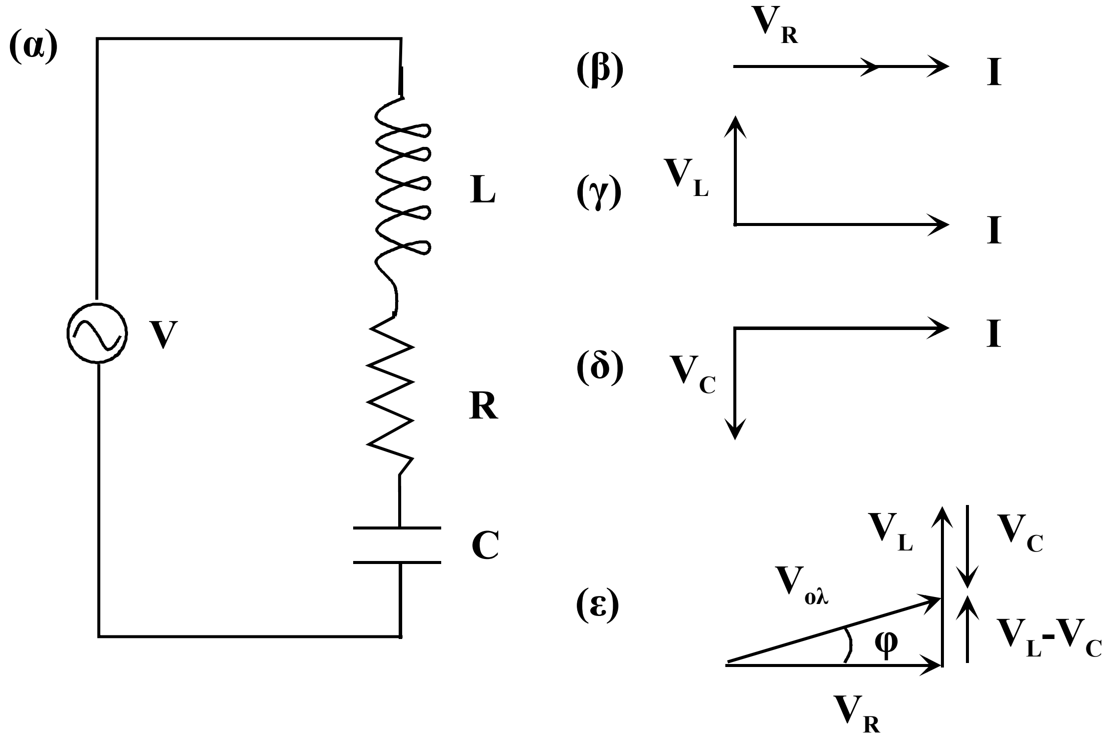
Κεφάλαιο 12ο

Συντονισμός

12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τα κυκλώματα RL και RC στο εναλλασσόμενο. Ας δούμε τώρα την συμπεριφορά ενός κυκλώματος RLC σε σειρά. Έστω το κύκλωμα του



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

σχήματος 12.1α αποτελούμενο από πηνίο L, ωμική αντίσταση R, χωρητικότητα C και πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$. Αν υποθέσουμε ότι το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα I, η τάση στα άκρα της ωμικής αντίστασης θα είναι συμφασική με το ρεύμα (σχήμα 12.1β), η τάση στα άκρα της αυτεπαγωγής θα προηγείται του ρεύματος κατά π/2 (σχήμα 12.1γ) και η τάση στα άκρα της χωρητικότητας θα καθυστερεί σε σχέση με το ρεύμα κατά π/2 (σχήμα 12.1δ). Αν το ρεύμα I περιγράφεται από την εξίσωση $I=I_0e^{j\omega t}$, ο νόμος τάσεων Kirchhoff για το κύκλωμα θα δώσει:

$$V_0e^{j\omega t}-L\frac{di}{dt}-\frac{1}{C}\int idt=iR \Rightarrow V_0e^{j\omega t}-j\omega LI_0e^{j\omega t}-\frac{1}{j\omega C}I_0e^{j\omega t}=RI_0e^{j\omega t} \qquad (12.1)$$

Αν λύσουμε την εξίσωση (12.1) ως προς το I_0 θα βρούμε:

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \qquad (12.2)$$

Επομένως το ρεύμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$I = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\omega t-\varphi} \qquad (12.3)$$

όπου φ γωνία τέτοια ώστε: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ (12.4)

Βλέπουμε δηλαδή ότι στο κύκλωμα RLC, η εμπέδηση του κυκλώματος είναι συνδυασμός της ωμικής, της επαγωγικής και της χωρητικής αντίστασης και δίνεται από τη σχέση $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (η μιγαδική μορφή είναι $z=R+j(\omega L-1/\omega C)$), ενώ η τάση και το ρεύμα παρουσιάζουν διαφορά φάσης φ η οποία δίνεται από την σχέση (12.4). Επομένως, αν η επαγωγική αντίσταση είναι μεγαλύτερη από την χωρητική, η τάση θα προηγείται του ρεύματος και το κύκλωμα θα έχει επαγωγική συμπεριφορά ενώ θα έχει χωρητική συμπεριφορά για μεγαλύτερη χωρητική αντίσταση.

Ένας άλλος μαθηματικός τρόπος προσέγγισης του κυκλώματος RLC σε σειρά είναι με διανύσματα. Στο σχήμα 12.1ε παρουσιάζονται τα διανύσματα τάσης για την περίπτωση που στο κύκλωμα υπερισχύει η επαγωγική αντίσταση. Από το σχήμα φαίνεται ότι η ολική τάση δίνεται από τη σχέση:

$$V_{o\lambda} = \sqrt{V_R^2 + \left(V_L - V_C\right)^2} \qquad (12.5)$$

Αν επιπλέον λάβουμε υπόψη ότι $V_{o\lambda}=Iz$, $V_R=IR$, $V_L=Ix_L$ και $V_C=Ix_C$, η σχέση (12.5) μας δίνει την εμπέδηση του κυκλώματος ως εξής:

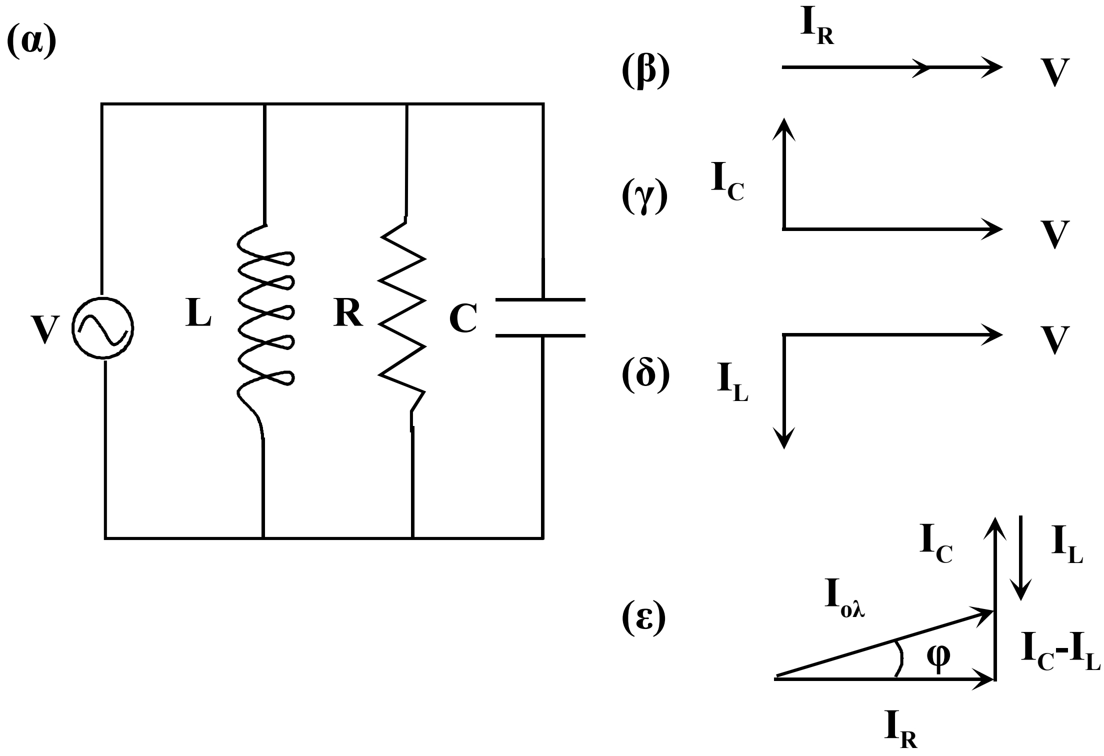
$$Iz = \sqrt{(IR)^2 + \left(Ix_L - Ix_C\right)^2} \Rightarrow z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2} \qquad (12.6)$$

Η τελευταία σχέση είναι πανομοιότυπη με αυτήν που προέκυψε από την μιγαδική ανάλυση. Αντίστοιχα, η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης όπως προκύπτει από το σχήμα 9.1ε είναι ίδια με αυτή της εξίσωσης (9.4):

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (12.7)$$

12.2 Κύκλωμα RLC παράλληλα

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το κύκλωμα RLC παράλληλα. Έστω το κύκλωμα του σχήματος 12.2 αποτελούμενο από πηνίο L, ωμική αντίσταση R, χωρητικότητα C συνδεμένα παράλληλα και πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$. Αν υποθέσουμε ότι η ωμική



Σχήμα 12.2 Κύκλωμα RLC σε σειρά

αντίσταση διαρρέεται από ρεύμα I_R, το πηνίο από ρεύμα I_L και ο πυκνωτής από I_C, το I_R θα είναι συμφασικό με τη τάση (σχήμα 12.2β), το I_C θα προηγείται της τάσης κατά π/2 (σχήμα 12.2γ) ενώ η τάση θα προηγείται του I_L κατά π/2 (σχήμα 12.2δ), δηλαδή:

$$I_R = \frac{V_0}{R}e^0 \qquad I_L = \frac{V_0}{\omega L}e^{-j\pi/2} \qquad I_C = \omega C V_0 e^{j\pi/2} \qquad (12.8)$$

Το ολικό ρεύμα θα δίνεται από το άθροισμα των τριών επί μέρους ρευμάτων:

$$I_{ολ} = I_R + I_L + I_C = \frac{V_0}{R}e^0 + \frac{V_0}{\omega L}e^{-j\pi/2} + \omega C V_0 e^{j\pi/2} \qquad (12.9)$$

Επομένως η εμπέδηση θα δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{z} = \frac{I_{ολ}}{V_0} = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}\, e^{-j\varphi} \qquad (12.10)$$

όπου φ γωνία τέτοια ώστε: $εφφ = \dfrac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}$ (12.11)

Άρα το μέτρο της εμπέδησης σε κύκλωμα RLC παράλληλα δίνεται από: $\dfrac{1}{z} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$. Επίσης, από τις εξισώσεις (12.10) και (12.11) βλέπουμε ότι αν η επαγωγική αντίσταση είναι μεγαλύτερη από την χωρητική, τότε η διαφορά φάσης είναι θα θετική (δηλαδή το ρεύμα θα προηγείται της τάσης) και το κύκλωμα εμφανίζει θα χωρητική συμπεριφορά. Αυτό εξάλλου φαίνεται και από τις εξισώσεις (12.8) όπου τα ρεύματα είναι αντιστρόφως ανάλογα των αντιστάσεων. Μεγαλύτερη επαγωγική αντίσταση σημαίνει μικρότερη επαγωγική συνιστώσα ρεύματος, άρα θα υπερισχύει η χωρητική συνιστώσα.

Ένας άλλος μαθηματικός τρόπος προσέγγισης του κυκλώματος RLC παράλληλα είναι με διανύσματα. Στο σχήμα 12.2ε παρουσιάζονται τα διανύσματα ρεύματος για την περίπτωση που στο κύκλωμα η επαγωγική αντίσταση είναι μεγαλύτερη. Από το σχήμα φαίνεται ότι το ολικό ρεύμα δίνεται από τη σχέση:

$$I_{ο\lambda} = \sqrt{I_R^2 + \left(I_L - I_C\right)^2} \qquad (12.12)$$

Αν επιπλέον λάβουμε υπόψη ότι $I_{ο\lambda}=V/z$, $I_R=V/R$, $I_L=V/x_L$ και $I_C=Vx_C$, η σχέση (12.12) μας δίνει την εμπέδηση του κυκλώματος ως εξής:

$$\frac{V}{z} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{\omega L} - V\omega C\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \qquad (12.13)$$

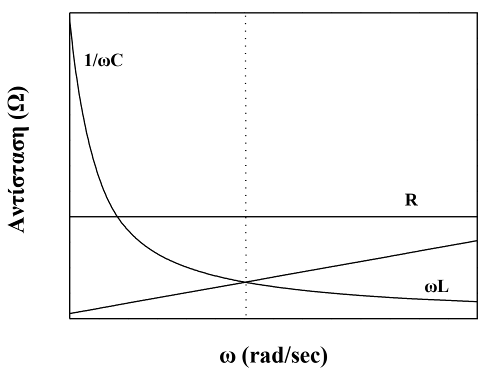
Αντίστοιχα, η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης όπως προκύπτει από το σχήμα 12.2ε είναι:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{1/\omega L - \omega C}{1/R} \qquad (12.14)$$

Οι σχέσεις (12.13) και (12.14) είναι πανομοιότυπες με αυτές που προέκυψαν από την μιγαδική ανάλυση.

12.3 Συντονισμός

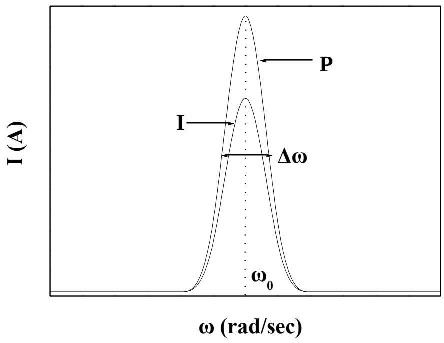
Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, ενώ η ωμική αντίσταση δεν μεταβάλλεται με την γωνιακή συχνότητα, οι αντίστοιχες επαγωγική και χωρητική εξαρτώνται από την γωνιακή συχνότητα του εναλλασσομένου. Η μεν πρώτη αυξάνεται γραμμικά με την γωνιακή συχνότητα ενώ η άλλη ελαττώνεται υπερβολικά όπως φαίνεται στο



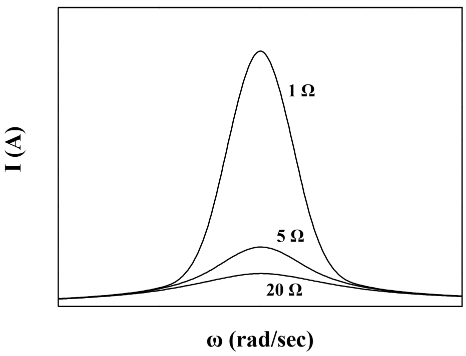
Σχήμα 12.3 Μεταβολή της αντίστασης με τη συχνότητα

σχήμα 12.3 (ισχύουν οι εξισώσεις $x_L=\omega L$, $x_C=1/\omega C$ αντίστοιχα). Αυτό σημαίνει ότι σε κάποια γωνιακή συχνότητα ω_0, η τιμή τους θα εξισώνεται. Επομένως για κυκλώματα RLC σε σειρά ή παράλληλα, όπου η εμπέδηση δίνεται από τις σχέσεις (12.10) και (12.13) αντίστοιχα, στη συχνότητα ω_0 η χωρητική και η επαγωγική αντίσταση θα αλληλοεξουδετερώνονται και το κύκλωμα θα εμφανίζει καθαρή ωμική συμπεριφορά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται συντονισμός και η γωνιακή συχνότητα στην οποία εμφανίζεται δίνεται από την εξίσωση:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (12.15)$$



Σχήμα 12.4 Συντονισμός σε κύκλωμα RLC σε σειρά



Σχήμα 12.5 Επίδραση της R στο συντονισμό

Στην περίπτωση συντονισμού σε κύκλωμα RLC σε σειρά, η εμπέδηση του κυκλώματος γίνεται ελάχιστη και ίση με την ωμική αντίσταση R και η τάση με το ρεύμα είναι συμφασικά. Όπως φαίνεται από το σχήμα 12.3, για γωνιακές συχνότητες μικρότερες από την συχνότητα συντονισμού το κύκλωμα έχει χωρητική συμπεριφορά ενώ για μεγαλύτερες επαγωγική. Λόγω της ελαχιστοποίησης της εμπέδησης, το ρεύμα μεγιστοποιείται και γίνεται ίσο με V/R. Στο σχήμα 12.4 φαίνεται η καμπύλη συντονισμού για κύκλωμα RLC σε σειρά. Όπως φαίνεται, για κάποια τιμή της κυκλικής συχνότητας το ρεύμα παρουσιάζει μία ραγδαία αύξηση, μεγιστοποιείται (συντονισμός) και στη συνέχεια ελαττώνεται. Αν η ωμική αντίσταση γίνει πάρα πολύ μικρή, το ρεύμα γίνεται πολύ μεγάλο (τείνοντας στο άπειρο για R=0) και η καμπύλη συντονισμού πολύ στενή όπως φαίνεται στο σχήμα 12.5. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και η ισχύς του κυκλώματος, όμως η καμπύλη συντονισμού είναι πιο στενή λόγω της τετραγωνικής εξάρτησης της ισχύος από το ρεύμα (σχήμα 12.4). Αν στην καμπύλη συντονισμού της ισχύος ορίσουμε το πλάτος στο μισό της ισχύος Δω, ο λόγος $Q=\omega_0/\Delta\omega$ δίνει το συντελεστή ποιότητας του συντονισμού. Ο συντελεστής αυτός χαρακτηρίζει την οξύτητα του συντονισμού και στενός συντονισμός συνεπάγεται μεγάλη τιμή του Q. Η τιμή του Q δίνεται επίσης από τις σχέσεις:

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 CR}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (12.16)$$

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τον συντονισμό σε σειρά εμφανίζονται φαινόμενα υπέρτασης, δηλαδή, η τάση στα άκρα του πυκνωτή και του πηνίου μπορεί να υπερβεί κατά πολύ την τάση του δικτύου. Ο λόγος της τάσης του πυκνωτή ή του πηνίου προς την τάση τροφοδοσίας ισούται με το συντελεστή ποιότητας, ο οποίος ονομάζεται και συντελεστής υπέρτασης.

Αντίστοιχα, κατά τον συντονισμό κυκλώματος RLC παράλληλα, η εμπέδηση του κυκλώματος γίνεται μέγιστη (για σύνδεση αντιστάσεων παράλληλα, η ολική αντίσταση είναι σε όλες τις περιπτώσεις μικρότερη από την μικρότερη επιμέρους αντίσταση, άρα όταν $z=R$ έχουμε την μέγιστη τιμή αντίστασης) και ίση με την ωμική αντίσταση R και η τάση με το ρεύμα είναι συμφασικά. Λόγω της μεγιστοποίησης της εμπέδησης, το ρεύμα ελαχιστοποιείται και αν δεν υπάρχει ωμική αντίσταση (κύκλωμα LC) το ολικό ρεύμα μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι σε κύκλωμα LC σε συντονισμό, αν και στο πηνίο και τον πυκνωτή κυκλοφορούν ρεύματα που μπορεί να είναι ιδιαίτερα ισχυρά (φαινόμενα υπερέντασης), αυτά αλληλοεξουδετερώνονται και στο κύκλωμα το ολικό ρεύμα είναι μηδέν. Πρακτικά, η ενέργεια στο κύκλωμα κάνει μία ταλάντωση: από ηλεκτρική ενέργεια στον πυκνωτή μετατρέπεται σε μαγνητική στο πηνίο και αντίστροφα, φαινόμενο το οποίο οδηγεί σε εκπομπή ΗΜ ακτινοβολίας (κεραίες). Τέλος, ας σημειωθεί ότι ο συντελεστής ποιότητας δίνεται από τις ίδιες εξισώσεις όπως στο συντονισμό σε σειρά (σχέση 12.16), ο οποίος τώρα ονομάζεται και συντελεστής υπερέντασης.

Παρόμοια είναι η συμπεριφορά σε παράλληλο κύκλωμα LC όπου το πηνίο παρουσιάζει και ωμική συμπεριφορά (πραγματικό πηνίο). Σε αυτή την περίπτωση, η συχνότητα συντονισμού δίνεται από την εξίσωση (12.15) με την προϋπόθεση ότι $\omega L>>R_L$. Επιπλέον, το ρεύμα σε συντονισμό δίνεται από τη σχέση $I=V/R'$ όπου $R'=L/CR_L$.

12.4 Εφαρμογές του συντονισμού

Ο συντονισμός σε σειρά και παράλληλα εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε διάφορες εφαρμογές όπου απαιτείται είτε μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση του ρεύματος. Μεγιστοποίηση του ρεύματος μέσω συντονισμού σε σειρά απαιτείται συνήθως σε δέκτες ΗΜ ακτινοβολίας (π.χ. ραδιόφωνα) όπου ένας οξύς συντονισμός επιτρέπει την καλή λήψη στην συχνότητα συντονισμού ενώ ταυτόχρονα περιορίζει την λήψη σε γειτονικές συχνότητες. Σαν παράδειγμα, τιμές του συντελεστή ποιότητας μεγαλύτερες από 10^3 θεωρούνται κατάλληλες για καλή λήψη σε ραδιοφωνικές συχνότητες.

Αντίστοιχα, η ελαχιστοποίηση του ρεύματος μέσω του συντονισμού παράλληλα οδηγεί στην ανάπτυξη φίλτρων. Η λογική της λειτουργίας ενός τέτοιου φίλτρου είναι ότι τα σήματα με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού μηδενίζονται.

12.5 Παράδειγμα

Πηνίο RL=10 Ω, L=0.1 H συνδέεται σε σειρά με πυκνωτή 200 μF και το κύκλωμα τροφοδοτείται με 220 V/ 50 Hz. Να βρεθούν: το ρεύμα, η τάση του πηνίου, η τάση του πυκνωτή, η συχνότητα συντονισμού, το ρεύμα σε συντονισμό και η τάση πηνίου/πυκνωτή σε συντονισμό.

Αρχικά υπολογίζω τις αντιστάσεις x_L, x_C, την εμπέδηση του πηνίου z_L και την εμπέδηση του κυκλώματος στα 50 Hz. Έχω:

$$x_L = 2\times\pi\times 50\times 0.1 = 31.4\Omega$$

$$z_L = \sqrt{10^2 + 31.4^2} = 33.15\Omega$$

$$x_C = 1/(2\times\pi\times 50\times 200\times 10^{-6}) = 15.9\Omega$$

$$z = \sqrt{10^2 + (31.4 - 15.9)^2} = 18.45\Omega$$

Το ρεύμα θα δίνεται από: I=V/z=220/18.45=12.45A

Η τάση στα άκρα του πηνίου: $V_{πην}=Iz_L$=12.45×33.15=415V

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή: $V_{πυκ}=Ix_C$=12.45×15.9=198V

Η συχνότητα συντονισμού: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.1\times 200\times 10^{-6}} = 224\text{rad/sec}$

Το ρεύμα στο συντονισμό: $I_{συν}$=V/R=220/10=22A

Οι τάσεις πηνίου και πυκνωτή στο συντονισμό:

$$V_{πυκ} = I_{συν}(1/\omega_0 C) = 22\times\frac{1}{224\times 200\times 10^{-6}} = 514.7V$$

$$V_{πην} = I_{συν}\sqrt{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 22\times\sqrt{10^2 + (224\times 0.1)^2}\, 563.5V$$