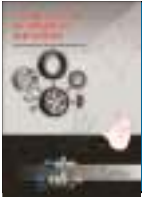


ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΜΟΡΦΗΣ FERGUSON, BEZIER, B-SPLINES





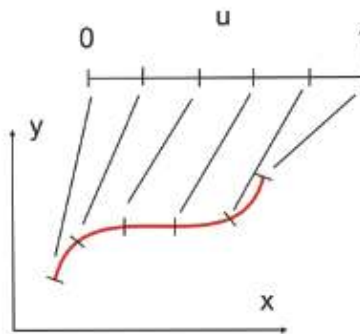
ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

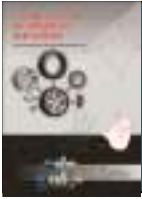
Παραμετρική εξίσωση:

εξισώσεις της μορφής $x = X(u)$, $y = Y(u)$ και $z = Z(u)$, $u \in [0,1]$

- Ελεύθερες εξισώσεις κατά x , y και z .
- Άμεσος υπολογισμός σημείων πάνω στην καμπύλη.
- Αναπαριστάνει κλειστές καμπύλες ή καμπύλες με πολλαπλές τιμές (αυτοτεμνόμενες).
- Υπολογίζονται τα διανυσματικά μεγέθη, π.χ. εφαπτόμενο διάνυσμα.
- Είναι ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων με αποτέλεσμα να υλοποιούνται εύκολα οι μετασχηματισμοί και η μεταφορά τους σε άλλο σύστημα συντεταγμένων.
- Μειονέκτημα: δεν μπορεί να επαληθευτεί εύκολα, εάν ένα τυχαίο σημείο ανήκει σε μια καμπύλη.
- διανυσματική απεικόνιση: $r = C(u)$
- r είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου στην καμπύλη για την τιμή του u ,
- $C(u)$ η διανυσματική συνάρτηση ορισμού της καμπύλης ως προς u .

Εξήγηση της παραμετρικής αναπαράστασης επίπεδης καμπύλης.



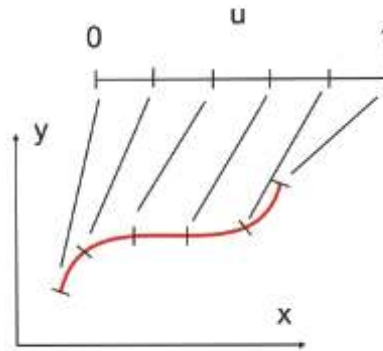


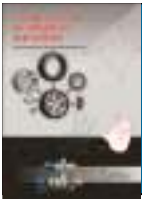
ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Σ' ένα σύστημα CAD χρησιμοποιείται η παραμετρική αναπαράσταση, αφού υλοποιούνται εύκολα λειτουργίες όπως:

- σχεδίαση ενός ορισμένου τμήματος της καμπύλης,
- υπολογισμός διαδοχικών σημείων πάνω στην καμπύλη,
- προσδιορισμός ενός ορισμένου σημείου πάνω στην καμπύλη
- Ενώ το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή, η εξακρίβωση εάν ένα σημείο ανήκει σε μια καμπύλη, δεν είναι εύκολο
- Δεν είναι μονοσήμαντη
- Κύκλος $x(u) = \cos(u)$, $y(u) = \sin(u)$, με $0 \leq u \leq \pi/2$
- Ή $x(u) = (1-u^2)/(1+u^2)$, $y(u)=2u/(1+u^2)$, με $0 \leq u \leq 1$

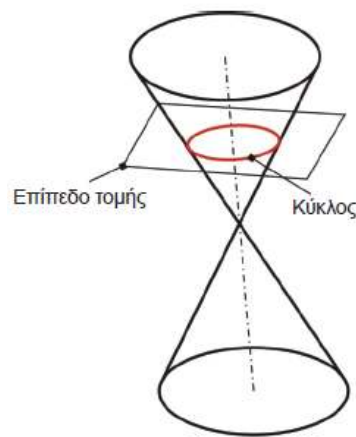
Εξήγηση της παραμετρικής αναπαράστασης επίπεδης καμπύλης.



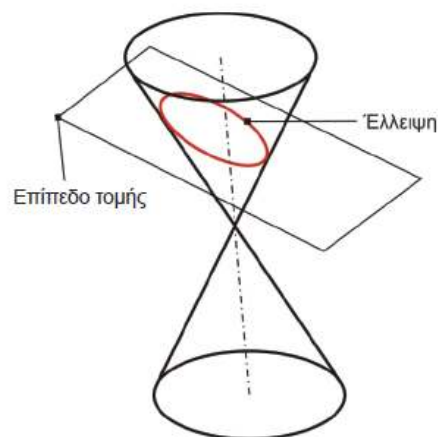


ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

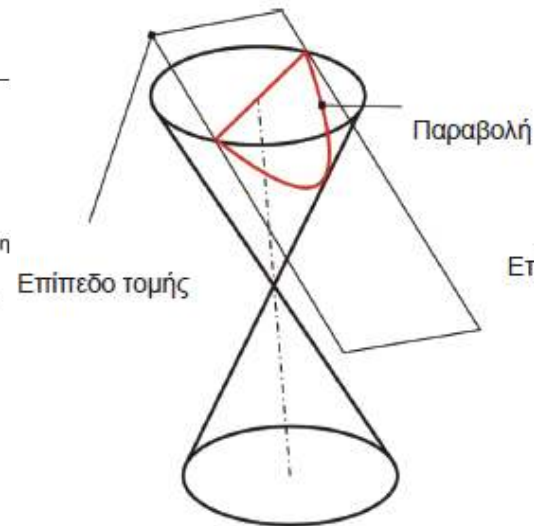
Παραγωγή κωνικών τομών, από την τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο. (α) Κύκλος. (β) Έλλειψη. (γ) Παραβολή. (δ) Υπερβολή.



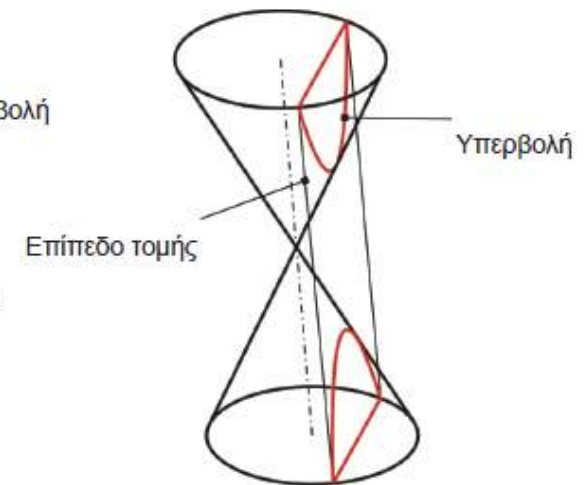
(α)



(β)

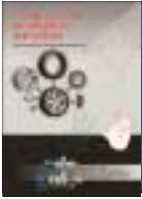


(γ)



(δ)

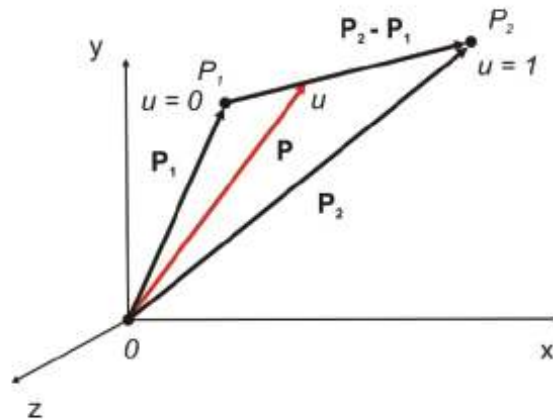


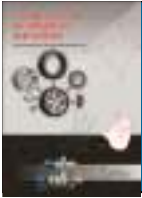


ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΗ

- Παραμετρική εξίσωση:
- $P = P_1 + u(P_2 - P_1)$
- Η εφαπτόμενη διεύθυνση P' και το μοναδιαίο διάνυσμα n :
- $P' = P_2 - P_1$
- $n = (P_2 - P_1) / l$ (l το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος).
- Καταχωρούνται τα δύο άκρα της γραμμής, το είδος, το πάχος, το χρώμα, το επίπεδο σχεδίασης, κ.λπ.

Παραμετρικός ορισμός γραμμής από δύο σημεία.





ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΤΟΞΟ

Κύκλος ή τόξο, στο επίπεδο x-y σε ύψος zc, κέντρο το (xc, yc), και ακτίνα r:

$$x = x_c + r \cos u$$

$$y = y_c + r \sin u$$

$$z = z_c$$

- Πεδίο ορισμού παραμέτρου:
- για πλήρη κύκλο $0 \leq u \leq 2\pi$
- για τόξο κύκλου $u_s \leq u < u_e$
- Καταχωρείται η ακτίνα, οι συντεταγμένες του κέντρου του, οι γωνίες αρχής και τέλους του τόξου, το είδος της γραμμής, το πάχος, το χρώμα, το επίπεδο σχεδίασης, κ.λπ.

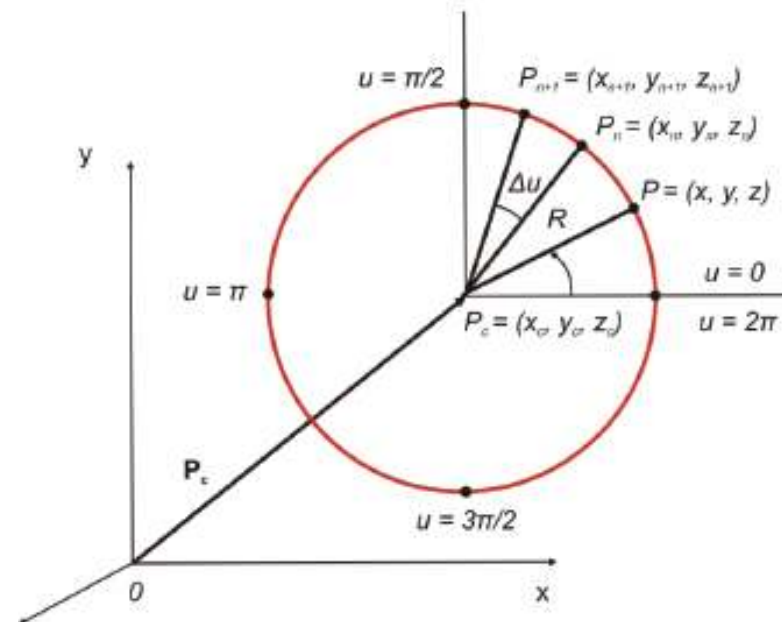
Υπολογισμός σημείων στην περιφέρεια του κύκλου (πεπερασμένες διαφορές)

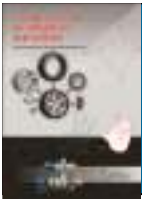
$$x_{n+1} = x_c + (x_n - x_c) \cos \Delta u - (y_n - y_c) \sin \Delta u$$

$$y_{n+1} = y_c + (y_n - y_c) \cos \Delta u - (x_n - x_c) \sin \Delta u$$

$$z_{n+1} = z_n$$

Παραμετρικός ορισμός κύκλου





ΕΛΛΕΙΨΗ

Έλλειψη στο επίπεδο xy , με κέντρο το σημείο (x_c, y_c) , με τον κύριο άξονα κατά τη διεύθυνση x , με μήκος A , και το δευτερεύοντα κατά τη διεύθυνση y και με μήκος B

$$x = x_c + A \cos u$$

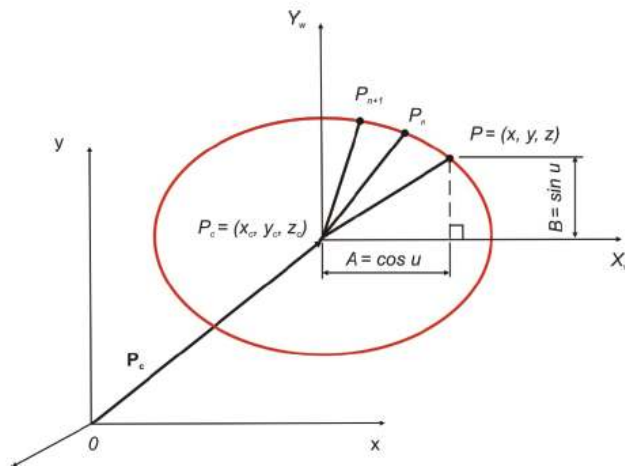
$$y = y_c + B \sin u$$

$$z = z_c$$

Υπολογισμός σημείων πάνω στην έλλειψη

$$x_{n+1} = x_c + (x_n - x_c) \cos \Delta u - \frac{A}{B} (y_n - y_c) \sin \Delta u$$

$$y_{n+1} = y_c + (y_n - y_c) \cos \Delta u - \frac{A}{B} (x_n - x_c) \sin \Delta u$$



Εάν ο κύριος άξονας σχηματίζει γωνία α , ως προς τον άξονα x ,

$$x = x_c + A \cos u \cos \alpha - B \sin u \sin \alpha$$

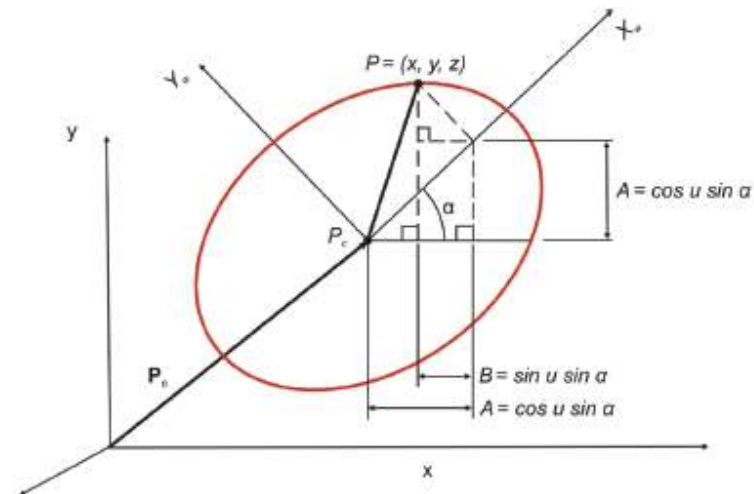
$$y = y_c + A \cos u \sin \alpha + B \sin u \cos \alpha$$

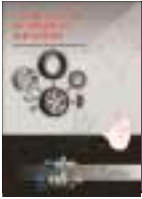
$$z = z_c$$

$$x_{n+1} = x_c + A \cos(u_n + \Delta u) \cos \alpha - B \sin(u_n + \Delta u) \sin \alpha$$

$$y_{n+1} = y_c + A \cos(u_n + \Delta u) \sin \alpha + B \sin(u_n + \Delta u) \cos \alpha$$

$$z_{n+1} = z_n$$





ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Η γενική εξίσωση παραβολής που έχει γωνία κλίσης α , ως προς τον άξονα X ,

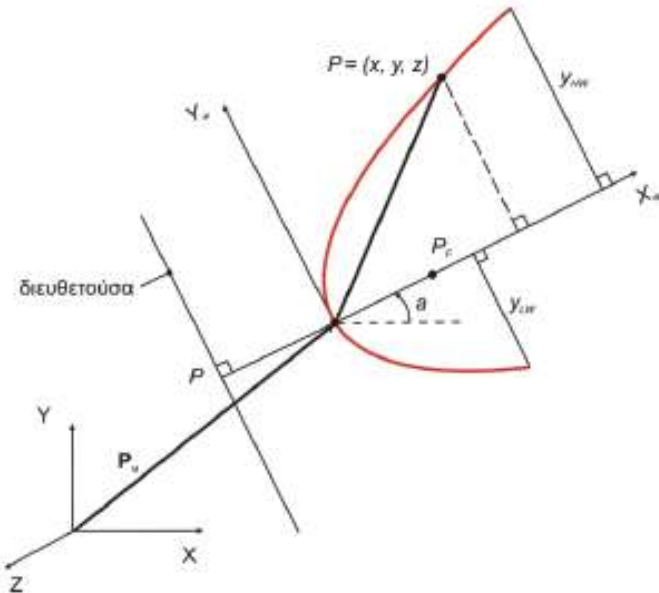
$$x = x_u + Au^2 \cos \alpha - 2Au \sin \alpha$$

$$y = y_u + Au^2 \sin \alpha + 2Au \cos \alpha$$

$$z = z_u$$

$$\mu_{u_h} = y_{lw} / 2a \leq u < u_l = y_{hw} / 2a$$

Παραμετρικός ορισμός παραβολής.



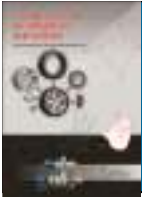
Υπολογισμός σημείων

$$x_{n+1} = x_n \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)x_u + (\Delta u \cos \alpha - \sin \alpha)(y_n - y_u) + A\Delta u(\Delta u \cos \alpha - 2 \sin \alpha)$$

$$y_{n+1} = (\cos \alpha + \Delta u \sin \alpha)y_n + (1 - \cos \alpha - \Delta u \sin \alpha)y_u + (x_n - x_u) \sin \alpha + A\Delta u(\Delta u \sin \alpha + 2 \cos \alpha)$$

$$z_{n+1} = z_n$$





ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

Οι κωνικές τομές είναι καμπύλες δεύτερου βαθμού - γενική πεπλεγμένη μορφή:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + Ey + F = 0$$

Το είδος της καμπύλης γίνεται με εξέταση της διακρίνουσας $B^2 - A \cdot C$:

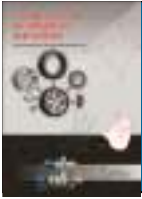
- 1. Εάν $B^2 < A \cdot C$, τότε η γενική εξίσωση παριστάνει μια έλλειψη.
- 2. Εάν $B^2 = A \cdot C$, τότε η γενική εξίσωση παριστάνει μια παραβολή.
- 3. Εάν $B^2 > A \cdot C$, τότε η γενική εξίσωση παριστάνει μια υπερβολή.

Οι κωνικές τομές σε μορφή πινάκων:

$$x^T Q x = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad X^T = [x, y, 1] \quad Q = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}$$





ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

- Ορίζεται η πρώτη παράγωγος:

$$C'(u_0) = [x'(u_0) \ y'(u_0) \ z'(u_0)]$$

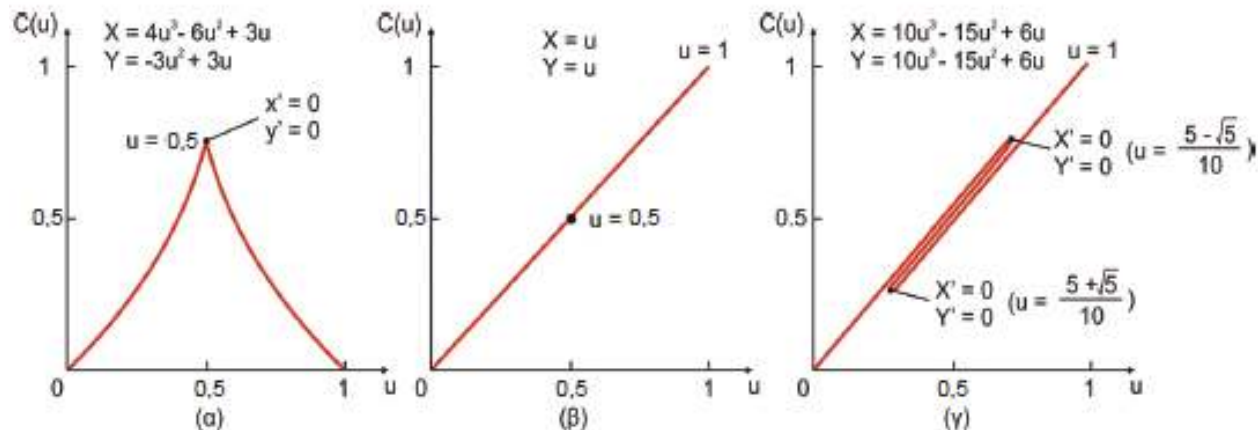
- Η ανωτέρου βαθμού, π.χ. για α βαθμού:

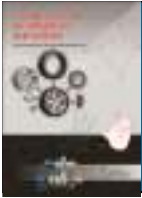
$$\frac{d^2 C(u_0)}{du_0^2} = \left[\frac{d^2 x(u_0)}{du_0^2} \ \frac{d^2 y(u_0)}{du_0^2} \ \frac{d^2 z(u_0)}{du_0^2} \right]$$

- Η καμπύλη είναι κανονική στο σημείο $u = u_0$, εάν ισχύει η σχέση:

$$C'(u_0) \neq 0 \text{ ή } x'(u_0)^2 + y'(u_0)^2 + z'(u_0)^2 > 0$$

**Ιδιαίτερα σημεία σε καμπύλες: (α) από την εξίσωση της καμπύλης.
(β) από την παραμετροποίηση της ευθείας.**





ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Το διάνυσμα $t = C'(u_0)$, που είναι η παράγωγος της καμπύλης ως προς u στο σημείο $C(u_0)$, ονομάζεται εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη.

Το μήκος του εφαπτόμενου διανύσματος είναι $|t| = \frac{ds}{du}$.

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, $T(u)$:
$$T(u) = \frac{t}{|t|}$$

Η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης στο σημείο $C(u) = C(u_0)$, από τη διανυσματική σχέση:
$$R(u) = C(u_0) + uT(u_0)$$

Όπου

$R(u)$ είναι το διάνυσμα θέσης για σημείο πάνω στην ευθεία

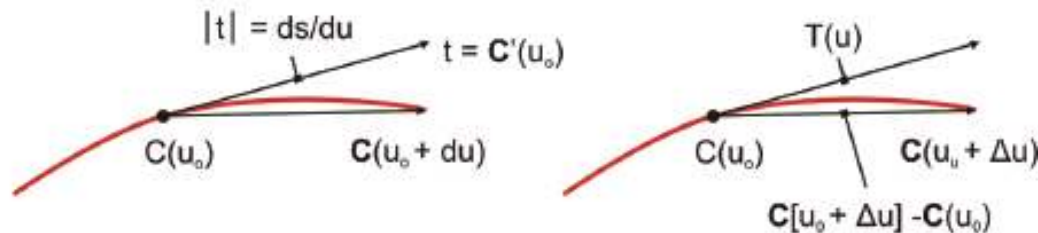
$C(u_0)$ το διάνυσμα για το σημείο $C(u_0)$ της καμπύλης

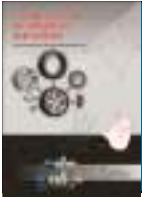
u η παράμετρος ορισμού της ευθείας και

$T(u_0)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο σημείο $C(u_0)$.

Η εφαπτόμενη ευθεία υφίσταται σε κάθε ομαλό σημείο της καμπύλης.

Σχηματική παράσταση, (α) του εφαπτόμενου διανύσματος και (β) του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος.





ΚΑΘΕΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Είναι το επίπεδο που περνάει από το σημείο $C(u_0)$ μιας καμπύλης και είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο αυτό.

Η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου:

$$(R - C(u_0)) \cdot C'(u_0) = 0,$$

Όπου,

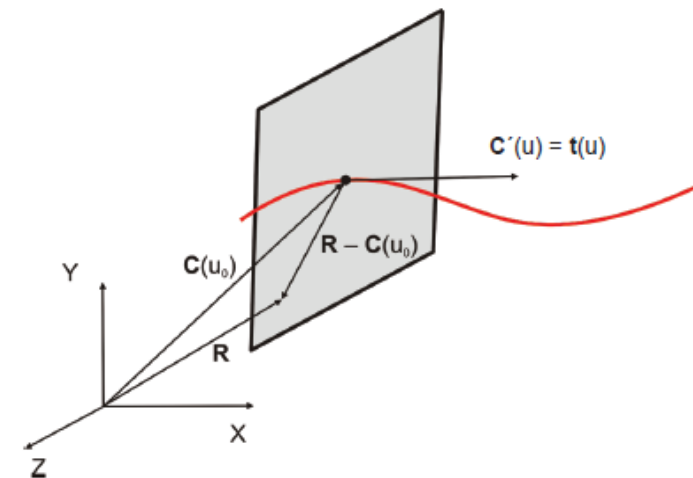
R το διάνυσμα για σημείο στο επίπεδο

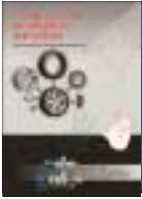
$C(u_0)$, $C'(u_0)$ το διάνυσμα θέσης του σημείου και το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο της καμπύλης

Το διάνυσμα $R - C(u_0)$ ανήκει πάνω στο κάθετο επίπεδο

το $C'(u_0)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη και είναι κάθετο στο επίπεδο

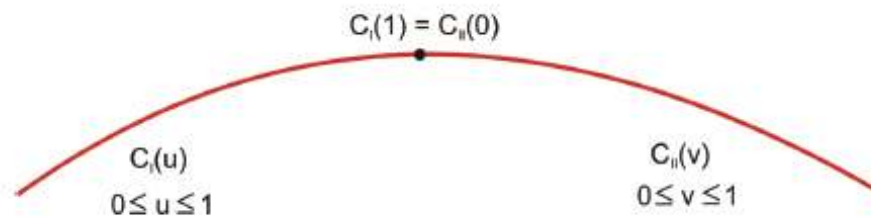
Το κάθετο επίπεδο σε καμπύλη στο χώρο.





ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Σύνδεση καμπύλης $C_{II}(v)$, $(0 \leq v \leq 1)$ με την καμπύλη $C_I(u)$, $(0 \leq u \leq 1)$:

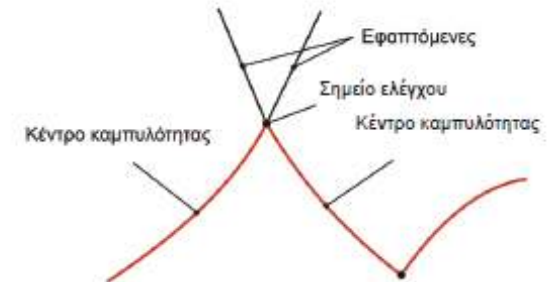


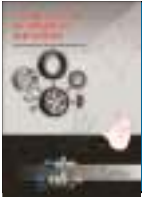
Συνέχεια Θέσης: το τελικό σημείο της πρώτης αρχικό στη δεύτερη, $C_{II}(0) = C_I(1)$

Συνέχεια Κλίσης: ισούται τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο σύνδεσης, $C'_I(1) = C'_{II}(0)$

Γεωμετρική Συνέχεια: κοινό μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, G^1 ,

$$\frac{1}{|t_2|} (C'_{II}(0)) = \frac{1}{|t_1|} (C'_I(1)) = T$$





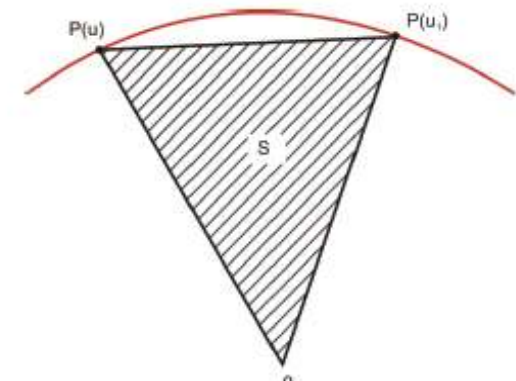
ΜΗΚΟΣ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

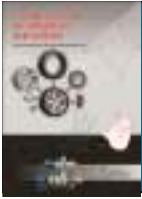
Μήκος l καμπύλης μεταξύ δύο τιμών της παραμέτρου ορισμού u_0 και u_1

$$l = \int_{u_0}^{u_1} |C'(u)| du$$

Το εμβαδόν της πύλας, από το κέντρο προς τμήμα της καμπύλης

$$S = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} |C(u) \times C'(u)| du$$



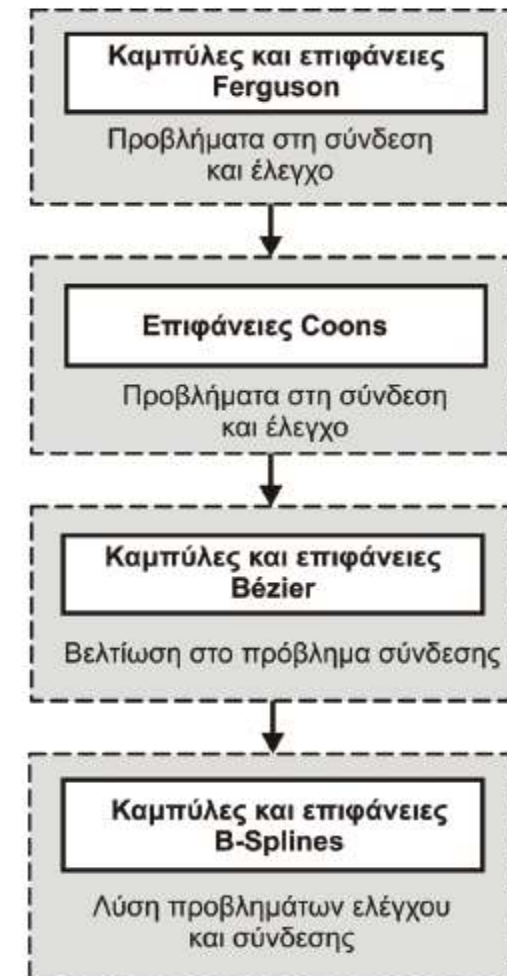


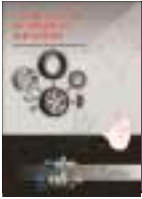
ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

Κάθε καμπύλη ορίζεται από τμήματα που ενώνονται μεταξύ τους σε μια σύνθετη καμπύλη.

Τα συνήθη σχήματα είναι πολυωνυμικά.

Σχηματική αναπαράσταση εξέλιξης μεθόδων περιγραφής καμπυλών και επιφανειών.





ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

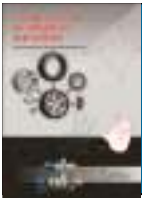
Ένα πολυωνυμικό τμήμα ορίζεται από μια εξίσωση που απαρτίζεται από το άθροισμα των γινομένων των βασικών (ή πολυωνυμικών, ή μείξης) συναρτήσεων της παραμέτρου u ορισμού της καμπύλης, με τους διανυσματικούς (ή πολυωνυμικούς) συντελεστές.

Γενική μορφή καμπύλης τρίτου βαθμού

$$r = C(u) = a_0 + ua_1 + u^2a_2 + u^3a_3$$

a οι πολυωνυμικοί ή διανυσματικοί συντελεστές
 $1, u, u^2, u^3$ οι συναρτήσεις μείξης





ΚΑΜΠΥΛΕΣ FERGUSON

Εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά από το Fergusson το 1960, για τη σχεδίαση τμημάτων επιφανειών αεροσκαφών. Οι απλές βασικοί συναρτήσεις 1, u , u^2 και u^3 στην εξίσωση

$$r = C(u) = a_0 + ua^1 + u^2a^2 + u^3a^3$$

αντικαθίστανται από τις (συναρτήσεις μείξης Hermite τρίτου βαθμού):

$(1 - 3u^2 + 2u^3)$ αντί του 1,

$(3u^2 - 2u^3)$ αντί του u ,

$(u - 2u^2 + u^3)$ αντί του u^2 ,

$(-u^2 + u^3)$ αντί του u^3 .

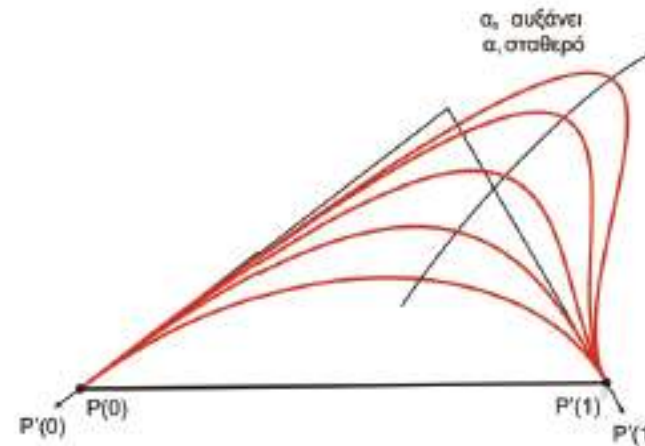
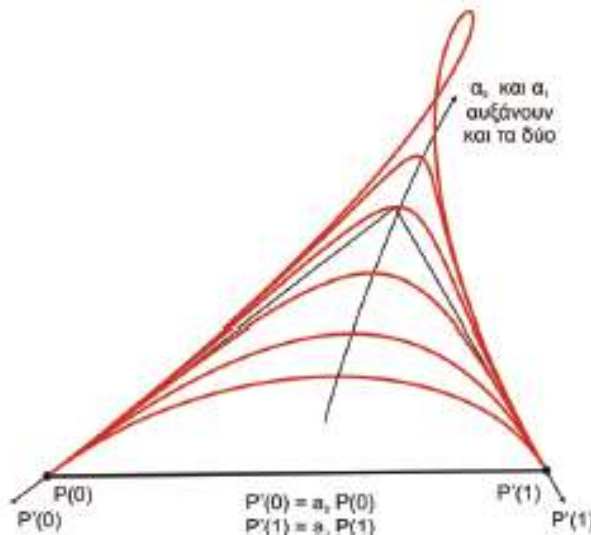
Αποδεικνύεται ότι οι διανυσματικοί συντελεστές είναι:

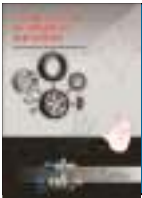
τα διανύσματα θέσης στα άκρα της καμπύλης, $a_0 = P_0 = C(0)$ και $a_1 = P_1 = C(1)$,

οι τιμές της πρώτης παράγωγου στα άκρα, $a_2 = P'_0 = C'(0)$ και $a_3 = P'_1 = C'(1)$

Μορφή της εξίσωσης

$$r = C(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3) P_0 + (3u^2 - 2u^3) P_1 + (u - 2u^2 + u^3) P'_0 + (-u^2 + u^3) P'_1$$





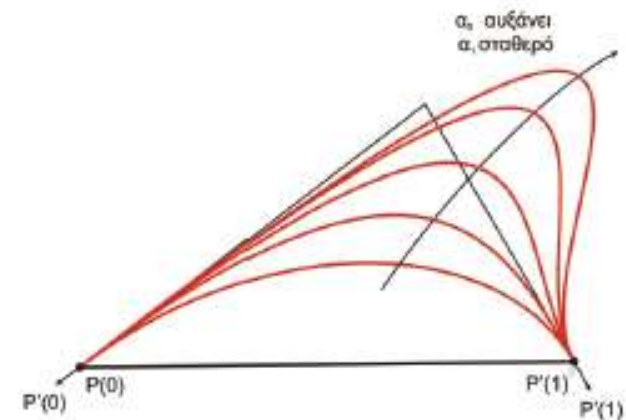
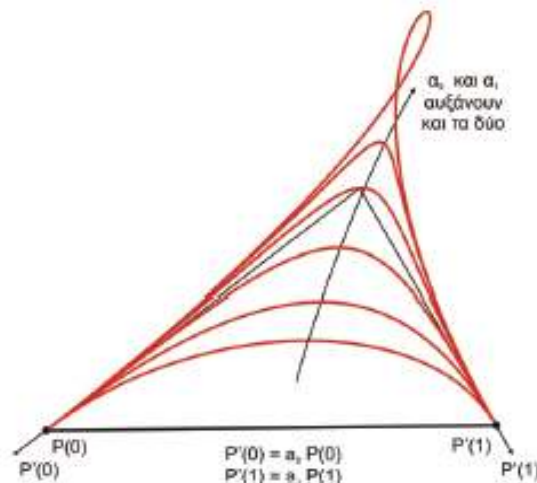
ΚΑΜΠΥΛΕΣ FERGUSSON

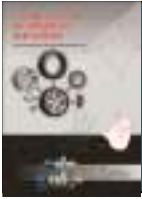
Η καμπύλη Fergusson :

ξεκινάει από το πρώτο σημείο P_0 , εφαπτόμενη προς το διάνυσμα P'_0 και καταλήγει στο δεύτερο σημείο P_1 , εφαπτόμενη προς το διάνυσμα P'_1

Το εφαπτόμενο διάνυσμα σε σημείο της καμπύλης δίδεται από τη σχέση

$$C'(u) = (6u^2 - 6u)P_0 + (-6u^2 + 6u)P_1 + (3u^2 - 4u + 1)P'_0 + (3u^2 - 2u)P'_1$$





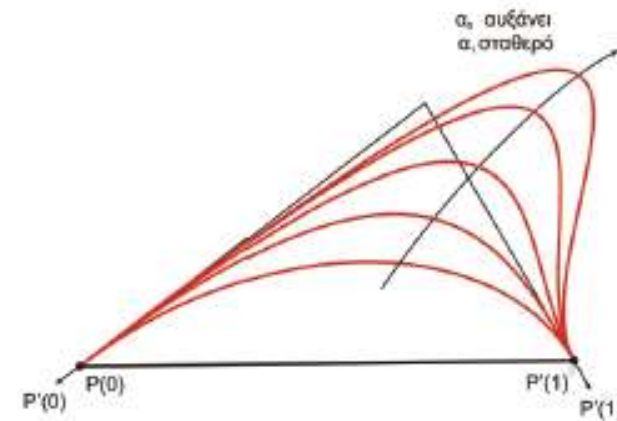
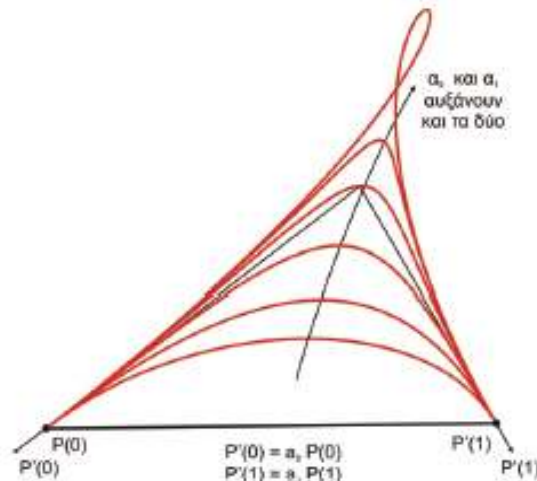
ΚΑΜΠΥΛΕΣ FERGUSSON - ΕΛΕΓΧΟΣ

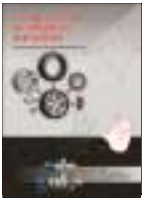
Η μορφή της αλλάζει, μεταβάλλοντας έναν ή περισσότερους από τους διανυσματικούς συντελεστές P_0 , P_1 , P'_0 και P'_1 .

Αλλαγή θέσης ακραίων σημείων P_1 και P_2 , τότε η καμπύλη θα διέρχεται από τα νέα ακραία σημεία.

Αλλαγή διεύθυνσης των εφαπτόμενων διανυσμάτων στα άκρα, η καμπύλη θα αλλάξει μορφή, ώστε να παραμένει εφαπτόμενη αυτών στα άκρα.

Αλλαγή του μεγέθους του εφαπτόμενου διανύσματος στα άκρα, αλλάζει τη μορφή συμμετρικά ή ασύμμετρα





ΚΑΜΠΥΛΕΣ BEZIER

Χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από το Γάλλο μαθηματικό Bézier το 1972 στη Renault και αποτέλεσαν τη βάση για πολλά συστήματα CAD.

Είχαν αναπτυχθεί και από τον P. Decasteljau, το 1959, στη Citroen, όπου είχαν χρησιμοποιηθεί ως τμήμα του συστήματος CAD της Citroen, αλλά δεν είχαν ποτέ δημοσιευτεί, σε αντίθεση με τις καμπύλες Bézier.

Ορίζονται από μια σειρά σημείων στο χώρο, που συνιστούν το πολύγωνο ελέγχου ή χαρακτηριστικό πολύγωνο της καμπύλης, αυτά μόνο προσδιορίζουν τη μορφή της καμπύλης.

Η καμπύλη περνάει από το πρώτο και το τελευταίο σημείο της σειράς και προσεγγίζει όλα τα ενδιάμεσα.

Αποτελούν μια μέθοδο προσέγγισης σειράς σημείων με μια καμπύλη.

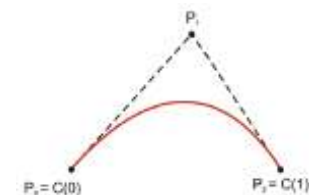
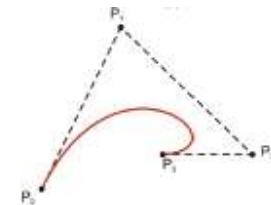
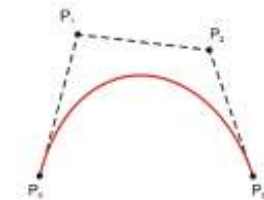
Οι κυριότερες διαφορές ως προς τις καμπύλες Fergusson, είναι:

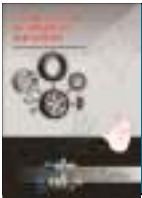
Η μορφή της καμπύλης εξαρτάται μόνον από τα σημεία ελέγχου ορισμού της καμπύλης, Υπάρχει καλύτερη σχέση και κατανόηση της μορφής και των δυνατοτήτων ελέγχου της καμπύλης.

Ο βαθμός της καμπύλης εξαρτάται από τα σημεία ελέγχου (βαθμός καμπύλης = αριθμός σημείων ελέγχου - 1)

Όσο μεγαλώνει ο βαθμός της καμπύλης Bézier, γίνεται ασθενέστερη και η σχέση μεταξύ του χαρακτηριστικού πολυγώνου και της καμπύλης.

Η καμπύλη Bézier είναι πιο ομαλή επειδή έχει μεγαλύτερου βαθμού συνέχεια.





ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ BEZIER

Γενική μορφή καμπύλης Bezier βαθμού n:

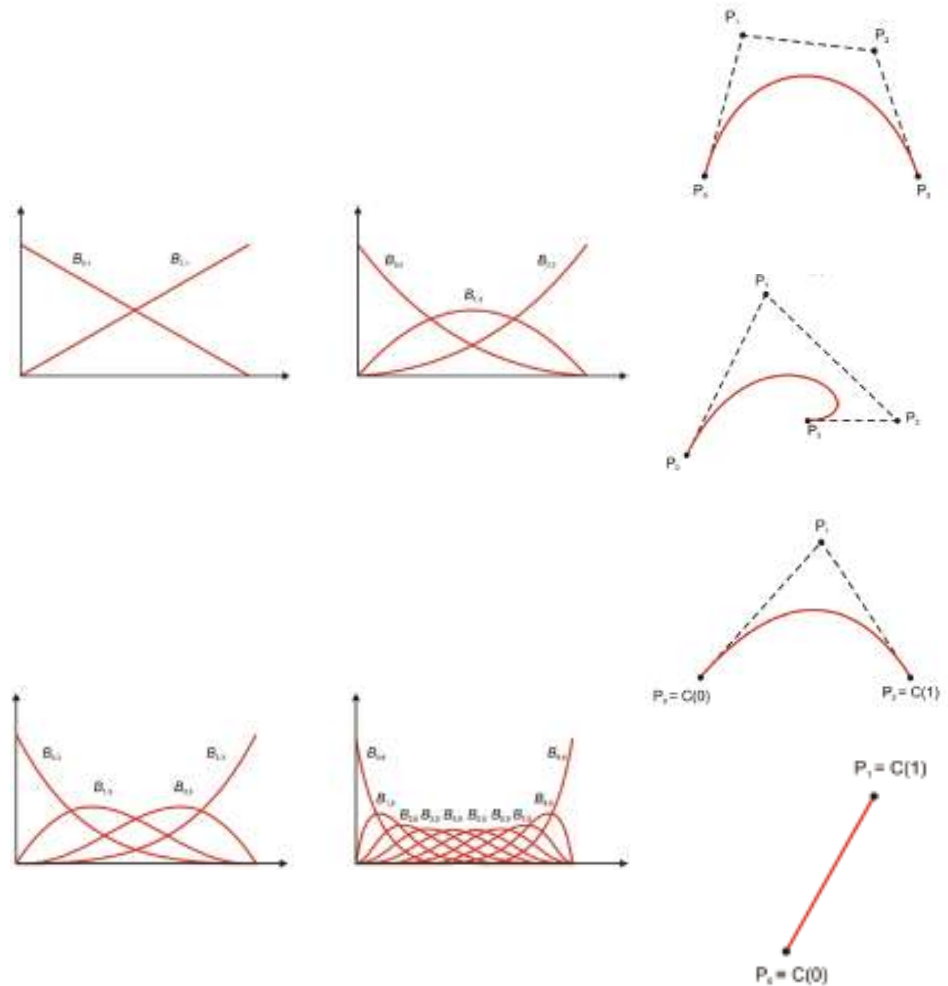
$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(u) \quad 0 \leq u \leq 1,$$

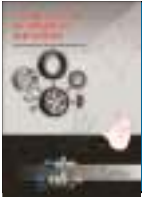
$B_{i,n}$ είναι τα πολυώνυμα Bernstein

$$B_{i,n} = D(n, i) u^i (1 - u)^{n-i}.$$

$D(n, i)$ είναι ο δυωνυμικός συντελεστής

$$D(n, i) = \frac{n!}{i! (n - i)!}$$





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΚΑΜΠΥΛΗ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Καμπύλη πρώτου βαθμού, $n=1$, απαιτούνται δύο σημεία ελέγχου, τα P_0 και P_1 για τον ορισμό της.

Τα πολυώνυμα Bernstein είναι:

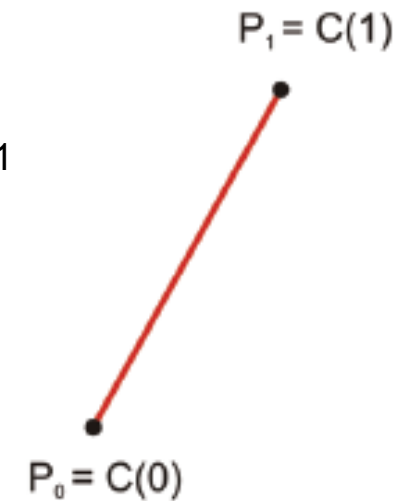
$$B_{0,1}(u) = 1-u \text{ και}$$

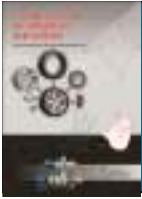
$$B_{1,1}(u) = u.$$

Εξίσωση της καμπύλης:

$$C(u) = (1-u)P_0 + uP_1,$$

η καμπύλη είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο P_0 μέχρι το σημείο P_1





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΚΑΜΠΥΛΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Καμπύλη δεύτερου βαθμού, $n=2$, ορίζεται από τρία σημεία ελέγχου, P_0 , P_1 και P_2 .

Πολυώνυμα Bernstein:

$$B_{0,2}(u) = (1 - u)^2,$$

$$B_{1,2}(u) = 2u(1 - u)$$

$$B_{2,2}(u) = u^2$$

εξίσωση της καμπύλης:

$$C(u) = (1 - u)^2 P_0 + 2u(1 - u) P_1 + u^2 P_2$$

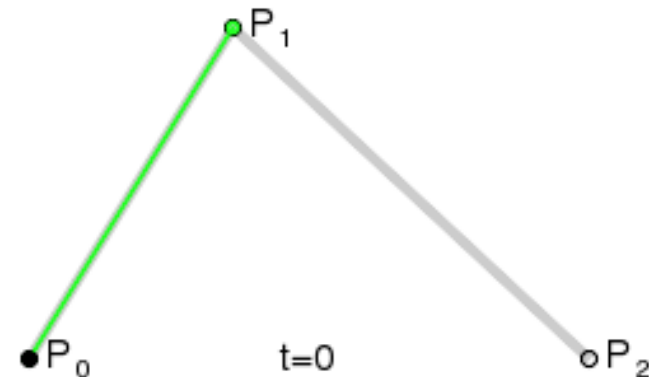
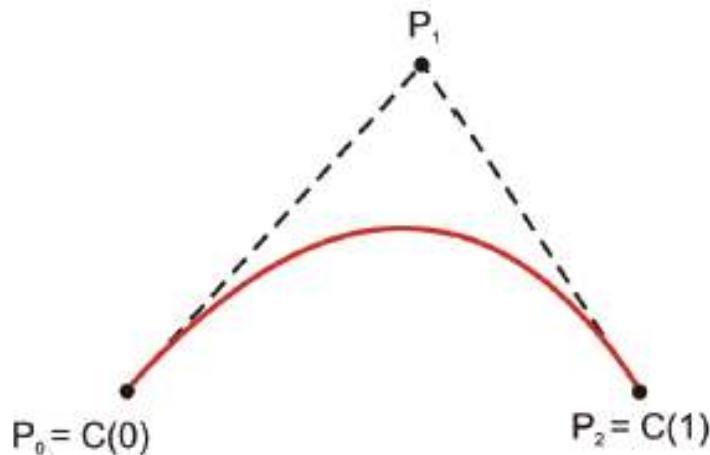
παραβολικό τόξο από το P_0 μέχρι το P_2 .

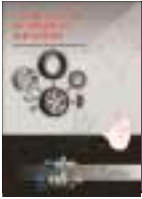
Βασικές ιδιότητες:

πολύγωνο ελέγχου το τρίγωνο $P_0 P_1 P_2$,

διέρχεται από τα άκρα, $P_0 = C(0)$ και $P_2 = C(1)$

τα εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα συμπίπτουν με τα τμήματα $P_0 P_1$ και $P_1 P_2$, η καμπύλη περιέχεται πάντα μέσα στο τρίγωνο $P_0 P_1 P_2$





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΚΑΜΠΥΛΗ 3ου ΒΑΘΜΟΥ

καμπύλη τρίτου βαθμού, $n = 3$,
τέσσερα σημεία ελέγχου, P_0 , P_1 , P_2 και P_3 ,
πολυώνυμα Bernstein

$$B_{0,3} = (1 - u)^3$$

$$B_{1,3} = 3u(1 - u)^2$$

$$B_{2,3} = 3u^2(1 - u)$$

$$B_{3,3} = u^3.$$

εξίσωση του κυβικού τμήματος

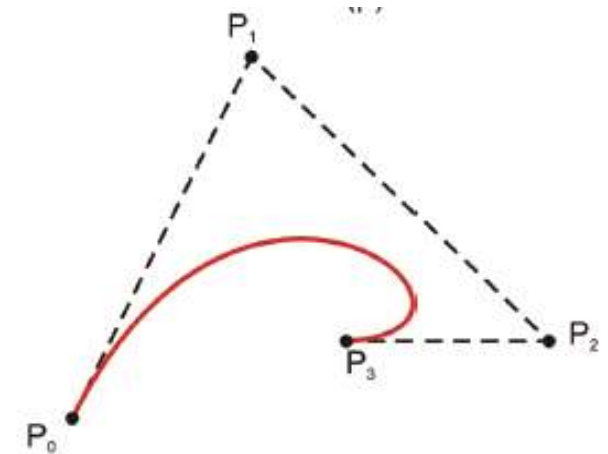
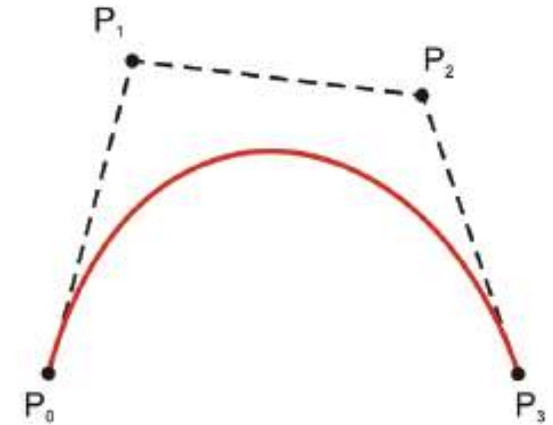
$$C(u) = (1-u)^3P_0 + 3u(1-u)^2P_1 + 3u^2(1-u)P_2 + u^3P_3$$

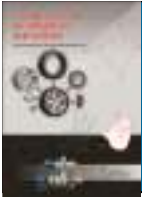
Ιδιότητες

διέρχεται από τα ακραία σημεία P_0 και P_3

τα εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα είναι προς την κατεύθυνση των τμημάτων P_0P_1 και P_2P_3

η καμπύλη περιέχεται στο κυρτό πολύγωνο που ορίζουν τα σημεία ελέγχου





ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ BEZIER

Στηρίζονται στις ιδιότητες των πολυωνύμων Bernstein.

Η καμπύλη περνάει από τα ακραία σημεία ελέγχου, τα P_0 και P_n , ενώ προσεγγίζει όλα τα ενδιάμεσα σημεία ελέγχου.

εφάπτεται στα ακραία τμήματα του πολυγώνου ελέγχου

$$C'(0) = n(P_1 - P_0) \text{ και}$$

$$C'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

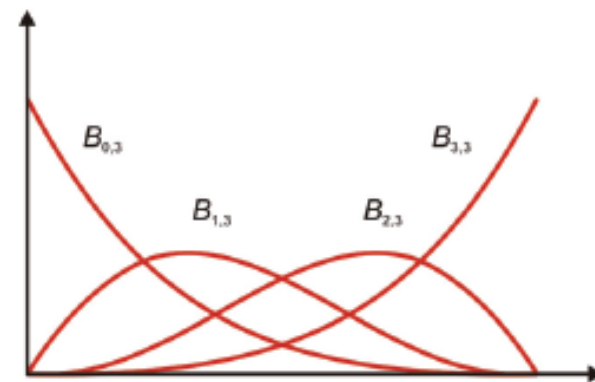
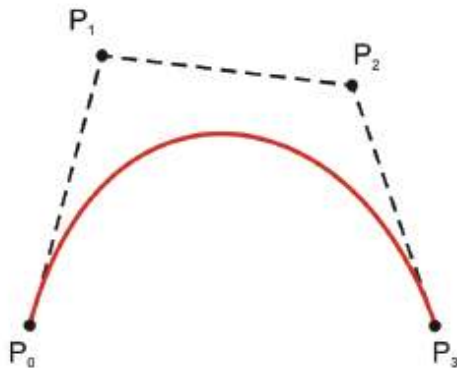
Ανώτερου βαθμού παράγωγοι στα άκρα εξαρτώνται μόνον από τα σημεία ελέγχου της καμπύλης
παράγωγος $k - 1$ βαθμού εξαρτάται από τα k προηγούμενα για το τελικό σημείο (ή επόμενα για το αρχικό σημείο)
σημεία ελέγχου της καμπύλης

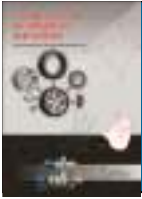
δεύτερου βαθμού παράγωγος

$$C''(0) = n(n - 1)(P_0 - 2P_1 + P_2) \text{ και}$$

$$C''(1) = n(n - 1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}).$$

Είναι συμμετρική ως προς u και $(1 - u)$, με συνέπεια η αντιστροφή των σημείων ελέγχου να μην αλλάζει τη μορφή της καμπύλης



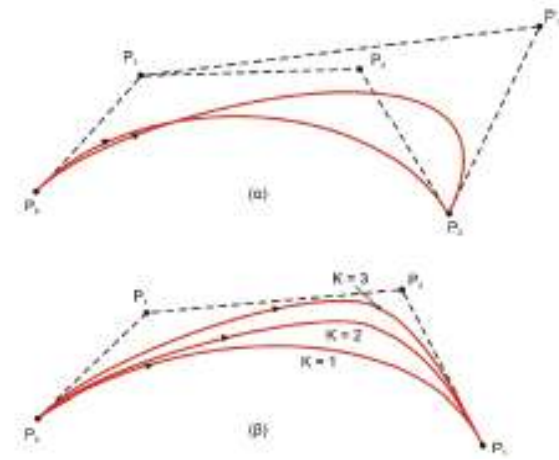
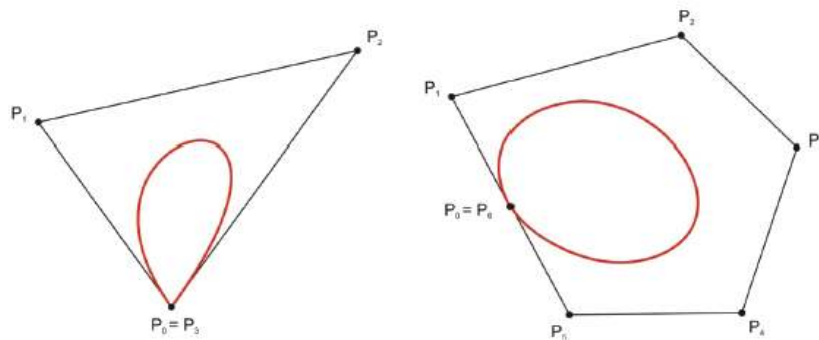


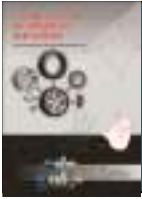
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ BEZIER

Μετακίνηση του P_i ΣΕ επηρεάζει όλη την καμπύλη και στο σημείο $C(u = i/n)$ έχουμε τη μέγιστη μετατόπιση της καμπύλης

Δημιουργείται κλειστή καμπύλη Bézier, κλείνοντας το πολύγωνο ελέγχου

Για κάθε u , το άθροισμα όλων των συναρτήσεων $B_{i,n}(u)$ είναι ίσο με τη μονάδα





ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ BEZIER

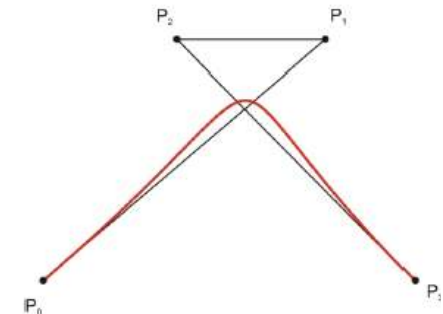
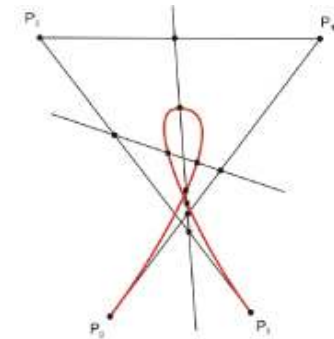
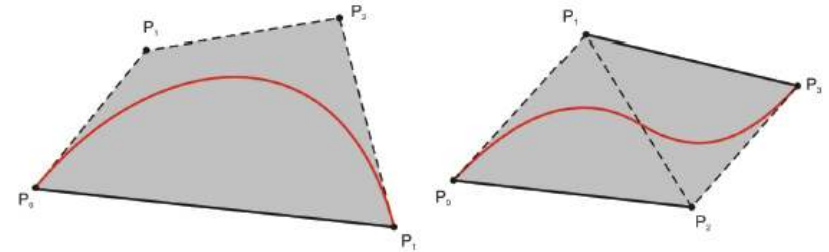
Τα σημεία ελέγχου της καμπύλης σχηματίζουν ένα κυρτό πολύγωνο και όλη η καμπύλη περικλείεται μέσα στο πολύγωνο αυτό

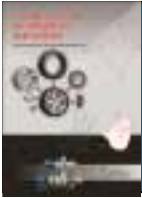
Σημεία τομή καμπύλης και ευθείας. Ο αριθμός των σημείων τομής μεταξύ μιας ευθείας (ή επιπέδου για τρισδιάστατη καμπύλη) με την καμπύλη είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό των σημείων τομής της ευθείας (επίπεδου) με το πολύγωνο ελέγχου (variation diminishing).

Η μορφή της καμπύλης.

Στην αρχή ($u = 0$) η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς την ίδια κατεύθυνση όπως το τρίγωνο $P_0P_1P_2$, και στο τέλος ($u = 1$) προς το τρίγωνο $P_{n-2}P_{n-1}P_n$.

Βρόχος στο πολύγωνο ελέγχου μπορεί να δώσει και βρόχο στην καμπύλη





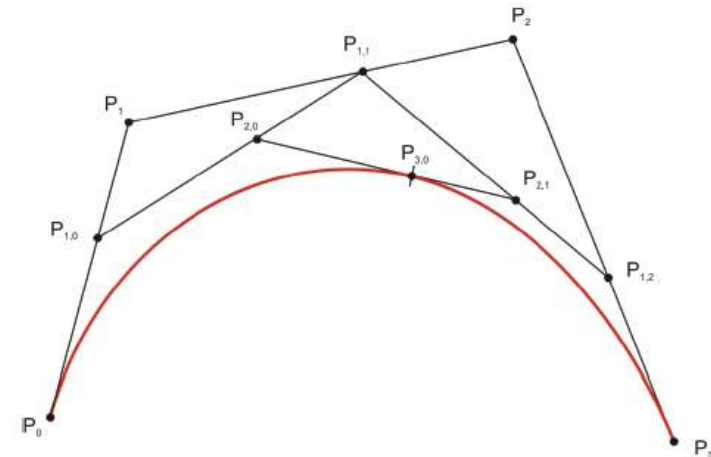
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DECASTELJAU

Βασίζεται στην αναδρομική σχέση που συνδέει τα πολυώνυμα Bernstein,

$$B_{i,n}(u) = (1 - u)B_{i,n-1}(u) + uB_{i-1,n-1}(u)$$

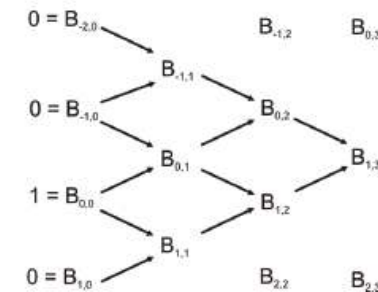
αρχικές συνθήκες, $B_{i,n}(u) = 0$ εάν $i < 0$, ή $i > n$

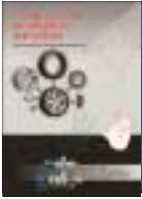
Αποτελεί μια μεθοδολογία προσδιορισμού σημείων πάνω σε μια καμπύλη Bézier με επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή



Ο αναδρομικός τύπος ορισμού των πολυωνύμων Bernstein.

P_0			
P_1	$P_{1,0} = (1 - u)P_0 + uP_1$		
P_2	$P_{1,1} = (1 - u)P_1 + uP_2$	$P_{2,0} = (1 - u)P_{1,0} + uP_{1,1}$	
P_3	$P_{1,2} = (1 - u)P_2 + uP_3$	$P_{2,1} = (1 - u)P_{1,1} + uP_{1,2}$	$P_{3,0} = (1 - u)P_{2,0} + uP_{2,1}$





ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DECASTELJAU – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

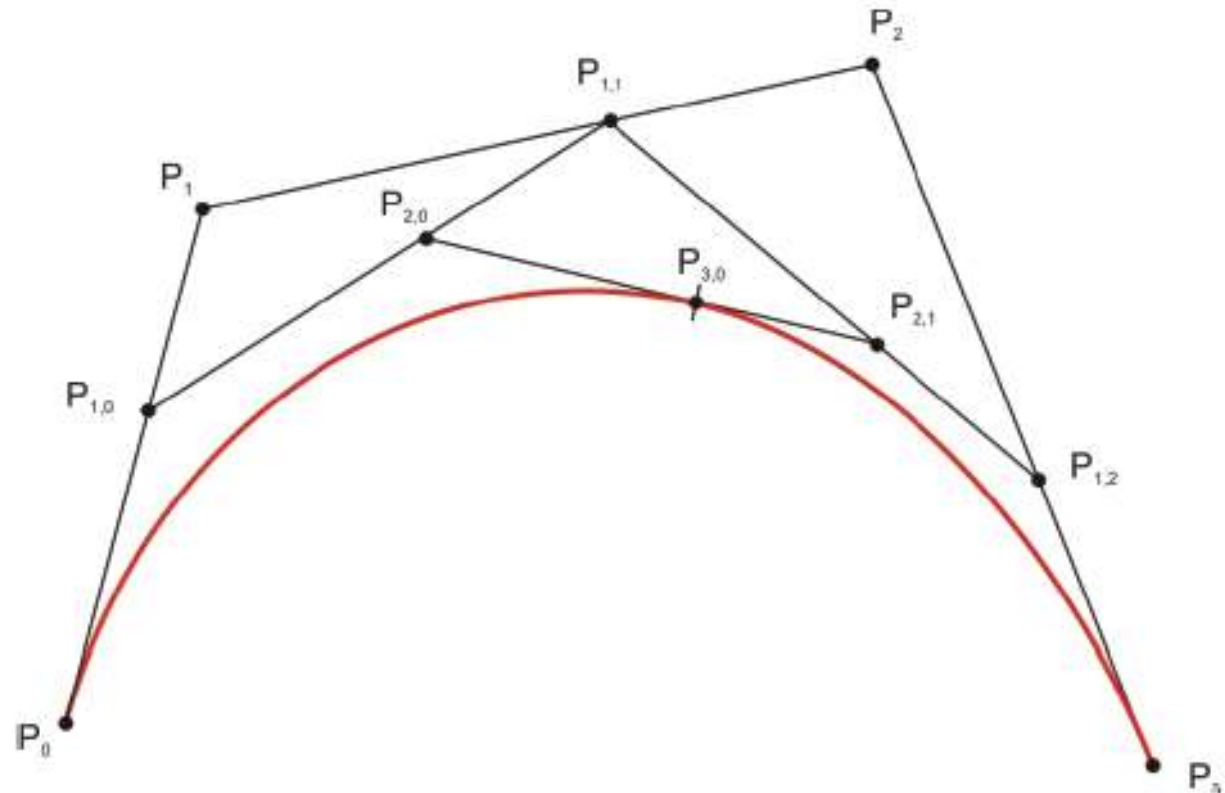
Καμπύλη Bézier διαιρείται σε δύο επιμέρους τμήματα

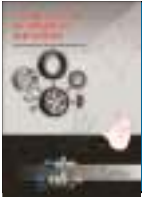
Η καμπύλη διαιρείται σε δύο νέες καμπύλες με ΣΕ

$P_0 P_{1,0} P_{2,0} P_{3,0}$

$P_{3,0} P_{2,1} P_{1,2} P_3$

αντίστοιχα για κάθε τμήμα.





ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΑΝΥΨΩΣΗ ΒΑΘΜΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Από την εφαρμογή του αλγόριθμου του De Casteljau, προκύπτει η δυνατότητα ανύψωσης του βαθμού της καμπύλης χωρίς να αλλάξει η καμπύλη.

Αρχικά ΣΕ κυβικής καμπύλης
P0, P1, P2, P3

Ορίζονται τα νέα σημεία ελέγχου με τις σχέσεις :

$$P_{01} = P_0$$

$$P_{11} = [P_0 + 3P_1] / 4$$

$$P_{21} = [2P_1 + 2P_2] / 4$$

$$P_{31} = [3P_2 + P_3] / 4$$

$$P_{41} = P_3$$

η αρχική καμπύλη παραμένει αμετάβλητη και ο βαθμός της καμπύλης έχει αλλάξει από 3 (κυβική) σε 4 (τετάρτου βαθμού)
Μεγαλύτερου βαθμού καμπύλες, n βαθμού
Συνεπελεστές

$$i / (n + 1) \text{ και } (1 - (i / (n + 1))) \text{ για } i = 0, 1, \dots, n + 1$$

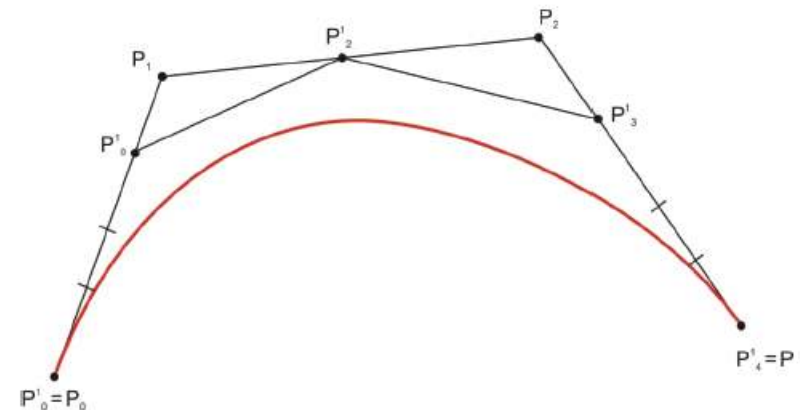
Αναδρομική σχέση μεταξύ των σημείων

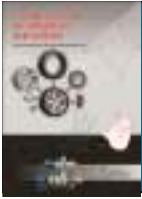
$$P'_{i+1} = \frac{i}{(n+1)} P_{i+1} + (1 - \frac{i}{(n+1)}) P_i, \text{ για } i = 0, 1, \dots, n+1$$

Εφαρμογή στη σύνδεση τμημάτων

ΣΧΗΜΑ 3.35

Ανύψωση βαθμού κυβικής καμπύλης Bézier σε τετάρτου βαθμού Bézier, P₀ – P₃ τα αρχικά σημεία ελέγχου και P₀¹ – P₄¹ τα νέα σημεία ελέγχου.





ΚΑΜΠΥΛΕΣ B-SPLINES

Αποτελούν μια γενίκευση των καμπυλών Bézier.

Ορίζονται από μια σειρά σημείων ελέγχου (ονομάζονται και σημεία De Boor), που σχηματίζουν το πολύγωνο ελέγχου (ή πολύγωνο De Boor).

Αποτελούνται από περισσότερα του ενός τμημάτων.

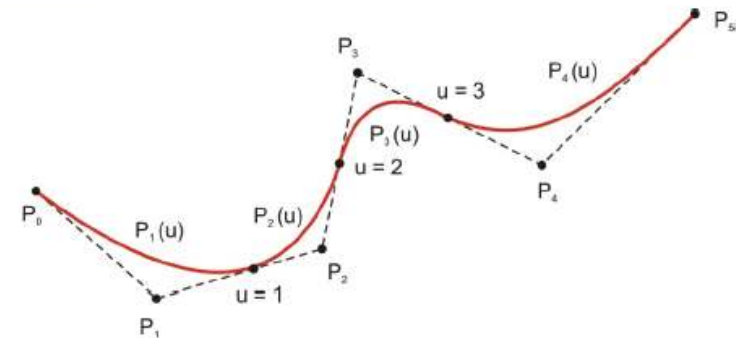
Ο αριθμός των τμημάτων, m , εξαρτάται από τον αριθμό των σημείων ελέγχου, $n+1$, και το βαθμό της καμπύλης, p , που επιλέγει ο χρήστης.

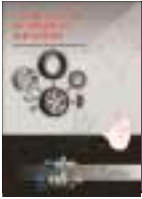
Το πεδίο τιμών της παραμέτρου ορισμού u , δεν είναι $[0,1)$, αλλά $[0, m)$ (ανάλογα με το διάνυσμα κόμβων)

Καμπύλη B-Spline δεύτερου βαθμού ($p = 2$), που ορίζεται από $n + 1 = 6$ σημεία ελέγχου, $P_0, \dots, P_5$, απαρτίζεται από $m = 4$ επιμέρους τμήματα με διάστημα ορισμού $[0,4)$.

ΣΧΗΜΑ 3.38

Καμπύλη B-Spline που ορίζεται από 6 σημεία ελέγχου, και είναι δεύτερου βαθμού. Αποτελείται από 4 επιμέρους τμήματα.





ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Οι καμπύλες B-Spline, έχουν όλες τις ιδιότητες των καμπυλών Bézier, αλλά συγχρόνως έχουν και βασικά προτερήματα απέναντί τους και συγκεκριμένα:

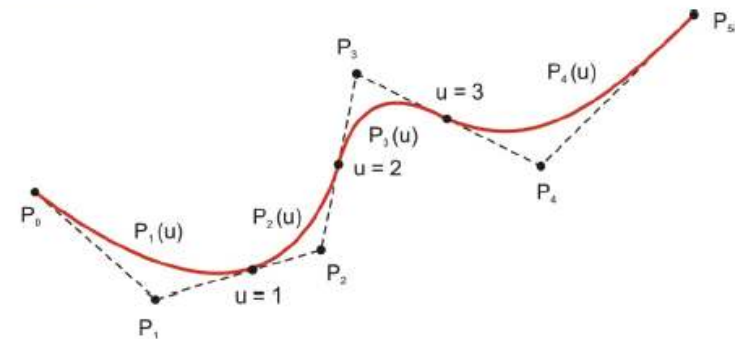
Δυνατότητα τοπικού ελέγχου καμπύλης. Στις καμπύλες B-Spline, η μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου επηρεάζει μόνον ορισμένα από τα τμήματα που απαρτίζουν την καμπύλη.

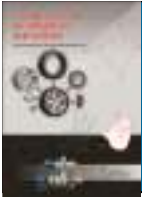
Ο βαθμός της καμπύλης είναι ανεξάρτητος από τα σημεία ελέγχου και επιλέγεται. Συνήθως χρησιμοποιούνται καμπύλες τρίτου βαθμού που ικανοποιούν τις απαιτήσεις συνέχειας στις περισσότερες εφαρμογές. Ο βαθμός της καμπύλης ορίζει τις βασικές συναρτήσεις.

Η προσθήκη/διαγραφή σημείων ελέγχου γίνεται χωρίς να υπάρχει αντίστοιχη αλλαγή του βαθμού της καμπύλης.

ΣΧΗΜΑ 3.38

Καμπύλη B-Spline που ορίζεται από 6 σημεία ελέγχου, και είναι δεύτερου βαθμού. Αποτελείται από 4 επιμέρους τμήματα.





ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Εξίσωση της καμπύλης B-Spline p βαθμού, που ορίζεται από $n + 1$ σημεία ελέγχου P_i , ($0 \leq i \leq n$)

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}(u), \quad 0 \leq u \leq u_{\max}, \quad 1 \leq p \leq n$$

οι συναρτήσεις $N_{i,p}(u)$ ονομάζονται βασικές συναρτήσεις B-Splines. Στον ορισμό τους δεν υπάρχει ο όρος n (αριθμός σημείων ελέγχου), αλλά εξαρτώνται από την παράμετρο p (βαθμός της καμπύλης) που είναι συνήθως 3 (τρίτου βαθμού καμπύλες).

Υπολογίζονται από την αναδρομική σχέση (Cox-de Boor)

$$N_{i,p}(u) = (u - u_i) \frac{N_{i,p-1}(u)}{u_{i+p} - u_i} + (u_{i+p+1} - u) \frac{N_{i+1,p-1}(u)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}}$$

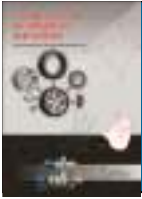
όπου

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{εκτός} \end{cases}$$

Τα u_i ονομάζονται κόμβοι (knots) και όλες οι τιμές σχηματίζουν το διάνυσμα κόμβων. Ο αριθμός των κόμβων είναι $m + 1$, από u_0 μέχρι u_m , και ισχύει η σχέση:

$$(p + 1) + (n + 1) = m + 1 \quad \text{ή} \quad m = n + p + 1 = n + k$$





ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΟΜΒΩΝ

Πολύ σημαντικός παράγοντας, επειδή επηρεάζει τον υπολογισμό των βασικών συναρτήσεων και κατά συνέπεια την τελική καμπύλη.

πρέπει, $u_i \leq u_{i+1}$,

Ορίζονται δύο τύποι διανυσμάτων κόμβων,
Περιοδικό (Periodic)
Ανοικτό (Open)

Η κατανομή των τιμών μπορεί να είναι ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη
Η επιλογή της κατανομής των τιμών εξαρτάται από την κατανομή των σημείων ελέγχου

Συνεπώς, το διάνυσμα των κόμβων μπορεί να είναι:

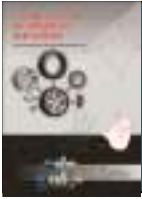
Περιοδικό ομοιόμορφο: κόμβοι διακριτοί που ισαπέχουν

Ανοικτό ομοιόμορφο: πολλαπλότητα τιμών στα άκρα

Περιοδικό ανομοιόμορφο: τιμές ανομοιόμορφα κατανεμημένες, μπορεί να υπάρχουν πολλαπλοί εσωτερικοί κόμβοι

Ανοικτό ανομοιόμορφο: τιμές ανομοιόμορφα κατανεμημένες, μπορεί να υπάρχουν πολλαπλοί εσωτερικοί κόμβοι





ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΟΜΒΩΝ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ

Οι κόμβοι είναι διακριτοί και ισαπέχουν μεταξύ τους,

$$[0, 1, 2, 3, 4] \text{ ή } [-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2]$$

αρχίζει από το μηδέν και αυξάνει κατά μονάδα, ή κανονικοποιείται στο διάστημα $[0, 1]$,

$$[0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0]$$

γενικός τύπος ορισμού:

$$u_j = j, 0 \leq j \leq n + p + 1$$

χρήσιμο διάστημα κόμβων,

$$p \leq j \leq n + 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αριθμός σημείων ελέγχου της καμπύλης, $n + 1 = 11$,
βαθμός καμπύλης, $p = 2$,
να βρεθεί το περιοδικό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων.

Αριθμός κόμβων: $m = n + p + 1 = 10 + 2 + 1 = 13$, $m + 1 = 14$

Διάνυσμα κόμβων $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]$

Χρήσιμο διάνυσμα $[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]$ και η καμπύλη αποτελείται από 9 επιμέρους τμήματα.

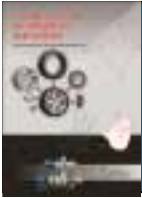
τρίτου βαθμού καμπύλη, $p = 3$,
 $m = 10 + 3 + 1 = 14$, $m + 1 = 15$

Διάνυσμα κόμβων $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]$

Χρήσιμο διάνυσμα $[3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]$ και η καμπύλη αποτελείται από 8 επιμέρους τμήματα.

Η αύξηση κατά 1 του βαθμού της καμπύλης μειώνει αντίστοιχα και τον αριθμό των τμημάτων από τα οποία αποτελείται η καμπύλη





ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΟΜΒΩΝ

ΑΝΟΙΚΤΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ

Πολλαπλότητα τιμών στα άκρα που ισούται με την τάξη k ($k = p + 1$) των βασικών συναρτήσεων B-Spline.

Οι εσωτερικοί κόμβοι είναι ομοιόμορφα διατεταγμένοι,

$$k = 2 \ (p = 1) \ [0, 0, 1, 2, 3, 4, 4]$$

$$k = 3 \ (p = 2) \ [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3]$$

$$k = 4 \ (p = 3) \ [0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2]$$

κανονικοποιημένα διαστήματα,

$$k = 2 \ (p=1) \ [0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1]$$

$$k = 3 \ (p=2) \ [0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1]$$

$$k = 4 \ (p=3) \ [0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1]$$

Στη γενική του περίπτωση, προσδιορίζεται από τη σχέση

$$u_i = 0 \quad 0 \leq i < k$$

$$u_i = i - (k - 1) \quad k \leq i < n + 1$$

$$u_i = n - k + 2 \quad n + 1 \leq i \leq n + k$$

Το χρήσιμο διάστημα τιμών συμπίπτει με όλες τις διακριτές τιμές στο διάνυσμα κόμβων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αριθμός σημείων ελέγχου της καμπύλης, $n + 1 = 11$,
βαθμός καμπύλης, $p = 2$,

να βρεθεί το ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων.

Αριθμός κόμβων: $m = n + p + 1 = 10 + 2 + 1 = 13$, $m+1 = 14$

Διάνυσμα κόμβων $[0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 9]$

Χρήσιμο διάνυσμα $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$.

Ο αριθμός των τμημάτων από τα οποία αποτελείται η καμπύλη είναι 9, όπως και στην περίπτωση του περιοδικού διαστήματος.

Για τρίτου βαθμού καμπύλη, $p = 3$,

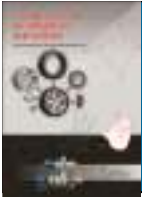
$$m = 10 + 3 + 1 = 14, \ m + 1 = 15$$

Διάνυσμα κόμβων $[0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8]$

Χρήσιμο διάνυσμα $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$.

Η καμπύλη πάλι αποτελείται από 8 τμήματα, κατά 1 μικρότερο από τη δεύτερου βαθμού καμπύλη





ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΟΜΒΩΝ

Το ανομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων μπορεί να παίρνει τιμές ανομοιόμορφα κατανεμημένες, ή να έχει πολλαπλούς εσωτερικούς κόμβους

μπορεί να είναι περιοδικό ή ανοικτό,
[0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2] (ανοικτό
ανομοιόμορφο με διπλό εσωτερικό κόμβο)

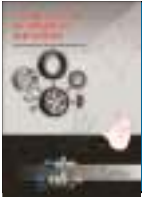
[0, 1, 2, 2, 3, 4] (περιοδικό ανομοιόμορφο
με διπλό εσωτερικό κόμβο)

[0, 0.28, 0.5, 0.72, 1] (περιοδικό
ανομοιόμορφο με τυχαίες τιμές)

Στο περιοδικό διάνυσμα κόμβων, η καμπύλη δε διέρχεται από τα ακραία σημεία ελέγχου, ενώ στο ανοικτό διάνυσμα η καμπύλη διέρχεται.

Για το λόγο αυτό το δεύτερο διάνυσμα είναι πιο σύνηθες





ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ B-SPLINE

Η μορφή τους εξαρτάται από το διάνυσμα κόμβων.
Υπολογίζονται από την αναδρομική σχέση

$$N_{i,p}(u) = (u - u_i) \frac{N_{i,p-1}(u)}{u_{i+p} - u_i} + (u_{i+p+1} - u) \frac{N_{i+1,p-1}(u)}{u_{i+p} - u_{i+1}}$$

όπου

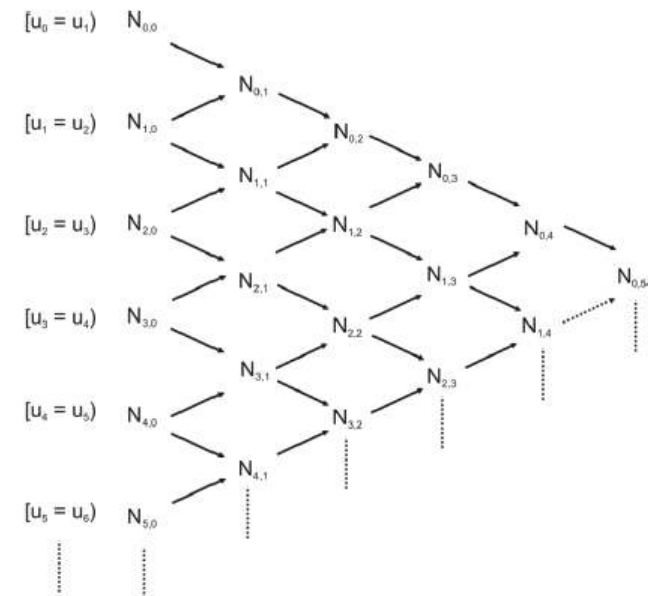
$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{ΕΚΤΟΣ} \end{cases}$$

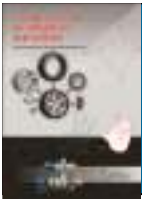
Το διάγραμμα δείχνει ότι η βασική συνάρτηση πέμπτου βαθμού του πρώτου σημείου ελέγχου ($i = 0$), $N_{0,5}(u)$ εξαρτάται από 6 βασικές συναρτήσεις μηδενικού βαθμού και συγκεκριμένα από την $N_{0,0}(u)$ μέχρι τη $N_{5,0}(u)$.

Στη γενική περίπτωση, μια βασική συνάρτηση p βαθμού, του i -σημείου ελέγχου, $N_{i-1,p}(u)$, εξαρτάται από τις βασικές συναρτήσεις $N_{i,0}(u)$ μέχρι $N_{i+p,0}(u)$.

ΣΧΗΜΑ 3.39

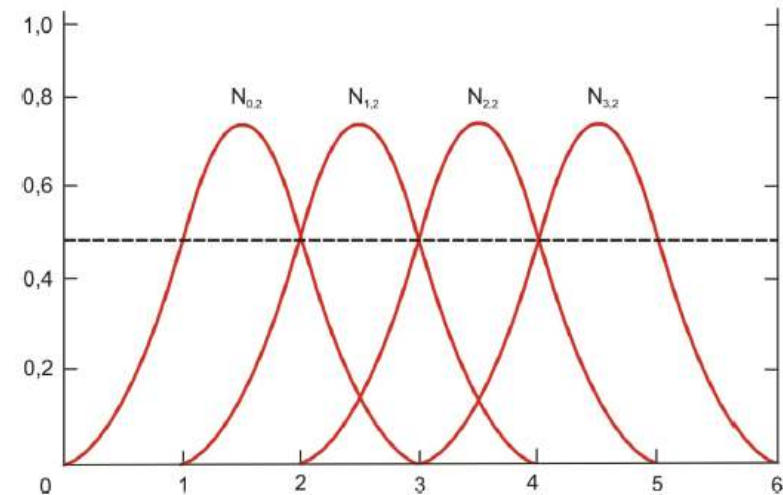
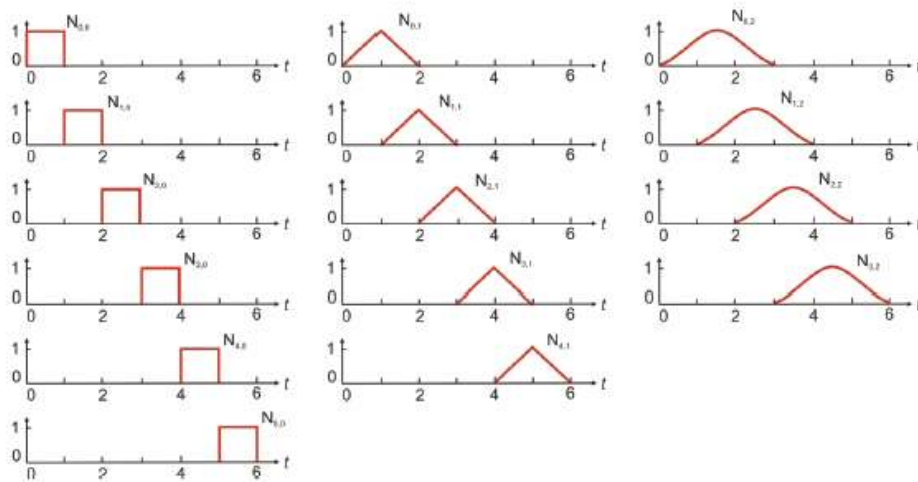
Σχηματική παράσταση υπολογισμού της βασικής συνάρτησης $N_{0,5}$. Ο δεύτερος δείκτης είναι ο βαθμός της καμπύλης.





ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

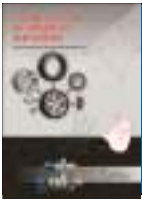
ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



$$N_{i,p}(u) = (u - u_i) \frac{N_{i,p-1}(u)}{u_{i,p} - u_i} + (u_{i,p+1} - u) \frac{N_{i,p-1}(u)}{u_{i,p+1} - u_{i+1}}$$

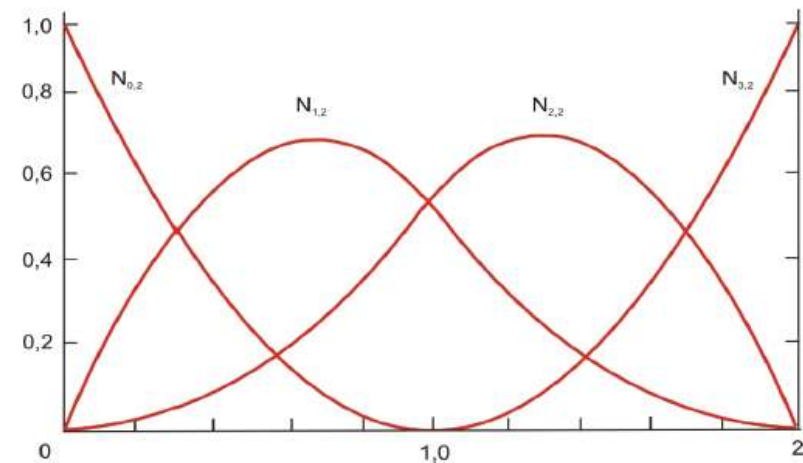
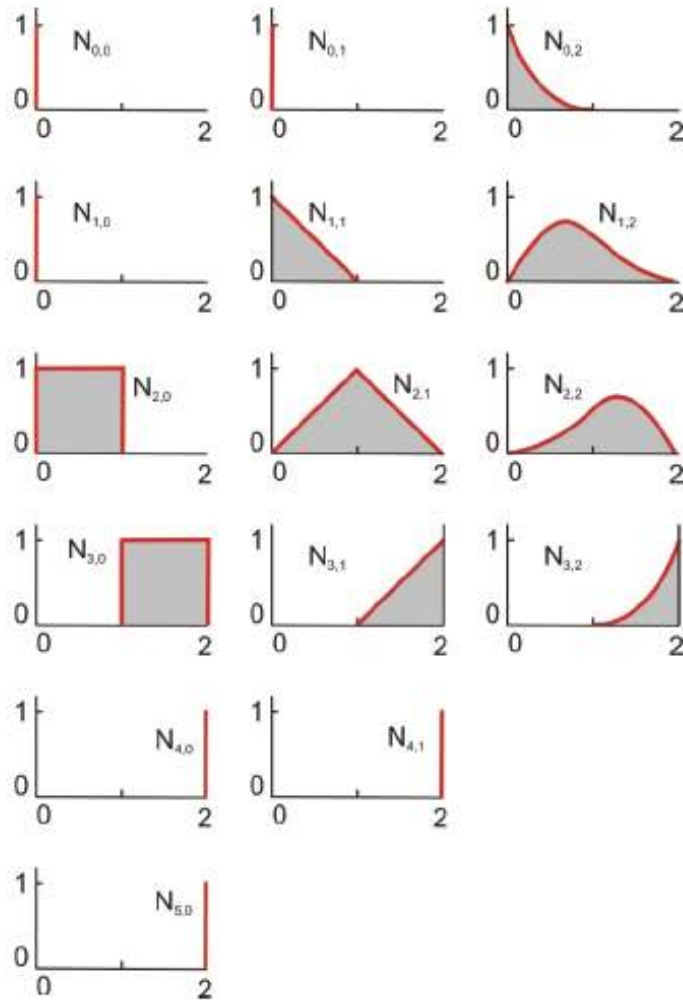
$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{ΕΚΤΟΣ} \end{cases}$$





ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

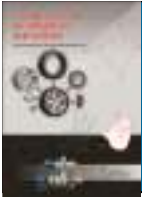
ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



$$N_{i,p}(u) = (u - u_i) \frac{N_{i,p-1}(u)}{u_{i,p} - u_i} + (u_{i,p+1} - u) \frac{N_{i,p-1}(u)}{u_{i,p+1} - u_{i+1}}$$

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{ΕΚΤΟΣ} \end{cases}$$





ΑΝΟΜΟΙΟΡΦΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΟΜΒΩΝ

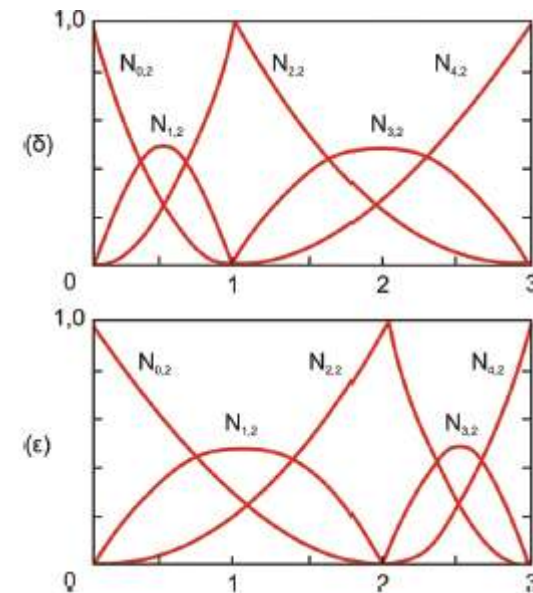
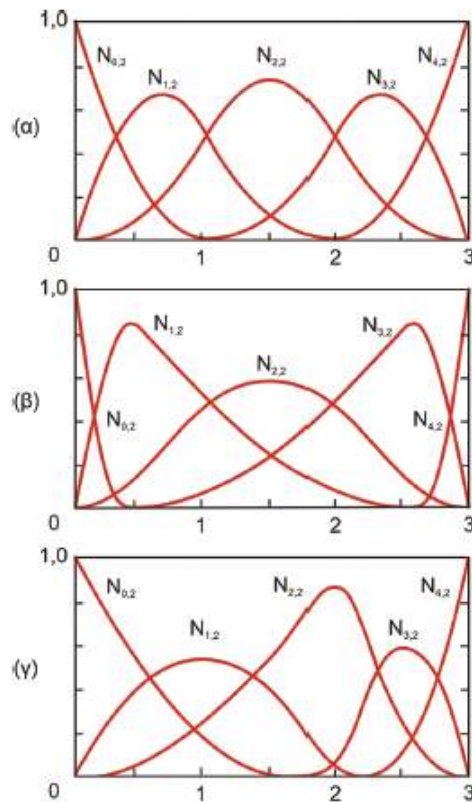
$$[X] = [0, 0, 0, 0.1, 2, 3, 3, 3]$$

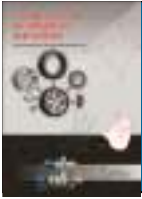
$$[X] = [0, 0, 0, 0.4, 2.6, 3, 3, 3]$$

$$[X] = [0, 0, 0, 1.8, 2.2, 3, 3, 3]$$

$$[X] = [0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, 3]$$

$$[X] = [0, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 3]$$





ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ B-SPLINE

Βαθμός καμπύλης: επιλέγεται από το χρήστη,

Πρέπει $n - k + 2 > 0$.

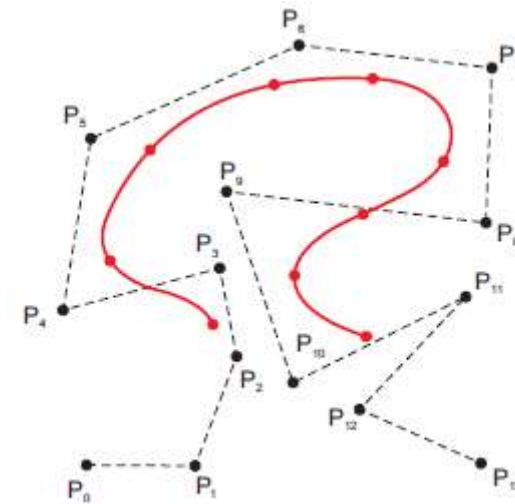
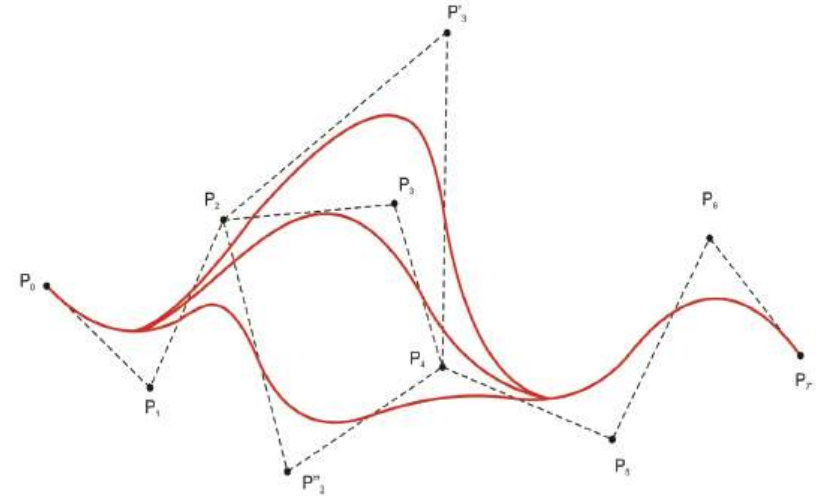
2, 3 και 4 σημεία ελέγχου, για τον προσδιορισμό πρώτου, δεύτερου ή τρίτου βαθμού καμπύλης B-Spline.

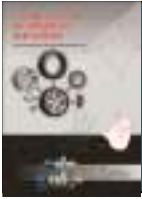
Τοπικός έλεγχος.

Μετακίνηση ενός ΣΕ επηρεάζει μόνο ορισμένα από τα τμήματα της καμπύλης και όχι όλη την καμπύλη

Μετακίνηση ενός ΣΕ, επηρεάζει $p + 1$ από τα τμήματά της, που ορίζονται από το διάστημα κόμβων $[u_i, u_{i+p+1})$, όπου i είναι το σημείο ελέγχου που μετακινείται.

Η ανοικτή καμπύλη περνάει από τα ακραία ΣΕ και εφάπτεται στα ακραία τμήματα, ενώ η περιοδική καμπύλη δεν περνάει από αυτά





ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ B-SPLINE ΜΟΡΦΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

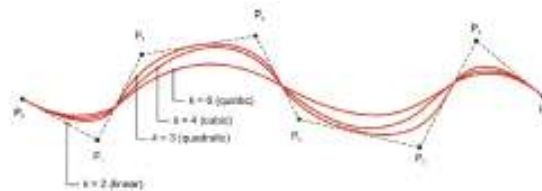
Η μορφή της καμπύλης εξαρτάται από το βαθμό της

Για $k = 1$ (μηδενικού βαθμού), η καμπύλη εκφυλίζεται και συμπίπτει με τα σημεία ελέγχου,

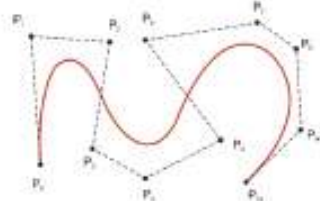
για $k = 2$ (πρώτου βαθμού) η καμπύλη συμπίπτει με το πολύγωνο ελέγχου

Για $k = 3$ (δευτέρου βαθμού) η καμπύλη εφάπτεται του πολυγώνου ελέγχου στο μέσο του κάθε τμήματος, εκτός του πρώτου και του τελευταίου τμήματος. Τα μέσα των τμημάτων του πολυγώνου ελέγχου είναι και οι τιμές των κόμβων της καμπύλης

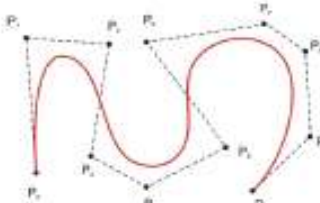
Εάν $k = n + 1$ έχουμε καμπύλη Bézier, και οι τιμές του u είναι μεταξύ 0 και 1.



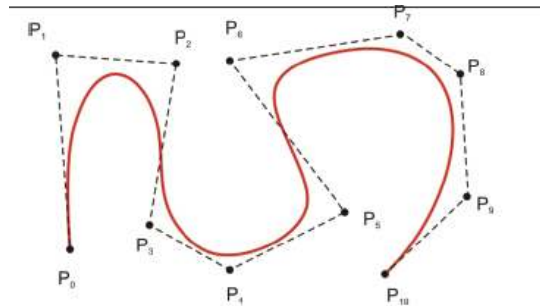
(α)



(β)

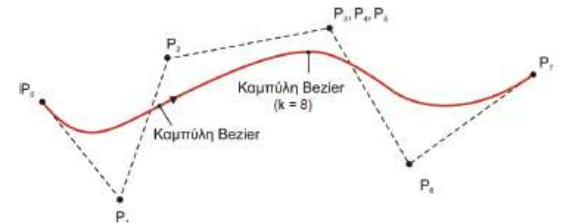
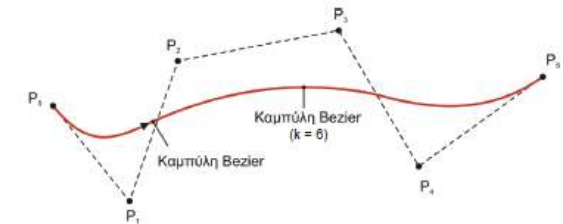


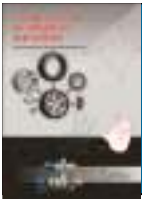
(γ)



(δ)

51 Ταυτόσημες καμπύλες Bézier και B-Splines. (α) Μονά σημεία ελέγχου. (β) Πολλαπλά σημεία ελέγχου.



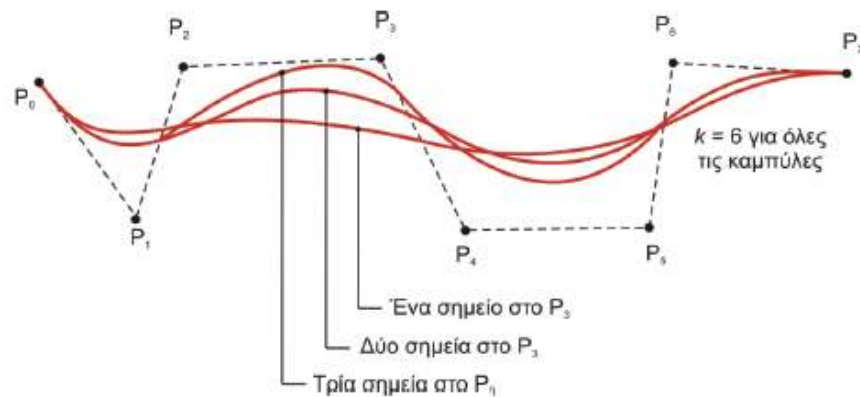


ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ B-SPLINE ΜΟΡΦΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

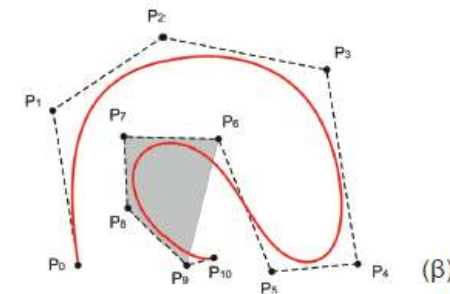
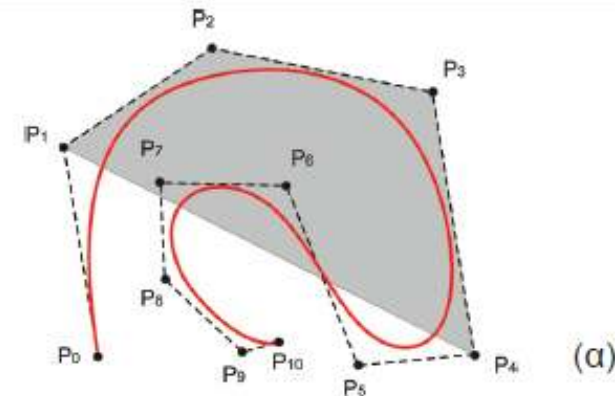
Πολλαπλά σημεία ελέγχου μάς δίνουν υψηλή τιμή καμπυλότητας στο σημείο εκείνο και η καμπύλη έλκεται περισσότερο προς το συγκεκριμένο σημείο ελέγχου
Ισχύει η ιδιότητα του κυρτού πολυγώνου. Η καμπύλη B-Spline περιλαμβάνεται πλήρως στο κυρτό πολύγωνο που δημιουργείται από τα σημεία ελέγχου της καμπύλης.

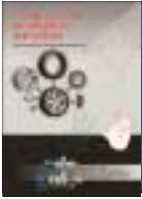
ΣΧΗΜΑ 3.52

Επίδραση πολλαπλού σημείου ελέγχου στην καμπύλη.



Η ιδιότητα του τοπικού κυρτού πολυγώνου.





ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Άσκηση

Η άσκηση θα επιλυθεί με όποιο μαθηματικό τρόπο είναι επιθυμητό, π.χ. πράξεις με το χέρι, matlab, excel, κλπ. και θα παραδοθεί σε ηλεκτρονική μορφή μέχρι το επόμενο μάθημα. Μπορεί να αποσταλεί και ηλεκτρονικά μέχρι την ημέρα του επόμενου μαθήματος, πριν από αυτό.

- 1) Να βρεθεί και να αναπαρασταθεί γραφικά η καμπύλη Fergusson 3^{ου} βαθμού, η οποία περνάει από 3 σημεία. Τα σημεία αυτά προσδιορίζονται από τα 3 πρώτα γράμματα του ονόματος και του επωνύμου σας (Α ->1, Β->2, Γ->3, κλπ., σημείο 1 πρώτο γράμμα ονόματος, πρώτο γράμμα επώνυμου, σημείο 2 δεύτερο γράμμα ονόματος, δεύτερο γράμμα επώνυμου, σημείο 3 τρίτο γράμμα ονόματος, τρίτο γράμμα επώνυμου).
- 2) Να βρεθεί και να αναπαρασταθεί γραφικά η αντίστοιχη καμπύλη Bezier, η οποία περνάει από 3 προαναφερόμενα σημεία.

