σφάλμα: έστω το προηγούμενο παράδειγμα μέτρησης της τάσης στο δίκτυο της ΔΕΗ και ότι παίρνουμε 100 μετρήσεις οι οποίες κυμαίνονται από 214V έως 226V. Φτιάχνουμε ένα διάγραμμα (Σχήμα 2.1) όπου φαίνεται η συχνότητα με την οποία εμφανίζεται κάθε μία τιμή. Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται ότι πιο συχνά εμφανίζεται η τιμή 220V άρα αυτή είναι και η πιθανότερη τιμή. Οι τιμές κοντά στα 220V (217-223 V) εμφανίζονται με μεγαλύτερη συχνότητα από ότι οι τιμές μακριά (214-216 V και 224-226 V). Τέλος, ίσες θετικές ή αρνητικές αποκλίσεις εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα. Το διάγραμμα αυτό είναι η κατανομή της συχνότητας εμφάνισης τιμών της τάσης του δικτύου. Ουσιαστικά μας δίνει την πιθανότητα εμφάνισης μιας τιμής της τάσης. Υπάρχει αριθμός από θεωρητικές κατανομές που περιγράφονται από αναλυτικές συναρτήσεις και χρησιμοποιούνται στην πράξη για την ανάλυση δεδομένων μετρήσεων. Οι κυριότερες από τις συναρτήσεις-κατανομές είναι: η διωνυμική, η Poisson, η Gauss, η Γ, η t, η x^2 κλπ. Σε κάθε περίπτωση, η καταλληλότερη συνάρτηση για να περιγράψει την πιθανότητα εμφάνισης μέτρησης βρίσκεται με τη βέλτιστη προσομοίωση πειραματικών δεδομένων με τις συναρτήσεις. Αφού βρεθεί η



Σχήμα 2.1

καταλληλότερη συνάρτηση, από τον αναλυτικό τύπο μπορούν να βρεθούν διάφορες παράμετροι όπως η επικρατούσα τιμή, το εύρος κατανομής, η τυπική απόκλιση κλπ.

2.4 Συστηματικά σφάλματα

'Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, τα συστηματικά σφάλματα είναι αυτά που μπορούν να προβλεφθούν και οφείλονται σε παράγοντες που ήδη αναφέρθηκαν. Στο μάθημα αυτό μας ενδιαφέρουν δύο κατηγορίες συστηματικών σφαλμάτων, τα σφάλματα των οργάνων κατά την μέτρηση και τα σφάλματα κατά τους υπολογισμούς. Αναφορικά με τα σφάλματα που προκαλεί η σύνδεση οργάνου, αυτά θα εξεταστούν κατά περίπτωση στις αντίστοιχες διαδικασίες μέτρησης ενώ κατά τη γήρανση, το όργανο απαιτεί αναβαθμολόγηση.

Στην περίπτωση που απαιτείται η γνώση ενός μεγέθους X το οποίο μπορεί να μετρηθεί απ' ευθείας με ένα όργανο, το απόλυτο ΔX και το σχετικό σφάλμα ΔX/X της μέτρησης βρίσκεται απλά με την χρήση της κλάσης G και της μέγιστης ένδειξης ME του οργάνου (εξίσωση 1.1), οπότε:

$$\Delta X=(G\times ME)/100 \text{ και } \Delta X/X=(G\times ME)/(100\times X_{\varepsilon\nu\delta}). \qquad (2.4)$$

Υπάρχουν όμως πολλές περιπτώσεις όπου η γνώση ενός μεγέθους απαιτεί αφενός αριθμό μετρήσεων με όργανα και αφετέρου υπολογισμό με βάση κάποια θεωρητική εξίσωση. Σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να βρούμε το σφάλμα στο υπολογιζόμενο μέγεθος. Η διαδικασία αυτή μπορεί να είναι είτε απλή είτε περίπλοκη ανάλογα με την εξίσωση που απαιτείται.

2.4.1 Απλές περιπτώσεις

α) Σφάλμα αθροίσματος. Έστω ότι με δύο όργανα μετράμε δύο ποσότητες A και B με απόλυτα σφάλματα ΔA και ΔB αντίστοιχα. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το άθροισμα S=A+B και θέλουμε να βρούμε το απόλυτο ΔS και το σχετικό S/ΔS σφάλμα στον υπολογισμό μας. Θεωρώντας ότι ο δείκτης ε αντιστοιχεί στην μέτρηση ενώ ο δείκτης α στην πραγματική τιμή έχουμε:

$$\Delta S = S_{\varepsilon} - S_{a} = (A_{\varepsilon} + B_{\varepsilon}) - (A_{\alpha} + B_{\alpha}) = (A_{\varepsilon} - A_{\alpha}) + (B_{\varepsilon} - B_{\alpha}) = \Delta A + \Delta B \quad (2.5)$$

Δηλαδή όταν έχουμε άθροισμα, το απόλυτο σφάλμα του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των επί μέρους απολύτων σφαλμάτων. Όσον αφορά το σχετικό σφάλμα του αθροίσματος, αυτό δίνεται από:

$$\frac{\Delta S}{S_{\varepsilon}} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A_{\varepsilon} + B_{\varepsilon}} \qquad (2.6)$$

Σαν παράδειγμα χρήσης των παραπάνω μπορεί να αναφερθεί η περίπτωση σύνδεσης αντιστάσεων σε σειρά. Αν $R_{ολ}=R_1+R_2$ και η ανοχή των επιμέρους αντιστάσεων είναι ΔR_1 και ΔR_2 αντίστοιχα, τότε $\Delta R_{ολ}= \Delta R_1+\Delta R_2$.

β) <u>Σφάλμα πολλαπλασιασμού</u>. Έστω ότι με δύο όργανα μετράμε δύο ποσότητες A και B με απόλυτα σφάλματα ΔΑ και ΔΒ αντίστοιχα. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο S=AB και θέλουμε να βρούμε το απόλυτο ΔS και το σχετικό S/ΔS σφάλμα στον υπολογισμό μας. Θεωρώντας ότι ο δείκτης ε αντιστοιχεί στην μέτρηση ενώ ο δείκτης α στην πραγματική τιμή έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_\varepsilon - S_a = A_\varepsilon B_\varepsilon - A_\alpha B_\alpha = A_\varepsilon B_\varepsilon - (A_\varepsilon - \Delta A)(B_\varepsilon - \Delta B) = \\ &= A_\varepsilon \Delta B + B_\varepsilon \Delta A - \Delta A \Delta B \approx B_\varepsilon \Delta A + A_\varepsilon \Delta B \end{aligned} \qquad (2.7)$$

όπου ελήφθη υπόψη ότι $\Delta A\Delta B \ll B_\varepsilon \Delta A, A_\varepsilon \Delta B$. Όσον αφορά το σχετικό σφάλμα του γινομένου, αυτό δίνεται από:

$$\frac{\Delta S}{S_\varepsilon} = \frac{B_\varepsilon \Delta A + A_\varepsilon \Delta B}{A_\varepsilon B_\varepsilon} = \frac{\Delta A}{A_\varepsilon} + \frac{\Delta B}{B_\varepsilon} \qquad (2.8)$$

Σαν παράδειγμα χρήσης των παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί η περίπτωση υπολογισμού της ισχύος. Αν P=VI και το απόλυτο σφάλμα των επιμέρους μεγεθών είναι ΔV και ΔΙ αντίστοιχα, τότε ΔP= IΔV+VΔI.

<u>2.4.2 Γενικός τύπος</u>

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα μέγεθος y το οποίο εκφράζεται σαν συνάρτηση n μεταβλητών, δηλαδή $y=f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, όπου οι μεταβλητές παρουσιάζουν απόλυτο σφάλμα $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$. Το απόλυτο σφάλμα του μεγέθους αυτού Δy υπολογίζεται με βάση το διαφορικό της συνάρτησης f που δίνεται από:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_j} dx_j \qquad (2.9)$$

όπου $\dfrac{\partial y}{\partial x_j}$ είναι η μερική παράγωγος της συνάρτησης y ως προς την μεταβλητή x_j (για υποβοήθηση υπάρχει στο τέλος του κεφαλαίου παράγραφος σχετικά με μερικές παραγώγους). Το απόλυτο Δy και το σχετικό Δy/y σφάλμα δίνονται από:

$$|\Delta y| = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right| + \ldots\ldots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_j} \Delta x_j\right| \quad (2.10)$$

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \frac{1}{|y|} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_j} \Delta x_j\right| \qquad (2.11)$$

2.4.3 Παραδείγματα

α) Αρχικά ας εξετάσουμε με βάση τη συνάρτηση 2.10 την περίπτωση του σφάλματος γινομένου που είδαμε στην παράγραφο 2.4.1. Αν $y=x_1x_2$, το Δy δίδεται από:

$$|\Delta y| = \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\Delta x_j\right| = \left|\frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2\right| = x_2\Delta x_1 + x_1\Delta x_2$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι καταλήξαμε ακριβώς στο ίδιο αποτέλεσμα όπως προηγουμένως.

β) Ας εξετάσουμε τώρα μια άλλη συνάρτηση όπως το πηλίκο $y=x_1/x_2$. Το Δy δίνεται από την σχέση:

$$|\Delta y| = \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\Delta x_j\right| = \left|\frac{\partial(x_1/x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial(x_1/x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{x_2}\Delta x_1\right| + \left|-\frac{x_1}{x_2^2}\Delta x_2\right| = \frac{\Delta x_1}{x_2} + \frac{x_1\Delta x_2}{x_2^2}$$

γ) Τέλος ας εξετάσουμε ένα πραγματικό πρόβλημα: σε ένα κύκλωμα μετράμε τάση και ρεύμα με τα εξής όργανα: α) την τάση με βολτόμετρο μέγιστης ένδειξης 400 V και κλάσης 2 και β) το ρεύμα με αμπερόμετρο μέγιστης ένδειξης 3 A και κλάσης 2. Αν οι μετρούμενες ποσότητες είναι V=200 V και I=2 A, να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο και σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό της ισχύος.

<u>Λύση</u>. Στο πρόβλημα μας, έχουμε την εύρεση δύο μεγεθών (V και I) με όργανα και στη συνέχεια τον υπολογισμό ενός τρίτου μεγέθους με κάποια συνάρτηση, ζητείται δε το σφάλμα στο τρίτο μέγεθος. Για να λύσουμε το πρόβλημα ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Βήμα 1^o. Ορίζουμε την συνάρτηση που συνδέει τα μεγέθη, και υπολογίζουμε την τιμή του ζητούμενου μεγέθους. Η συνάρτηση είναι P=VI και η ζητούμενη τιμή P=(200 V×2 A)=400 W.
- Βήμα 2^o. Υπολογίζουμε το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στα δύο μεγέθη που μετρήθηκαν με τα όργανα. Έχουμε:

$$\Delta V = \frac{G_V \times ME_V}{100} = \frac{2\times 400}{100} = 8V$$

$$\Delta I = \frac{G_I \times ME_I}{100} = \frac{2\times 3}{100} = 0.06A$$

- Βήμα 3^o. Υπολογίζουμε το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στο P με χρήση της εξίσωσης 2.10. Έχουμε:

$$|\Delta P| = \left|\frac{\partial P}{\partial V}\Delta V\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial I}\Delta I\right| = I\Delta V + V\Delta I = 2A \times 8V + 200V \times 0.06A = 28W$$

- Βήμα 4^{o}. Υπολογίζουμε το μέγιστο σχετικό σφάλμα στο P:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{28W}{400W} = 0.07 \quad \text{ή} \quad 7\%$$

2.5 Μερικές παράγωγοι.

Η γνωστή μας παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ έχει έννοια μόνο στην περίπτωση που η συνάρτηση y εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή x. Στην περίπτωση συνάρτησης με πολλές μεταβλητές όπως $y=f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, η απλή παράγωγος δεν μπορεί να οριστεί για τον απλούστατο λόγο ότι πρέπει με κάποιο τρόπο να ορίσουμε ως προς ποια μεταβλητή γίνεται η παραγώγιση. Η μέθοδος λοιπόν που ακολουθούμε είναι η μερική παράγωγος στην οποία:

α) το d αντικαθίσταται με το ∂

β) στον παρανομαστή καθορίζουμε ως προς ποια μεταβλητή παραγωγίζουμε

γ) κατά την παραγώγιση, θεωρείται ότι όλες οι άλλες μεταβλητές αντιστοιχούν σε σταθερές ποσότητες.

Σαν παράδειγμα, ας βρούμε την παράγωγο ως προς x της συνάρτησης $f=2xy^2$. Έχουμε: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2$ όπου το y^2 θεωρείται σαν σταθερή ποσότητα και μένει ως έχει. Αντίστοιχα η παράγωγος της f ως προς y είναι: $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy$ όπου το x θεωρείται σαν σταθερή ποσότητα και μένει ως έχει. Βλέπουμε επομένως ότι αν έχουμε συνάρτηση πολλών μεταβλητών, η παράγωγος αλλάζει ανάλογα με την μεταβλητή που παραγωγίζουμε.