

## Κεφάλαιο 8<sup>ο</sup>

### Μέτρηση ωμικής αντίστασης

#### 8.1 Ωμική αντίσταση-γενικά

Η ωμική αντίσταση  $R$  ορίζεται με βάση το νόμο του Ohm ( $R=V/I$  όπου  $V$  η τάση και  $I$  το ρεύμα σε ένα αγωγό), εξαρτάται από το υλικό του αγωγού και τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά, έχει μονάδα το  $\Omega$  και στην πράξη περιγράφει την δυσκολία που συναντούν τα ηλεκτρόνια κατά το πέρασμά τους μέσα από τον αγωγό. Για ένα αγωγό-σύρμα, η αντίσταση δίνεται από τη σχέση:

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (8.1)$$

όπου  $\rho$  η ειδική αντίσταση του αγωγού που εξαρτάται από το υλικό,  $L$  το μήκος του αγωγού και  $S$  η επιφάνεια της διατομής του.

Κάθε συνδυασμό (σύνδεση) αντιστάσεων που υπακούουν τον νόμο του Ohm μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με μία μόνο αντίσταση, την ισοδύναμη αντίσταση. Η ισοδύναμη αντίσταση είναι τέτοια ώστε να διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα με το συνδυασμό και στα άκρα της να υπάρχει η ίδια διαφορά δυναμικού. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις σύνδεσης:

α) Σύνδεση σε σειρά (Σχήμα 8.1):

$$V_{R_1} = IR_1 \text{ και } V_{R_2} = IR_2 \Rightarrow V_{AB} = IR_1 + IR_2$$

$$V_{AB} = V_{R_{eq}} = IR_{eq} \Rightarrow IR_{eq} = IR_1 + IR_2 \Rightarrow$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$\text{Γενικά: } R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

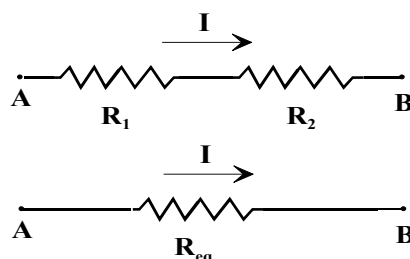
β) Σύνδεση παράλληλα (Σχήμα 8.2):

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, I_2 = \frac{V}{R_2} \text{ και } I_{eq} = \frac{V}{R_{eq}} \text{ άρα}$$

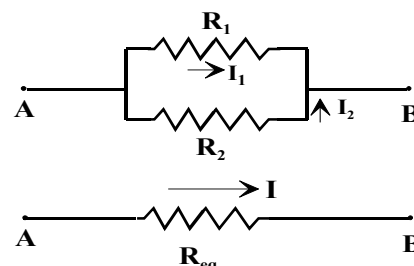
$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\text{Γενικά: } \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

Η ωμική αντίσταση, εκτός από το υλικό και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγωγού, εξαρτάται και από την θερμοκρασία. Η μεταβολή της αντίστασης με την θερμοκρασία δίνεται από την εξίσωση:



Σχήμα 6.1 Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά



Σχήμα 8.2 Σύνδεση αντιστάσεων παράλληλα

$$R_T = R_0(1 + \alpha\Delta T) \quad (8.2)$$

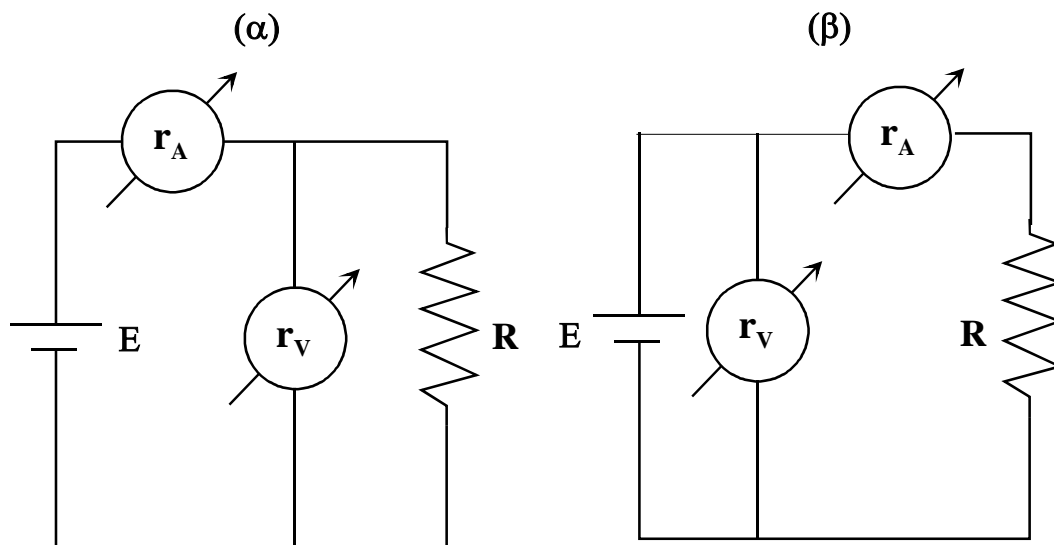
όπου  $R_T$ ,  $R_0$  είναι η τιμή της αντίστασης ( $\Omega$ ) σε θερμοκρασία  $T$  και  $20^\circ \text{C}$  αντίστοιχα,  $\alpha$  ο θερμικός συντελεστής αντίστασης ( $\Omega/^\circ \text{C}$ ) που εξαρτάται από το υλικό και  $\Delta T = T - 20$  η μεταβολή της θερμοκρασίας σε  $^\circ \text{C}$ .

Τέλος, κάθε αντίσταση περιγράφεται με δύο από τα παρακάτω τέσσερα χαρακτηριστικά μεγέθη: τάση  $V$ , ρεύμα  $I$ , αντίσταση  $R$  και ισχύ  $P$ . Τα μεγέθη αυτά συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις:

$$P = VI = I^2R = V^2/R \quad (8.3)$$

## **8.2 Μέτρηση της ωμικής αντίστασης με βολτόμετρο και αμπερόμετρο**

Η απλούστερη μέθοδος μέτρησης μιας ωμικής αντίστασης είναι η χρήση ενός βολτομέτρου και ενός αμπερομέτρου και εφαρμογή του νόμου του Ohm. Υπάρχουν δύο εφικτές συνδεσμολογίες: α) το βολτόμετρο συνδέεται στην αντίσταση (σχήμα



Σχήμα 8.3 Μέτρηση ωμικής αντίστασης με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

6.3α) και β) το αμπερόμετρο συνδέεται στην αντίσταση (σχήμα 8.3β). Στην περίπτωση χρήσης ιδανικών οργάνων ( $r_A=0$ ,  $r_V=\infty$ ), καμία από τις δύο συνδεσμολογίες δεν θα επηρέαζε την μέτρηση. Όμως για πραγματικά όργανα ας εξετάσουμε πως η συνδεσμολογία επηρεάζει την μέτρηση μας:

1) στην περίπτωση (α) το αμπερόμετρο μετρά όχι μόνο το ρεύμα στην αντίσταση αλλά και το ρεύμα που διαρρέει το βολτόμετρο. Θα ισχύει  $V_R = V$ ,  $I_R = I - V/r_V$ , όπου  $V_R$  και  $I_R$  η τάση και το ρεύμα στην αντίσταση. Επομένως, για να αποφύγουμε τα σφάλματα θα πρέπει να γίνει η παρακάτω διόρθωση:

$$R = \frac{V}{I - \frac{V}{r_V}} \quad (8.4)$$

Αν δεν γίνει αυτή η διόρθωση, μπορούμε να υπολογίσουμε στο σχετικό σφάλμα της μέτρησης θεωρώντας ως μετρούμενη τιμή την ισοδύναμη αντίσταση των παραλλήλων αντιστάσεων  $R$  και  $r_V$ :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R - R_{\text{ισοδ}}}{R} = \frac{R - \frac{R r_V}{R + r_V}}{R} = \frac{R}{R + r_V} = \frac{1}{1 + \frac{r_V}{R}} \quad (8.5)$$

Επομένως στην περίπτωση που το βολτόμετρο συνδέεται στην αντίσταση, το σχετικό σφάλμα της μέτρησης είναι μικρό για μικρές αντιστάσεις.

2) στην περίπτωση (β) το βολτόμετρο μετράει την πτώση τάσης στα άκρα του αμπερομέτρου. Θα ισχύει  $V_R = V - I r_A$ ,  $I_R = I$ , όπου  $V_R$  και  $I_R$  η τάση και το ρεύμα στην αντίσταση. Επομένως, για να αποφύγουμε τα σφάλματα θα πρέπει να γίνει η παρακάτω διόρθωση:

$$R = \frac{V - I r_A}{I} \quad (8.6)$$

Αν δεν γίνει αυτή η διόρθωση, μπορούμε να υπολογίσουμε στο σχετικό σφάλμα της μέτρησης θεωρώντας ως μετρούμενη τιμή την ισοδύναμη αντίσταση των αντιστάσεων σε σειρά  $R$  και  $r_A$ :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R - R_{\text{ισοδ}}}{R} = \frac{R - (R + r_A)}{R} = \frac{r_A}{R} \quad (8.7)$$

Επομένως στην περίπτωση που το αμπερόμετρο συνδέεται στην αντίσταση, το σχετικό σφάλμα της μέτρησης είναι μικρό για μεγάλες αντιστάσεις.

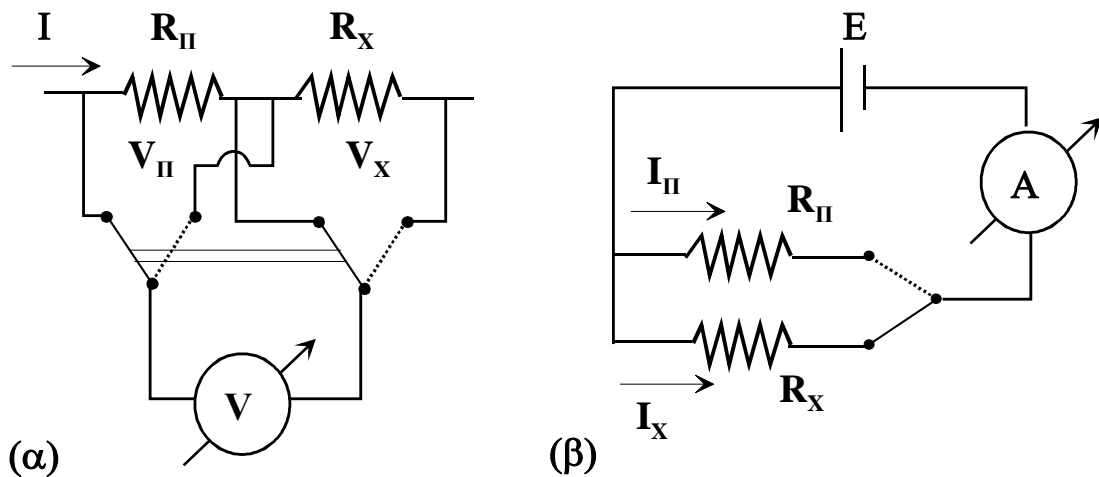
### **8.3 Μέτρηση της ωμικής αντίστασης με σύγκριση**

Η σύγκριση της πτώσης τάσης ή του ρεύματος που διαρρέει μία άγνωστη αντίσταση  $R_X$  με τα αντίστοιχα μεγέθη σε γνωστή πρότυπη αντίσταση  $R_{\Pi}$  αποτελεί μία σχετικά απλή μέθοδος για τη μέτρηση ωμικής αντίστασης (Σχήμα 8.4). Στην πρώτη περίπτωση, η πρότυπη και η άγνωστη αντίσταση συνδέονται σε σειρά και διαρρέονται από ρεύμα  $I$ . Με την βοήθεια μεταγωγέα και βολτομέτρου μετράμε την πτώση τάσης σε κάθε μία από τις αντιστάσεις η οποία είναι ανάλογη της τιμής της αντίστασης. Η τιμή της άγνωστης αντίστασης δίνεται τελικά από τη σχέση:

$$R_x = R_{\Pi} \frac{V_x}{V_{\Pi}} \quad (8.8)$$

Ένα σημείο που απαιτεί προσοχή είναι η τιμή της πρότυπης αντίστασης, η οποία πρέπει να της ίδιας τάξης μεγέθους με την άγνωστη αντίσταση διαφορετικά θα υπάρχουν σφάλματα λόγω της χρήσης διαφορετικού βολτομέτρου ή διαφορετικής κλίμακας στο ίδιο βολτόμετρο.

Αντίστοιχα, κατά την σύγκριση των ρευμάτων, οι δύο αντιστάσεις συνδέονται



Σχήμα 8.4 Μέτρηση ωμικής αντίστασης με σύγκριση

παράλληλα και εφαρμόζεται σε αυτές η ίδια διαφορά δυναμικού  $V$ . Με την βοήθεια μεταγωγέα και αμπερομέτρου μετράμε το ρεύμα που διαρρέει κάθε μία από τις αντιστάσεις το οποίο είναι αντιστρόφως ανάλογο της τιμής της αντίστασης. Η τιμή της άγνωστης αντίστασης δίνεται τελικά από τη σχέση:

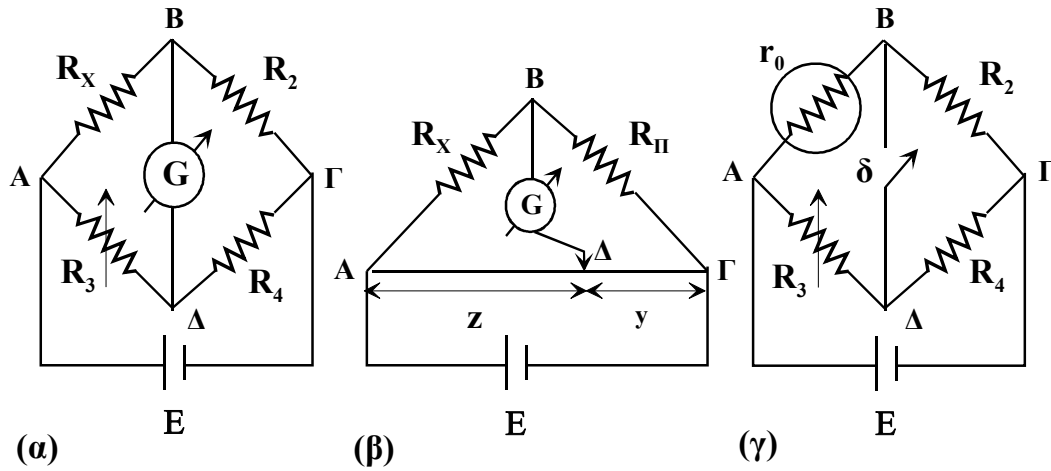
$$R_x = R_{\Pi} \frac{I_{\Pi}}{I_x} \quad (8.9)$$

#### **8.4 Μέτρηση της ωμικής αντίστασης με γέφυρα**

Η χρήση γέφυρα αποτελεί την πλέον ευαίσθητη μέθοδο μέτρησης ωμικής αντίστασης (και όχι μόνο όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια). Η λειτουργία της γέφυρας βασίζεται στο μηδενισμό του ρεύματος που διαρρέει μία γραμμή του κυκλώματος για κατάλληλο συνδυασμό τεσσάρων αντιστάσεων. Υπάρχουν διάφορες εκδοχές της γέφυρας με κυριότερες: την γέφυρα Wheatstone (Σχήμα 8.5α), την γέφυρα Wheatstone με χορδή (Σχήμα 8.5β) και τη γέφυρα Kelvin (Σχήμα 8.5γ).

Ας εξετάσουμε αρχικά την απλή γέφυρα Wheatstone. Αποτελείται από 4 αντιστάσεις, την άγνωστη  $R_x$ , μία μεταβλητή  $R_3$  η οποία πρέπει να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την  $R_x$  και δύο αντιστάσεις  $R_2$  και  $R_4$  που πρέπει να έχουν

αντίσταση περίπου το 1/10 της  $R_X$ . Το σύστημα τροφοδοτείται με πηγή  $E$  και στην γραμμή  $BD$  τοποθετείται γαλβανόμετρο με το οποίο παρακολουθούμε το μηδενισμό του ρεύματος στη γραμμή. Κατά τη διαδικασία λειτουργίας της γέφυρας, με



Σχήμα 8.5 Γέφυρα Wheatstone (α), γέφυρα Wheatstone με χορδή (β) και γέφυρα Kelvin (γ)

μεταβολή της αντίστασης  $R_3$  επιτυγχάνουμε το μηδενισμό του ρεύματος στη γραμμή  $BD$  που αλλιώς ονομάζεται ισορροπία της γέφυρας. Στην περίπτωση αυτή θα ισχύουν:  $I_{AB}=I_{BD}$ ,  $I_{AD}=I_{DG}$ ,  $V_{AB}=V_{AD}$ ,  $V_{GB}=V_{GD}$ . Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\frac{V_{AB}}{V_{BD}} = \frac{V_{AD}}{V_{GD}} \Rightarrow \frac{I_{AB}R_X}{I_{BD}R_2} = \frac{I_{AD}R_3}{I_{GD}R_4} \Rightarrow \frac{R_X}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \Rightarrow R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (8.10)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι κατά την ισορροπία της γέφυρας, η άγνωστη αντίσταση δίνεται σαν συνάρτηση των τριών άλλων αντιστάσεων μέσω της εξίσωσης (8.10).

Αντίστοιχη ανάλυση μπορεί να γίνει και για την γέφυρα Whetastone με χορδή η οποία αποτελείται από την άγνωστη αντίσταση  $R_X$ , μία πρότυπη αντίσταση  $R_{II}$ , και μία μεταλλική χορδή μήκους  $L$  επάνω στην οποία μπορεί να κινείται δρομέας. Η ισορροπία σε αυτή την περίπτωση επιτυγχάνεται με την κατάλληλη θέση του δρομέα επάνω στην μεταλλική χορδή. Σε αυτή την περίπτωση, το ρόλο των δύο άλλων αντιστάσεων παίζουν τα μεταλλικά τμήματα  $z$ ,  $y$  τα οποία έχουν αντίσταση  $R_z = \rho z/S$  και  $R_y = \rho y/S$  αντίστοιχα όπου  $\rho$  η ειδική αντίσταση και  $S$  η διατομή της χορδής. Κατ' αναλογία με την ανάλυση που έγινε στην απλή γέφυρα Wheatstone, η άγνωστη αντίσταση θα δίνεται σε αυτή την περίπτωση από τη σχέση:

$$R_X = R_z \frac{R_{II}}{R_y} \Rightarrow R_X = \rho z/S \frac{R_{II}}{\rho y/S} \Rightarrow R_X = R_{II} \frac{z}{y} \quad (8.11)$$

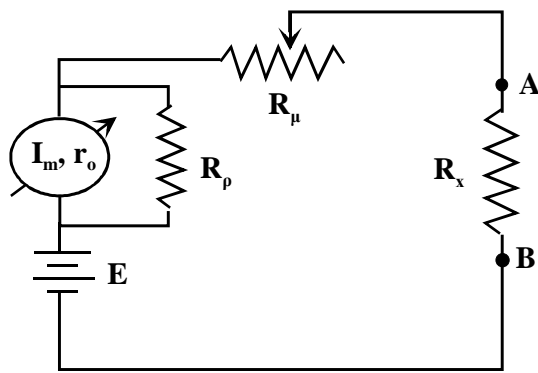
Τέλος, η γέφυρα Kelvin είναι μία απλή γέφυρα Wheatstone που χρησιμοποιείται για την μέτρηση της εσωτερικής αντίστασης οργάνων. Ρυθμίζοντας την  $R_3$

κατάλληλα ώστε το όργανο να έχει την ίδια ένδειξη και με κλειστό αλλά και με ανοικτό διακόπτη δ, η  $r_0$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$r_0 = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (8.12)$$

### 8.5 Ωμόμετρο

Η ωμική αντίσταση μπορεί να μετρηθεί και απ' ευθείας με ένα ωμόμετρο. Ας εξετάσουμε πως μπορούμε να φτιάξουμε ένα ωμόμετρο χρησιμοποιώντας ως βασική μονάδα ένα όργανο στο οποίο ο δείκτης κινείται όταν αυτό διαρρέεται από ρεύμα όπως το όργανο στρεπτού πηνίου. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:



Σχήμα 8.6 Ωμόμετρο τύπου σειράς

α) Ωμόμετρο τύπου σειράς. Σε αυτή την περίπτωση, η βασική μονάδα του οργάνου είναι σε σειρά με την υπό μέτρηση αντίσταση. Το κύκλωμα ενός ωμομέτρου τύπου σειράς φαίνεται στο Σχήμα (8.6). Αποτελείται από: πηγή E συνήθως ξηρού στοιχείου, ένα όργανο στρεπτού πηνίου  $I_m, r_0$  (ή άλλο όργανο

στο οποίο η βελόνα κινείται όταν διαρρέεται από ρεύμα), μία αντίσταση  $R_p$  παράλληλα με το βασικό όργανο που λειτουργεί ως αντίσταση διακλάδωσης (επέκταση κλίμακας) και προστασία, μία μεταβλητή αντίσταση  $R_\mu$  σε σειρά με το όργανο που βοηθά στην διόρθωση του μηδενός (η διόρθωση αυτή είναι απαραίτητη λόγω γήρανσης της πηγής που προκαλεί ελάττωση του E) ενώ η άγνωστη αντίσταση μετριέται μεταξύ των ακροδεκτών A, B.

Ας εξετάσουμε τώρα την διαδικασία μέτρησης της αντίστασης με το ωμόμετρο του Σχήματος 8.6. Αν βραχυκυκλώσουμε τα σημεία A και B ( $R_x=0$ ), το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι μέγιστο με τιμή (για καινούργιο στοιχείο E):

$$I_m = \frac{E}{R_{\omega\mu\omicron}} \quad \text{όπου} \quad R_{\omega\mu\omicron} = \frac{r_0 R_p}{r_0 + R_p} + R_\mu \quad (8.13)$$

Αν τώρα ανοικτοκυκλώσω τα σημεία A και B ( $R_x=\infty$ ), το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι μηδέν. Τέλος, για άλλες πεπερασμένες τιμές της  $R_x$ , το ρεύμα θα έχει κάποια τιμή μικρότερη του  $I_m$ , με την τιμή του ρεύματος να είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής της αντίστασης. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η κλίμακα του οργάνου μπορεί

να βαθμολογηθεί σε Ω, όμως η κλίμακα είναι αντίστροφη (υπερβολική) καθώς το μηδέν βρίσκεται στα δεξιά (μέγιστο ρεύμα) ενώ το άπειρο αριστερά (ρεύμα μηδέν). Η τιμή  $R_{\omega\mu\omicron}$  της εξίσωσης (8.13) αναφέρεται και ως ένδειξη μισής απόκλισης καθώς αν  $R_x = R_{\omega\mu\omicron}$ , τότε το ρεύμα στο όργανο θα είναι το μισό του μέγιστου.

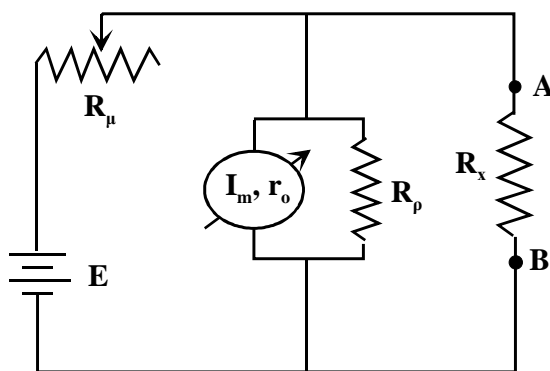
Σε σχέση με την περιοχή τιμών αντίστασης που το ωμόμετρο τύπου σειράς μετράει σωστά, ας εξετάσουμε το σχετικό σφάλμα μιας μέτρησης. Κατά τη χρήση του ωμομέτρου, η ένδειξη καθορίζεται από το ρεύμα που διαρρέει το βασικό του όργανο, άρα και από την συνολική αντίσταση του ωμομέτρου ( $R_x$  και  $R_{\omega\mu\omicron}$ ). Σαν αποτέλεσμα, όταν θέλουμε να μετρήσουμε μία αντίσταση πραγματικής τιμής  $R_x$ , η μέτρηση που μας δίνει το ωμόμετρο τύπου σειράς θα είναι  $R_x + R_{\omega\mu\omicron}$ . Άρα το σχετικό σφάλμα της μέτρησης θα είναι:

$$\left| \frac{R_{\text{ενδ}} - R_{\text{πραγ}}}{R_{\text{ενδ}}} \right| = \left| \frac{(R_x + R_{\omega\mu\omicron}) - R_x}{R_x + R_{\omega\mu\omicron}} \right| = \left| -\frac{R_{\omega\mu\omicron}}{R_x + R_{\omega\mu\omicron}} \right| = \left| -\frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_{\omega\mu\omicron}}} \right| \quad (8.14)$$

Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι για συγκεκριμένο ωμόμετρο τύπου σειράς, το σχετικό σφάλμα μέτρησης αντίστασης  $R_x$  θα είναι μικρό αν η αντίσταση αυτή είναι πολύ μεγάλη. Άρα η χρήση του ωμομέτρου τύπου σειράς ενδείκνυται για μέτρηση μεγάλων αντιστάσεων.

β) Ωμόμετρο παράλληλο. Σε αυτή την περίπτωση, η βασική μονάδα του οργάνου είναι παράλληλα με την υπό μέτρηση αντίσταση. Το κύκλωμα ενός παράλληλου ωμομέτρου φαίνεται στο Σχήμα (8.7), όπου τα διάφορα επιμέρους στοιχεία έχουν τον ίδιο ρόλο με το ωμόμετρο τύπου σειράς..

Ας εξετάσουμε τώρα την διαδικασία μέτρησης της αντίστασης με το ωμόμετρο



Σχήμα 8.7 Ωμόμετρο παράλληλου τύπου

του Σχήματος 8.7. Αν βραχυκυκλώσουμε τα σημεία A και B ( $R_x=0$ ), το ρεύμα στο βασικό όργανο θα είναι μηδέν καθώς όλο το ρεύμα θα διέρχεται από το βραχυκύκλωμα. Αν τώρα ανοικτοκυκλώσω τα σημεία A και B ( $R_x=\infty$ ), το ρεύμα στο βασικό όργανο θα είναι μέγιστο  $I_m$ . Τέλος, για άλλες πεπερασμένες τιμές της  $R_x$ , το

ρεύμα θα έχει κάποια τιμή μικρότερη του  $I_m$ , με την τιμή του ρεύματος να είναι

ανάλογη της τιμής της αντίστασης. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η κλίμακα του οργάνου μπορεί να βαθμολογηθεί σε  $\Omega$  και ότι θα είναι κανονική.

Σε σχέση με την περιοχή τιμών αντίστασης που το ωμόμετρο παράλληλου τύπου μετράει σωστά, ας εξετάσουμε το σχετικό σφάλμα μιας μέτρησης. Κατ' αντιστοιχία με το ωμόμετρο τύπου σειράς, όταν θέλουμε να μετρήσουμε μία αντίσταση πραγματικής τιμής  $R_x$ , η μέτρηση που μας δίνει το ωμόμετρο τύπου σειράς θα είναι

$\frac{R_x R_{\omega\mu\omicron}}{(R_x + R_{\omega\mu\omicron})}$ . Άρα το σχετικό σφάλμα της μέτρησης θα είναι:

$$\left| \frac{R_{\varepsilon\nu\delta} - R_{\pi\chi\gamma}}{R_{\varepsilon\nu\delta}} \right| = \left| \frac{\frac{R_x R_{\omega\mu\omicron}}{(R_x + R_{\omega\mu\omicron})} - R_x}{\frac{R_x R_{\omega\mu\omicron}}{(R_x + R_{\omega\mu\omicron})}} \right| = \left| -\frac{R_x^2}{R_x R_{\omega\mu\omicron}} \right| = \left| -\frac{R_x}{R_{\omega\mu\omicron}} \right| \quad (8.15)$$

Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι για συγκεκριμένο ωμόμετρο παράλληλου τύπου, το σχετικό σφάλμα μέτρησης αντίστασης  $R_x$  θα είναι μικρό αν η αντίσταση αυτή είναι μικρή. Άρα η χρήση του ωμομέτρου παράλληλου τύπου ενδείκνυται για μέτρηση μικρών αντιστάσεων.