

## Μάθημα 15<sup>ο</sup>

### Τριφασικά

#### 15.1 Γενικά

Σήμερα, η παραγωγή, μεταφορά, διανομή και χρήση της ηλεκτρικής ενέργειας πραγματοποιείται με τριφασικά δίκτυα, καθώς αυτά παρουσιάζουν σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα αντίστοιχα μονοφασικά. Τα πλεονεκτήματα αυτά αφορούν:

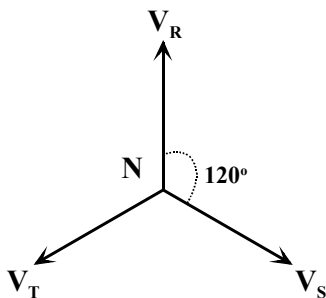
(α) απαιτούνται 25% λιγότερα καλώδια σε τριφασικό δίκτυο απ' ότι σε μονοφασικό για την μεταφορά της ίδια ποσότητας ηλεκτρικής ενέργειας σε ίδια απόσταση και με την ίδια τάση μεταξύ των αγωγών

(β) σε συμμετρικά τριφασικά δίκτυα η ισχύς είναι σταθερή και ίση με την μέση ισχύ, με αποτέλεσμα σταθερή ροπή σε τριφασικούς κινητήρες, που έτσι λειτουργούν χωρίς κραδασμούς. Σε αντίθεση, σε ένα μονοφασικό δίκτυο υπάρχει μια σταθερή και μία ημιτονοειδής συνιστώσα ισχύος, με αποτέλεσμα, ο άξονας σε μονοφασικούς κινητήρες να δέχεται δυσμενή φόρτιση.

(γ) οι τριφασικές μηχανές έχουν καλύτερο βαθμό απόδοσης και γενικότερα καλύτερα χαρακτηριστικά λειτουργίας από τις μονοφασικές μηχανές.

Γενικά, ένα τριφασικό δίκτυο βασίζεται σε μία τριφασική γεννήτρια. Αυτή λειτουργεί όμοια με μια απλή γεννήτρια εναλλασσομένου, όμως διαθέτει αντί για ένα τρία όμοια τυλίγματα τοποθετημένα σε γωνία 60° μεταξύ τους. Με βάση την κατασκευή αυτή, η γεννήτρια θα δημιουργεί λόγω επαγωγής τρεις ίδιες τάσεις οι οποίες θα διαφέρουν σε φάση κατά 120° μεταξύ τους (συμμετρικό τριφασικό σύστημα), δηλαδή:

$$\begin{array}{ll} V_R = V_0 \eta \mu \omega t & V_R = V_0 \eta \mu \omega t \\ V_S = V_0 \eta \mu (\omega t - 120^\circ) & \eta \\ V_T = V_0 \eta \mu (\omega t + 120^\circ) & V_S = V_0 \eta \mu (\omega t + 120^\circ) \\ & V_T = V_0 \eta \mu (\omega t - 120^\circ) \end{array}$$

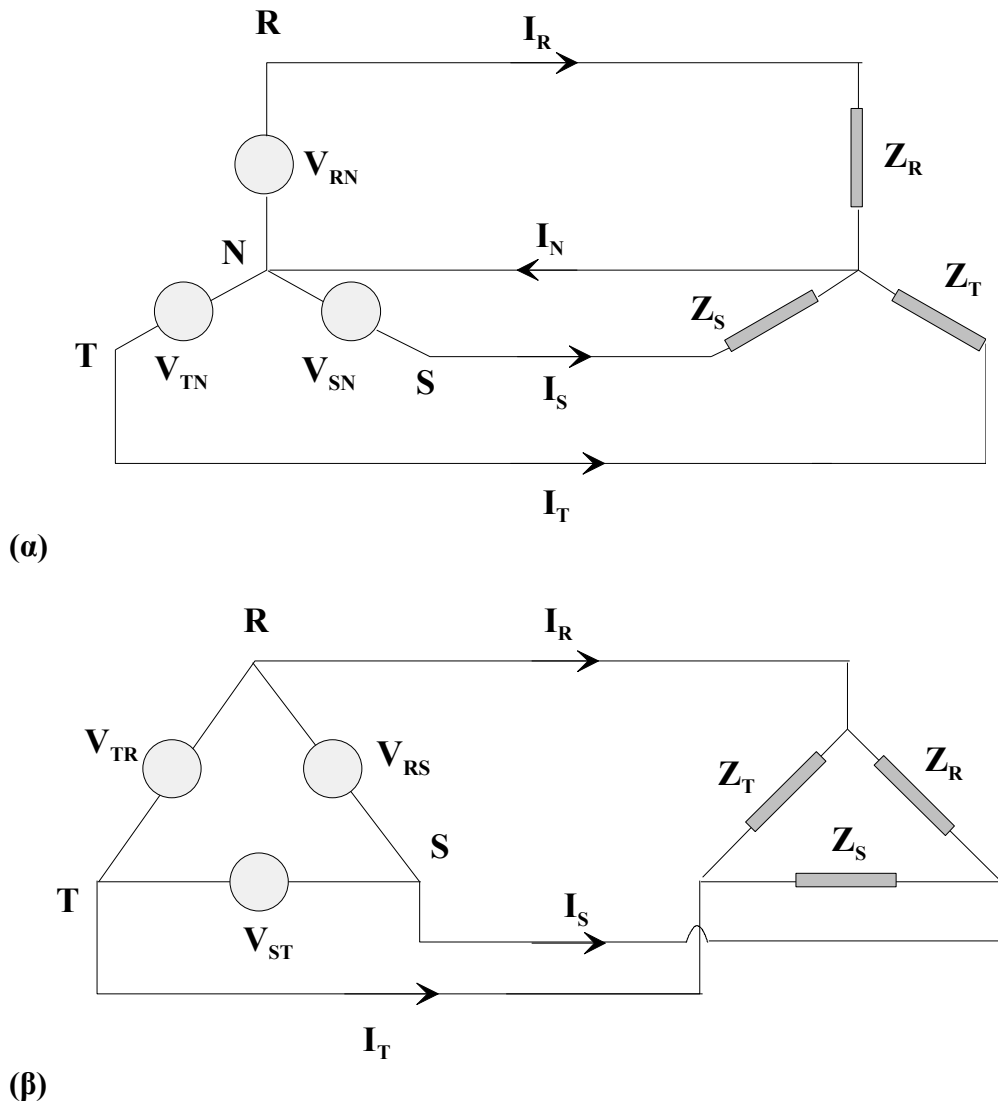


Σχήμα 15.1 Τάσεις σε τριφασικό

Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε αριστερόστροφη περιστροφή του δρομέα, δηλαδή αντίθετη από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (ευθύ συμμετρικό τριφασικό σύστημα) ενώ η δεύτερη στην αντίστοιχη δεξιόστροφη (ανάστροφο συμμετρικό τριφασικό σύστημα).

Υπάρχουν δύο τρόποι σύνδεσης των περιελίξεων σε μία γεννήτρια: η σύνδεση σε αστέρα και η σύνδεση

σε τρίγωνο. Η σύνδεση σε αστέρα παρουσιάζεται στο Σχήμα 15.2α και κύριο



Σχήμα 15.2 Σύνδεση γεννήτριας σε (α) αστέρα και (β) τρίγωνο

χαρακτηριστικό της είναι ότι οι περιελίξεις διαθέτουν ένα κοινό σημείο N (ουδέτερος), με αποτέλεσμα την δυνατότητα χρήσης δύο τάσεων, αυτής μεταξύ δύο φάσεων και αυτής μεταξύ μιας φάσης και του ουδέτερου. Παράλληλα, η σύνδεση με φορτία απαιτεί τέσσερις αγωγούς, καθώς, εκτός από τα ρεύματα κάθε φάσης (οι αγωγοί που φεύγουν από τους ακροδέκτες R, S, T ονομάζονται αγωγοί φάσεων) υπάρχει και το ρεύμα του ουδέτερου (κανονικά απαιτούνται τρεις αγωγοί επιστροφής, οι οποίοι αντικαθίστανται από ένα όπως θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα).

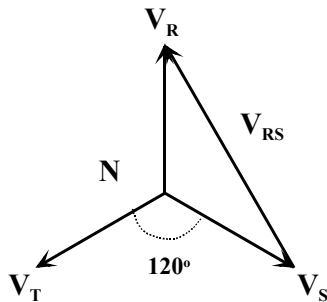
Αντίστοιχα, στην σύνδεση τριγώνου, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 15.2β, το τέλος κάθε τυλιγματος στη γεννήτρια αποτελεί αρχή του επόμενου, με τα σημεία σύνδεσης των τυλιγμάτων να είναι ακροδέκτες της γεννήτριας. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει ουδέτερος και η γεννήτρια παρέχει μόνο την τάση μεταξύ δύο φάσεων.

Στην πράξη, οι περιελίξεις των τριφασικών γεννητριών συνδέονται σε αστέρα καθώς η διάταξη τριγώνου μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερες απώλειες, λόγω των ρευμάτων που προκαλούνται από ασυμμετρία φορτίου. Σε σχέση με το φορτίο, αυτό μπορεί να είναι συνδεδεμένο είτε σε αστέρα είτε σε τρίγωνο.

### 15.2 Ορισμοί

Ας δούμε τώρα τους ορισμούς των ηλεκτρικών μεγεθών που χρησιμοποιούνται σε τριφασικά συστήματα, με τους ορισμούς να ισχύουν είτε το φορτίο είναι συμμετρικό είτε ασύμμετρο.

- (α) Φασική τάση  $V_\phi$ : είναι η τάση μεταξύ μιας φάσης και του ουδέτερου
- (β) Πολική τάση  $V_\pi$ : είναι η τάση μεταξύ δύο φάσεων
- (γ) Φασικό ρεύμα  $I_\phi$ : είναι το ρεύμα στον καταναλωτή
- (δ) Πολικό ρεύμα  $I_\pi$ : είναι το ρεύμα της γραμμής



Σχήμα 15.3 Σχέση πολικής-φασικής τάσης

Με βάση αυτούς τους ορισμούς και το Σχήμα 15.2, είναι εμφανές ότι οι σχέσεις που συνδέουν τα φασικά με τα πολικά μεγέθη εξαρτάται από την σύνδεση της γεννήτριας κατά αστέρα ή τρίγωνο. Επιπλέον, θεωρώντας ότι η γεννήτρια είναι συνδεδεμένη κατά αστέρα, η σύνδεση του φορτίου επίσης επηρεάζει την σχέση μεταξύ πολικών και φασικών μεγεθών. Σαν παράδειγμα, ας εξετάσουμε την σχέση μεταξύ πολικής και φασικής τάσης. Από το Σχήμα 15.3 έχουμε:

$$\dot{V}_{RS} = \dot{V}_R - \dot{V}_S \quad (15.1)$$

$$|V_{RS}| = \sqrt{V_R^2 + V_S^2 - 2V_R V_S \cos 120^\circ} = \sqrt{2V_0^2 - 2V_0^2(-1/2)} = \sqrt{3V_0^2} = V_0 \sqrt{3}$$

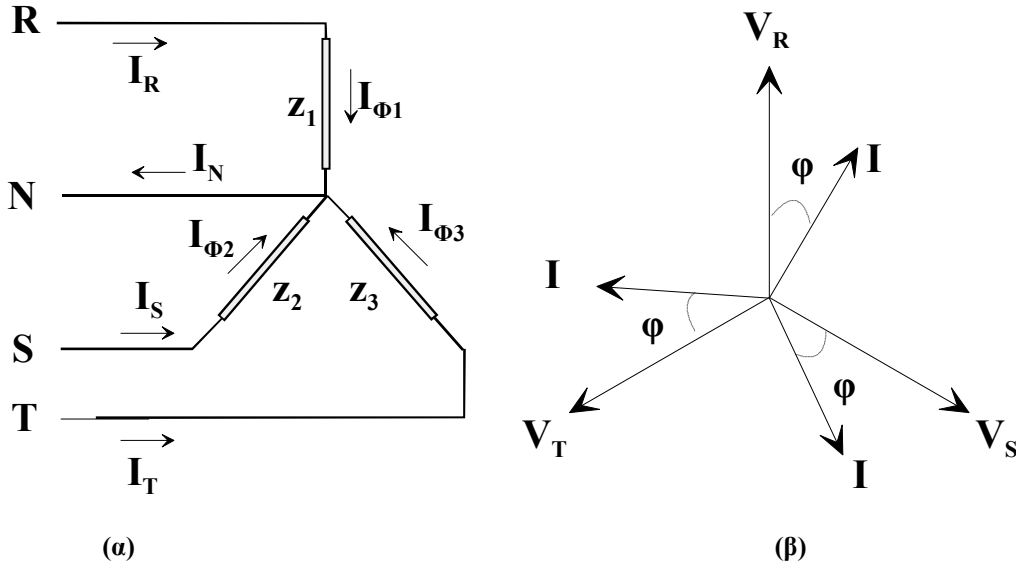
Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τις συνδέσεις του φορτίου σε αστέρα και τρίγωνο αντίστοιχα.

### 15.3 Σύνδεση αστέρα

Στη σύνδεση αστέρα με ουδέτερο, κάθε καταναλωτής είναι συνδεδεμένος μεταξύ φάσης και ουδέτερου (Σχήμα 15.4α), δηλαδή εφαρμόζεται σε αυτόν η φασική τάση  $V_\phi$ , η οποία για το δίκτυο μας είναι 220 V. Παράλληλα, κάθε πολικό ρεύμα εισέρχεται σε ένα καταναλωτή. Επομένως, τα φασικά ρεύματα είναι ίδια με τα πολικά, ενώ το ρεύμα στον ουδέτερο είναι ίσο και αντίθετο με το άθροισμα των φασικών ρευμάτων:

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{\phi 1}, \dot{I}_S = \dot{I}_{\phi 2}, \dot{I}_T = \dot{I}_{\phi 3} \quad (15.2)$$

$$\dot{I}_N = -(\dot{I}_{\varphi 1} + \dot{I}_{\varphi 2} + \dot{I}_{\varphi 3}) \quad (15.3)$$



Σχήμα 15.4 (α) Σύνδεση φορτίου σε αστέρα με ουδέτερο, (β) διάγραμμα φάσεων σε συμμετρικό αστέρα

Το άθροισμα των φασικών τάσεων είναι μηδέν, όπως προκύπτει από:

$$\begin{aligned} V_{\varphi 1} + V_{\varphi 2} + V_{\varphi 3} &= V_0 \eta \mu(\omega t) + V_0 \eta \mu(\omega t - 120^\circ) + V_0 \eta \mu(\omega t + 120^\circ) = \\ &= V_0 \left[ \eta \mu(\omega t) + 2 \eta \mu \frac{\omega t - 120^\circ + \omega t + 120^\circ}{2} \sigma \nu \nu \frac{\omega t - 120^\circ - (\omega t + 120^\circ)}{2} \right] = \quad (15.4) \\ &= V_0 \left[ \eta \mu(\omega t) + 2 \eta \mu \frac{2\omega t}{2} \sigma \nu \nu \frac{-240^\circ}{2} \right] = V_0 \left[ \eta \mu(\omega t) + 2 \left( -\frac{1}{2} \right) \eta \mu(\omega t) \right] = 0 \end{aligned}$$

Αν ο αστέρας είναι συμμετρικός, δηλαδή  $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$ , τότε  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$  και θα ισχύει:

$$|I_R| = |I_S| = |I_T| = |I_{\varphi 1}| = |I_{\varphi 2}| = |I_{\varphi 3}| = I = V_R / Z \quad (15.5)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi = \text{τοξεφ}[(X_L - X_C) / R] \quad (15.6)$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή θα ισχύει  $I_N = 0$  καθώς:

$$\begin{aligned} I_N &= I_{\varphi 1} + I_{\varphi 2} + I_{\varphi 3} = I \eta \mu(\omega t - \varphi) + I \eta \mu(\omega t - \varphi - 120^\circ) + I \eta \mu(\omega t - \varphi + 120^\circ) = \\ &= I \left[ \eta \mu(\omega t - \varphi) + 2 \eta \mu \frac{\omega t - 120^\circ - \varphi + \omega t - \varphi + 120^\circ}{2} \sigma \nu \nu \frac{\omega t - \varphi - 120^\circ - (\omega t - \varphi + 120^\circ)}{2} \right] = \\ &= I \left[ \eta \mu(\omega t - \varphi) + 2 \eta \mu \frac{2(\omega t - \varphi)}{2} \sigma \nu \nu \frac{-240^\circ}{2} \right] = I \left[ \eta \mu(\omega t - \varphi) + 2 \left( -\frac{1}{2} \right) \eta \mu(\omega t - \varphi) \right] = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή, σε συμμετρικό αστέρα, το άθροισμα των φασικών (αλλά και των πολικών) ρευμάτων είναι μηδέν. Στο πλαίσιο αυτό, ο ουδέτερος μπορεί να παραληφθεί. Σε κάθε περίπτωση βέβαια, ο ουδέτερος χρησιμοποιείται καθώς τα φορτία δεν είναι πάντα συμμετρικά, όμως, δεν απαιτούνται τρεις αγωγοί επιστροφής καθώς το

συνολικό ρεύμα που επιστρέφει είναι σχετικά μικρό. Έτσι, υπάρχει μόνο μία επιστροφή και μάλιστα με καλώδιο μικρής διαμέτρου που συνεπάγεται οικονομία.

Στην περίπτωση όμως μη συμμετρικού φορτίου, οι σχέσεις φασικών και πολικών μεγεθών είναι διαφορετικές. Επειδή  $|Z_1| \neq |Z_2| \neq |Z_3|$ , τότε  $\varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$  και

$$|I_R| \neq |I_S| \neq |I_T|, |I_{\varphi 1}| \neq |I_{\varphi 2}| \neq |I_{\varphi 3}| \Rightarrow I_N \neq 0 \quad (15.7)$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή το ρεύμα του ουδέτερου δεν είναι μηδέν και το μέτρο και η φάση του πρέπει να υπολογιστούν διανυσματικά ή με μιγαδικούς. Φυσικά ισχύουν άλλες σχέσεις όπως:

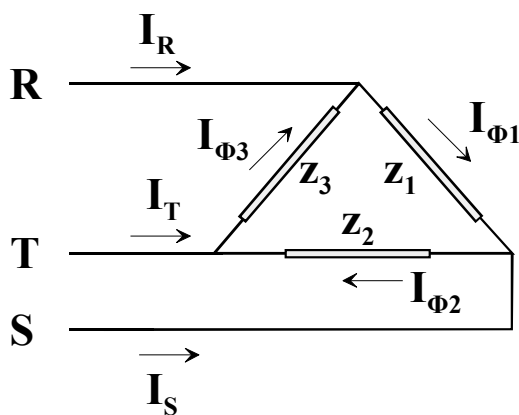
$$|V_{\pi}| = \sqrt{3} |V_{\varphi}|, |V_{\varphi 1}| = |V_{\varphi 2}| = |V_{\varphi 3}| \quad (15.8)$$

$$\dot{V}_{\varphi 1} + \dot{V}_{\varphi 2} + \dot{V}_{\varphi 3} = 0, |I_R| = |I_{\varphi 1}|, |I_S| = |I_{\varphi 2}|, |I_T| = |I_{\varphi 3}| \quad (15.9)$$

Τέλος, στην περίπτωση ασύμμετρου αστέρα τριών αγωγών (χωρίς ουδέτερο), τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα καθώς δημιουργείται πρόβλημα στις φασικές τάσεις. Λόγω της έλλειψης ουδέτερου και της ασυμμετρίας του φορτίου ισχύει ταυτόχρονα:

$$\dot{I}_{\varphi 1} + \dot{I}_{\varphi 2} + \dot{I}_{\varphi 3} = 0 \text{ και } |I_{\varphi 1}| \neq |I_{\varphi 2}| \neq |I_{\varphi 3}| \quad (15.10)$$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, αν και οι πολικές τάσεις είναι ίσες, οι φασικές να μην είναι:  $|V_{\varphi 1}| \neq |V_{\varphi 2}| \neq |V_{\varphi 3}|$



Σχήμα 15.5 Σύνδεση τριγώνου

#### 15.4 Σύνδεση τριγώνου

Στη σύνδεση τριγώνου, κάθε καταναλωτής είναι συνδεδεμένος μεταξύ δύο φάσεων, δηλαδή οι φασικές τάσεις είναι ίσες με τις πολικές. Όμως, τα φασικά ρεύματα δεν είναι ίδια με τα πολικά, και δεν υπάρχει ουδέτερος. Σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα από την συμμετρία του φορτίου ισχύουν οι σχέσεις:

$$\dot{V}_{\varphi 1} + \dot{V}_{\varphi 2} + \dot{V}_{\varphi 3} = \dot{V}_{RS} + \dot{V}_{ST} + \dot{V}_{TR} = 0 \quad (15.11)$$

$$\dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = 0 \quad (15.12)$$

Οι τελευταίες σχέσεις μπορούν να προκύψουν πολύ εύκολα διανυσματικά καθώς, για παράδειγμα στην περίπτωση των ρευμάτων ισχύει:

$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= \dot{I}_{\varphi 1} - \dot{I}_{\varphi 3} \\ \dot{I}_S &= \dot{I}_{\varphi 2} - \dot{I}_{\varphi 1} \Rightarrow \dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = (\dot{I}_{\varphi 1} - \dot{I}_{\varphi 3}) + (\dot{I}_{\varphi 2} - \dot{I}_{\varphi 1}) + (\dot{I}_{\varphi 3} - \dot{I}_{\varphi 2}) = 0 \quad (15.13) \\ \dot{I}_T &= \dot{I}_{\varphi 3} - \dot{I}_{\varphi 2} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση συμμετρικού φορτίου θα ισχύει:  $|Z_1|=|Z_2|=|Z_3|$ ,  $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3$ ,  $|I_R|=|I_S|=|I_T|=|I_\pi|$  και  $|I_{\varphi 1}|=|I_{\varphi 2}|=|I_{\varphi 3}|=|I_\phi|$ . Τότε, η σχέση φασικών με πολικών ρευμάτων θα είναι:

$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= \dot{I}_{\varphi 1} - \dot{I}_{\varphi 3} \\ |I_R| &= \sqrt{I_\phi^2 + I_\phi^2 - 2I_\phi I_\phi \cos 120^\circ} = \sqrt{3I_\phi^2} = I_\phi \sqrt{3} \end{aligned} \quad (15.14)$$

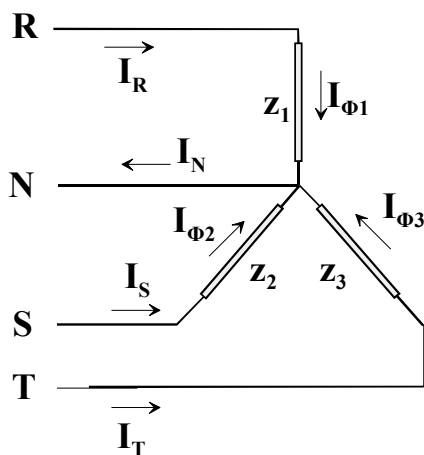
Παράλληλα, θα ισχύει:

$$\dot{I}_{\varphi 1} + \dot{I}_{\varphi 2} + \dot{I}_{\varphi 3} = 0$$

Αν όμως το φορτίο δεν είναι συμμετρικό, τότε θα ισχύουν:

$$|I_{\varphi 1}| \neq |I_{\varphi 2}| \neq |I_{\varphi 3}|, |I_R| \neq |I_S| \neq |I_T|, \dot{I}_{\varphi 1} + \dot{I}_{\varphi 2} + \dot{I}_{\varphi 3} \neq 0$$

## 15.5 Παραδείγματα



### 15.5.1 Παράδειγμα 1

Έστω το φορτίο του σχήματος όπου:

$$Z_1: R=10 \Omega$$

$$Z_2: R=7.79 \Omega \text{ και } C=70.8 \text{ mF}$$

$$Z_3: R=9.53 \Omega \text{ και } L=17.5 \text{ mH}$$

Αν έχουμε τροφοδοσία στα 380/220 V, 50 Hz να βρεθούν τα ρεύματα του κυκλώματος.

Οι εμπεδήσεις θα δίνονται από:

$$\dot{Z}_1 = (10 + j0) = (10 \angle 0^\circ) \Omega$$

$$\dot{Z}_2 = (7.79 - j4.5) = (9 \angle -30^\circ) \Omega$$

$$\dot{Z}_3 = (9.53 + j5.5) = (11 \angle 30^\circ) \Omega$$

Αν θεωρήσω τάσεις  $\dot{V}_R = (220 \angle 0^\circ) \text{V}$ ,  $\dot{V}_S = (220 \angle -120^\circ) \text{V}$ ,  $\dot{V}_T = (220 \angle 120^\circ) \text{V}$ , τότε για τα ρεύματα θα ισχύει:

$$\dot{I}_{\varphi 1} = \frac{\dot{V}_R}{\dot{Z}_1} = \frac{220 \angle 0}{10 \angle 0} = (22 \angle 0)A = (22 + j0)A$$

$$\dot{I}_{\varphi 2} = \frac{\dot{V}_S}{\dot{Z}_2} = \frac{220 \angle -120}{9 \angle -30} = (22.44 \angle -90)A = (0 - j22.44)A$$

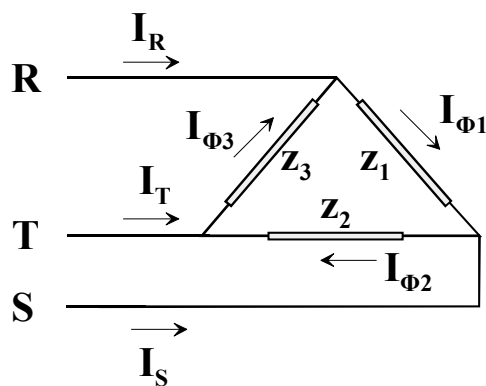
$$\dot{I}_{\varphi 3} = \frac{\dot{V}_T}{\dot{Z}_3} = \frac{220 \angle 120}{11 \angle 30} = (20 \angle 90)A = (0 + j20)A$$

Με βάση τα παραπάνω ρεύματα, το ρεύμα στον ουδέτερο θα είναι:

$$\dot{I}_N = -(\dot{I}_{\varphi 1} + \dot{I}_{\varphi 2} + \dot{I}_{\varphi 3}) = -[22 + j(20 - 22.44)] = -22 + j2.44 \Rightarrow$$

$$\dot{I}_N = (22.13 \angle 173.67)A$$

### 15.5.2 Παράδειγμα 2



Έστω το φορτίο του σχήματος όπου:

$Z_1$ :  $R=10 \Omega$  και  $L=31.8 \text{ mH}$

$Z_2$ :  $R=8.66 \Omega$  και  $L=15.9 \text{ mH}$

$Z_3$ :  $R=12 \Omega$  και  $L=50.9 \text{ mH}$

Αν έχουμε τροφοδοσία στα  $380/220 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$  να βρεθούν τα ρεύματα.

Θα ισχύει:

$$\dot{Z}_1 = (10 + j10) = (14.14 \angle 45) \Omega$$

$$\dot{Z}_2 = (8.66 + j5) = (10 \angle 30) \Omega$$

$$\dot{Z}_3 = (12 + j16) = (20 \angle 53) \Omega$$

Αν θεωρήσω τάσεις  $V_{RS} = (380 \angle 0) \text{ V}$ ,  $V_{ST} = (380 \angle -120) \text{ V}$ ,  $V_{TR} = (380 \angle 120) \text{ V}$ ,

τότε για τα φασικά ρεύματα θα ισχύει:

$$\dot{I}_{\varphi 1} = \frac{\dot{V}_{RS}}{\dot{Z}_1} = \frac{380 \angle 0}{14.14 \angle 45} = (26.87 \angle -45)A = (19 - j19)A$$

$$\dot{I}_{\varphi 2} = \frac{\dot{V}_{ST}}{\dot{Z}_2} = \frac{380 \angle -120}{10 \angle 30} = (38 \angle -150)A = (-32.91 - j19)A$$

$$\dot{I}_{\varphi 3} = \frac{\dot{V}_{TR}}{\dot{Z}_3} = \frac{380 \angle 120}{20 \angle 53} = (19 \angle 67)A = (7.42 + j17.49)A$$

Αντίστοιχα, για τα πολικά ρεύματα θα έχουμε:

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{\varphi 1} - \dot{I}_{\varphi 3} = (19 - 7.42) + j(-19 - 17.49) = 11.58 - j36.47 = (38.28 \angle -72.4)A$$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_{\varphi 2} - \dot{I}_{\varphi 1} = (-32.91 - 19) + j(-19 + 19) = -51.91 + j0 = (51.91 \angle 180)A$$

$$\dot{I}_T = \dot{I}_{\varphi 3} - \dot{I}_{\varphi 2} = (7.42 + 32.91) + j(17.49 + 19) = 40.33 + j36.49 = (54.39 \angle 42.1)A$$