

ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

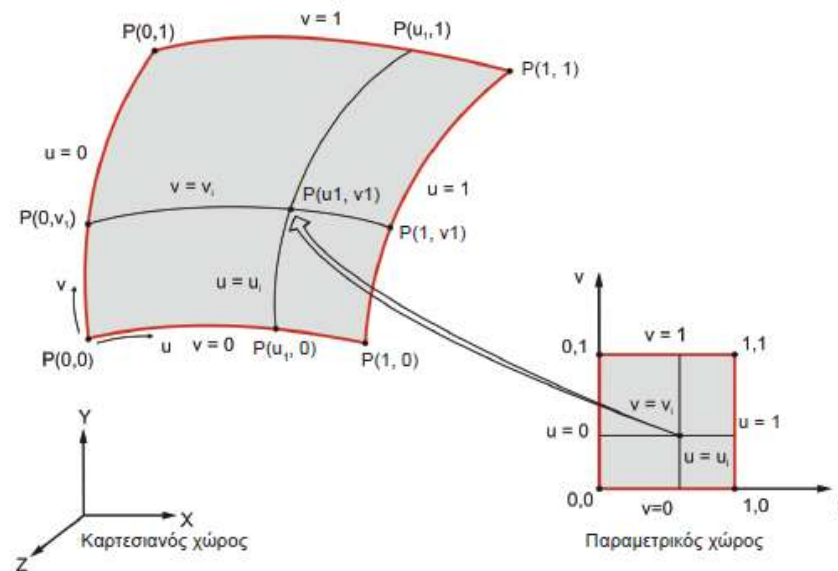
ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ
ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΛΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ
ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΜΟΡΦΗΣ
(HERMITE, BEZIER, B-SPLINES, NURBS, COONS)

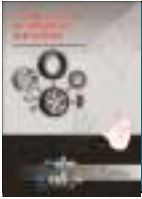


ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

- Αποτελεί μια επέκταση της αναπαράστασης των καμπυλών.
- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στο χώρο που ικανοποιούν μια συνθήκη της μορφής $F(x, y, z) = 0$.
- Η παραμετρική αναπαράσταση:
 $P(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$,
- δύο παράμετροι ορισμού u και v
 $u_{\min}, v_{\min} \leq u, v \leq u_{\max}, v_{\max}$
- Συνήθως, $u_{\min} = v_{\min} = 0$ και $u_{\max} = v_{\max} = 1$.

ΣΧΗΜΑ 4.1 Παραμετρική αναπαράσταση επιφάνειας.

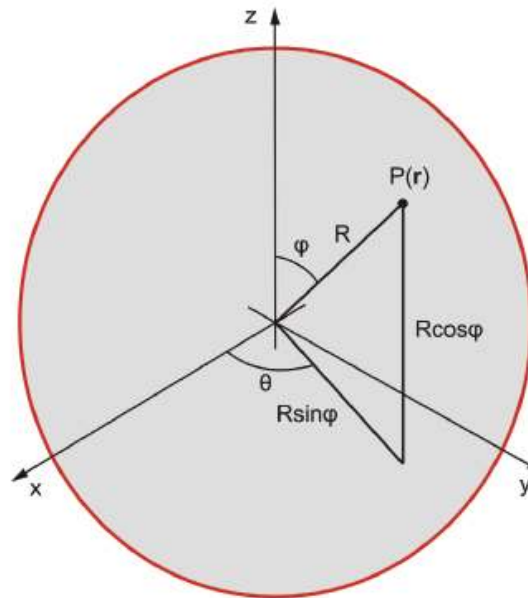


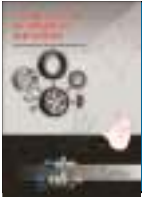


ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΦΑΙΡΑΣ

- Σφαίρα ακτίνας R , με κέντρο την αρχή των αξόνων
 $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$
- παραμετρικές εξισώσεις
 $x = X(\theta, \varphi) = R \sin\varphi \cos\theta$
 $y = Y(\theta, \varphi) = R \sin\varphi \sin\theta$
 $z = Z(\theta, \varphi) = R \cos\varphi$

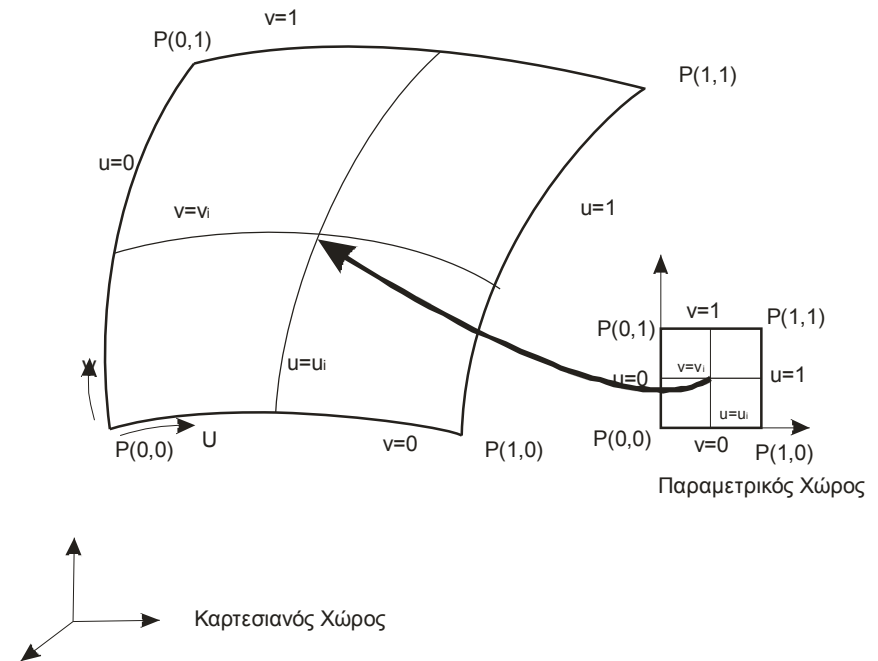
ΣΧΗΜΑ 4.2 Παραμετρική εξίσωση σφαίρας, βάσει των γωνιών θ και φ





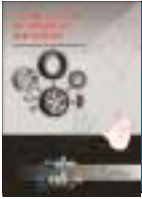
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

- εφαπτόμενο διάνυσμα - πορεία κίνησης του κοπτικού εργαλείου κατά την κατεργασία σε εργαλειομηχανές CNC.
- κάθετο διάνυσμα - πορεία προσέγγισης και αποχώρησης του κοπτικού εργαλείου προς και από την επιφάνεια
 - επιφάνειες αντιστάθμισης (offset) - χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές, όπως κατά την κατεργασία της εκχόνδρισης ενός εξαρτήματος.
- ισοπαραμετρικές καμπύλες - για τη σχεδίαση και παρουσίαση του αντικειμένου στην οθόνη,
 - τον προσδιορισμό των πεπερασμένων στοιχείων,
 - τον προσδιορισμό της τροχιάς του κοπτικού εργαλείου.
- Καμπυλότητα - δυνατότητα κατεργασίας μιας περιοχής με ορισμένου μεγέθους κοπτικό εργαλείο,
- Με βάση επίσης τις παραμετρικές εξισώσεις υπολογίζονται
 - μήκος μιας τυχαίας καμπύλης πάνω στην επιφάνεια,
 - υπολογισμός του εμβαδού τμήματος μιας επιφάνειας,
 - συντομότερη (γαιοδετική απόσταση δύο σημείων)



Ισοπαραμετρικές Καμπύλες





ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- Σε κάθε σημείο της επιφάνειας ορίζονται δύο εφαπτόμενα διανύσματα κατά τη διεύθυνση των ισοπαραμετρικών καμπυλών, ένα κατά τη διεύθυνση u και ένα κατά τη v

$$P_u(u, v) = \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k},$$

$$P_v(u, v) = \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \hat{k},$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$$

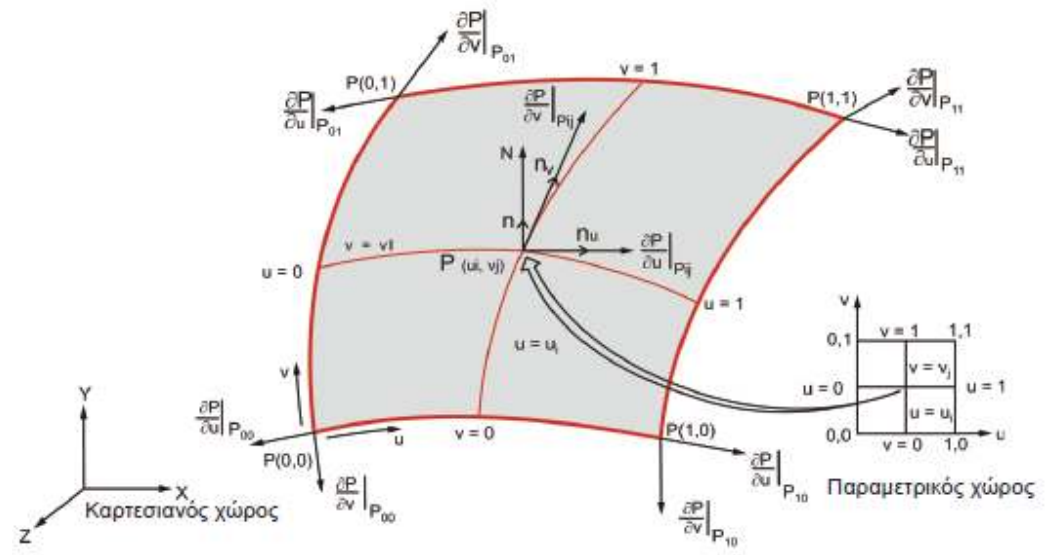
$$|P_u| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$|P_v| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$\hat{n}_u = \frac{P_u}{|P_u|}, \quad \hat{n}_v = \frac{P_v}{|P_v|},$$

ΣΧΗΜΑ 4.3

Εφαπτόμενα διανύσματα σε επιφάνεια.

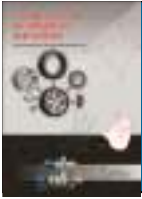


Εφαπτόμενα διανύσματα σε σφαίρα

$$P_\varphi = R \cos\theta \cos\varphi \hat{i} + R \sin\theta \cos\varphi \hat{j} - R \sin\varphi \hat{k}$$

$$P_\theta = -R \sin\theta \sin\varphi \hat{i} + R \cos\theta \sin\varphi \hat{j}$$





ΚΑΘΕΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

- Σημεία της επιφάνειας, στα οποία το εξωτερικό γινόμενο $P_u \times P_v \neq 0$
- σε αυτά ορίζεται το κάθετο διάνυσμα προς την επιφάνεια και το εφαπτόμενο επίπεδο προς την επιφάνεια

$$N(u, v) = \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} = P_u \times P_v$$

και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση:

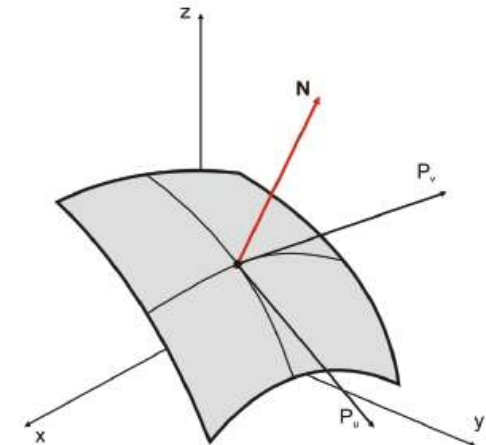
$$\hat{n} = \frac{N}{|N|} = \frac{P_u \times P_v}{|P_u \times P_v|}$$

Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σφαίρας

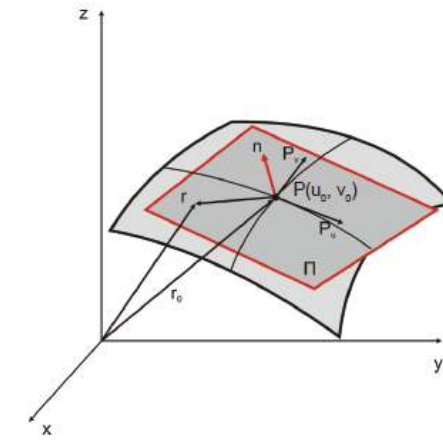
$$n = \frac{P_\varphi \times P_\theta}{|P_\varphi \times P_\theta|} = \frac{R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi i + R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi j + R^2 \cos \theta \sin \theta k}{R^2 \sin \varphi}$$

$$= \sin \varphi \cos \theta i + \sin \varphi \sin \theta j + \cos \varphi k = \frac{x}{R} i + \frac{y}{R} j + \frac{z}{R} k$$

Το κάθετο διάνυσμα σε σημείο της επιφάνειας

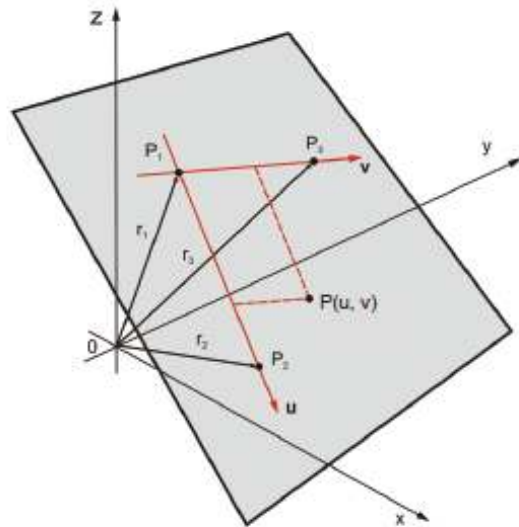


Το εφαπτόμενο επίπεδο σε σημείο της επιφάνειας.



ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΛΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

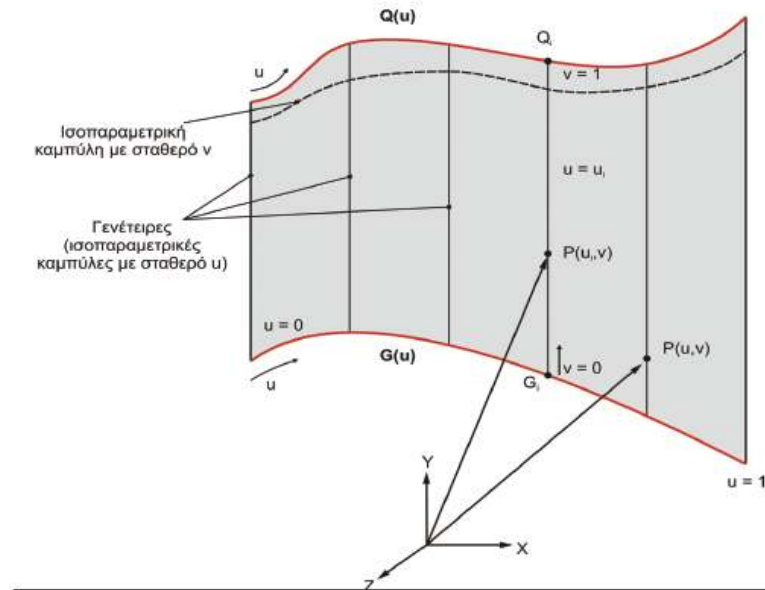
Παραμετρική περιγραφή επιπέδου από τρία σημεία P_1, P_2 και P_3 .



$$r = P(u, v) = P_1 + u(P_2 - P_1) + v(P_3 - P_1) = (1 - u - v) r_1 + u r_2 + v r_3$$

όπου, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$.

ΣΧΗΜΑ 4.11 Ορισμός και παραμετρική αναπαράσταση γραμμικής επιφάνειας.



Η παραμετρική εξίσωση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα δύο αντίστοιχα σημεία, $G_i = G(u_i)$ και $Q_i = Q(u_i)$, δίνεται από τη σχέση:

$$P(u_i, v) = G_i + v(Q_i - G_i)$$

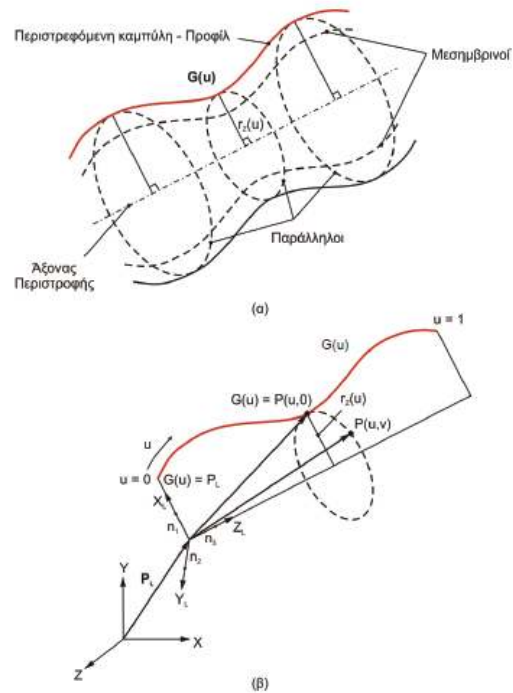
όπου v είναι η παράμετρος ορισμού του ευθύγραμμου τμήματος. Συνεπώς, η εξίσωση της επιφάνειας είναι:

$$P(u, v) = G(u) + v [Q(u) - G(u)] = (1 - v) (G(u) + v Q(u)), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

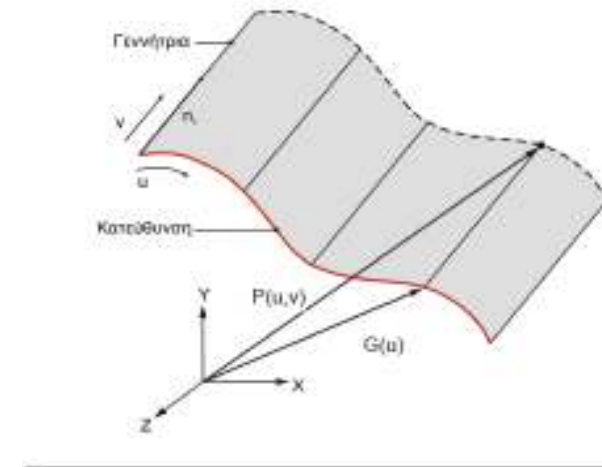


ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΛΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΣΧΗΜΑ 4.12 Παραμετρική αναπαράσταση επιφάνειας εκ περιστροφής.



ΣΧΗΜΑ 4.13 Παραμετρική αναπαράσταση τμηματικού κυλίνδρου.



$$P(u, v) = G(u) + v\hat{n}_v, \quad 0 \leq u \leq u_{\max}, \quad 0 \leq v \leq v_{\max}$$

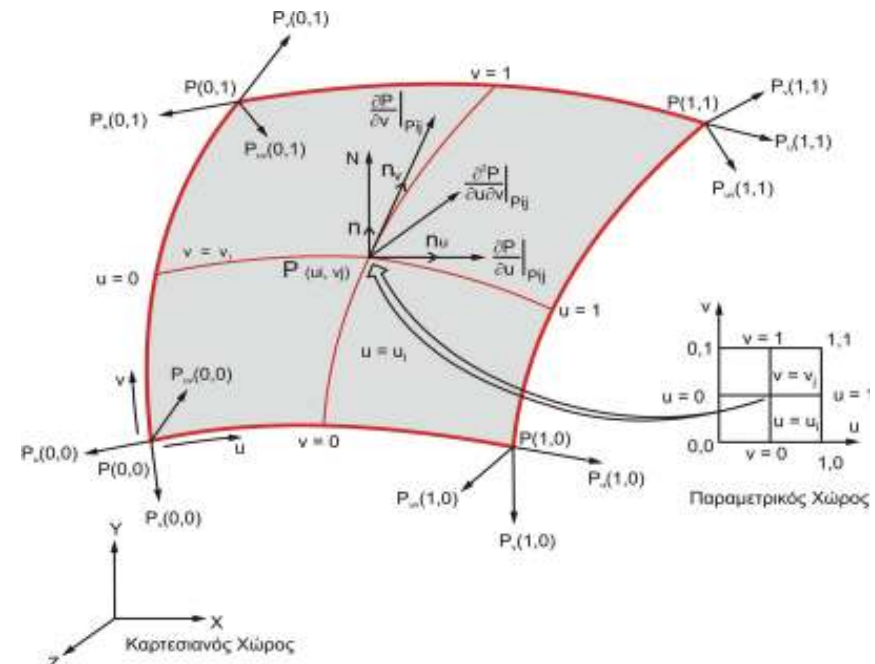
$$P(u, v) = r_z(u)\cos v\hat{n}_1 + r_z(u)\sin v\hat{n}_2 + z_L(u)\hat{n}_3, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

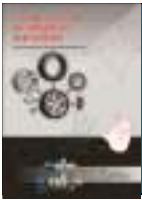


ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

- Διανυσματικοί συντελεστές:
 - Τα 4 διανύσματα θέσης στα άκρα της επιφάνειας, $P_{00} = P(0, 0)$, $P_{10} = P(1, 0)$, $P_{01} = P(0, 1)$ και $P_{11} = P(1, 1)$,
 - τα 8 εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα
 - $P_{u00} = P_u(0,0)$, $P_{u01} = P_u(0,1)$, $P_{u10} = P_u(1,0)$, $P_{u11} = P_u(1,1)$ κατά τη διεύθυνση u και
 - $P_{v00} = P_v(0,0)$, $P_{v01} = P_v(0,1)$, $P_{v10} = P_v(1,0)$, $P_{v11} = P_v(1,1)$ κατά τη διεύθυνση v και
 - τα 4 διανύσματα στρέψης στα άκρα, $P_{uv00} = P_{uv}(0,0)$, $P_{uv01} = P_{uv}(0,1)$, $P_{uv10} = P_{uv}(1,0)$, $P_{uv11} = P_{uv}(1,1)$.

Hermite δικυβική επιφάνεια





ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ HERMITE

Εξίσωση επιφάνειας $P(u,v) = U^T[M_H][B][M_H]^TV, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1,$

Πίνακες $[M_H] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{v00} & P_{v01} \\ P_{10} & P_{11} & P_{v10} & P_{v11} \\ P_{u00} & P_{u01} & P_{uv00} & P_{uv01} \\ P_{u10} & P_{u11} & P_{uv10} & P_{uv11} \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} [P] & [P_v] \\ [P_u] & [P_{uv}] \end{bmatrix}$

$$P(u,v) = \begin{bmatrix} F_1(u) & F_2(u) & F_3(u) & F_4(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_u(0,0) & P_u(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_u(1,0) & P_u(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \\ F_4(v) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ F_2(x) &= -2x^3 + 3x^2 \\ F_3(x) &= x^3 - 2x^2 + x \\ F_4(x) &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

$$U = [u^3 \ u^2 \ u \ 1], \ V = [v^3 \ v^2 \ v \ 1]$$

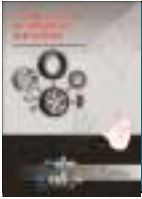
επέκταση της εξίσωσης της καμπύλης σε δύο διαστάσεις.

Για $v = 0$ και $v = 1$, ή για $u = 0$ και $u = 1$ παίρνουμε τις 4 ακραίες καμπύλες.

Και οι 4 οριακές καμπύλες είναι καμπύλες Ferguson,

Η επιφάνεια ξεκινάει από ένα σημείο εφαπτόμενο προς το αντίστοιχο διάνυσμα ως προς την παράμετρο ορισμού u ή v και καταλήγει στο άλλο ακραίο σημείο πάλι εφαπτόμενο προς το αντίστοιχο διάνυσμα.





ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ HERMITE

εφαπτόμενα διανύσματα και διανύσματα στρέψης

$$P_u(u, v) = [G_1(u)G_2(u)G_3(u)G_4(u)] \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \\ F_4(v) \end{bmatrix}$$

$$F_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$F_2(x) = -2x^3 + 3x^2$$

$$F_3(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

$$F_4(x) = x^3 - x^2$$

$$P_v(u, v) = [F_1(u)F_2(u)F_3(u)F_4(u)] \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(v) \\ G_2(v) \\ G_3(v) \\ G_4(v) \end{bmatrix}$$

$$G_1(x) = 6x^2 - 6x$$

$$G_2(x) = -6x^2 + 6x$$

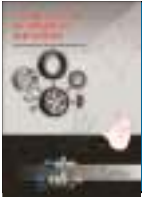
$$G_3(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$G_4(x) = 3x^2 - 2x$$

$$P_{uv}(u, v) = [G_1(u)G_2(u)G_3(u)G_4(u)] \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(v) \\ G_2(v) \\ G_3(v) \\ G_4(v) \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα στρέψης στα άκρα είναι δύσκολο να προσδιοριστούν
Όταν μηδενίζονται έχουμε μια απλή επιφάνεια Fergusson
η επιφάνεια είναι επίπεδη στα τέσσερα άκρα





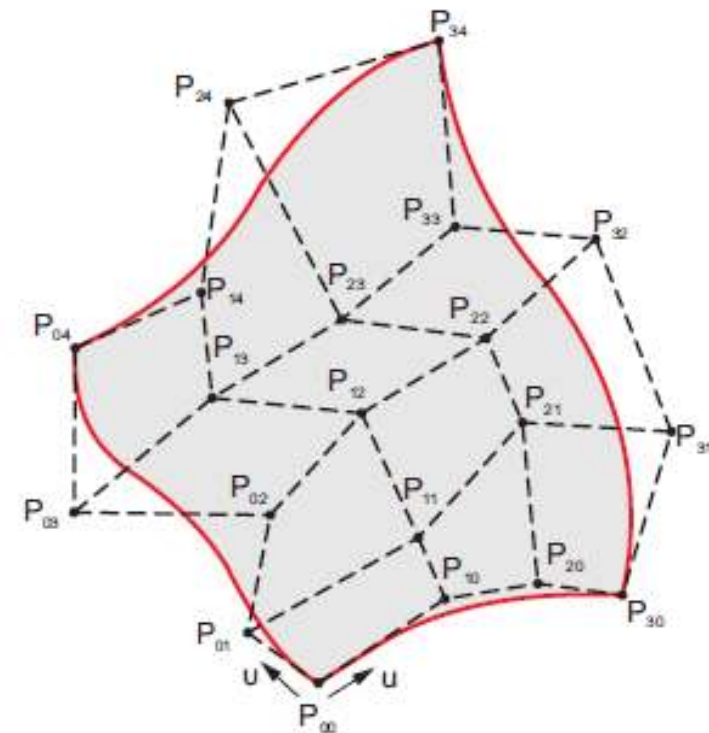
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ BEZIER

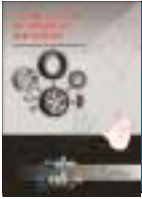
- επέκταση της καμπύλης Bézier στις δύο παραμετρικές κατευθύνσεις u και v .
- Ένας πίνακας σημείων που σχηματίζουν το πολύεδρο ελέγχου, ορίζουν την επιφάνεια κατά Bézier.
- Τα σημεία ελέγχου αποτελούν τις κορυφές του πολύεδρου ελέγχου (ή χαρακτηριστικού πολύεδρου)
- τοποθετούνται σ' ένα ορθογώνιο πίνακα $(n + 1) \times (m + 1)$.
- Εξίσωση επιφάνειας

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v), \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1,$$

- Ο βαθμός της επιφάνειας καθορίζεται από τον αριθμό των σημείων ελέγχου στην κάθε κατεύθυνση

Επιφάνεια Bézier, βαθμού 3 x 4.





ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ BEZIER

- **Ακραίες συνθήκες.** Η επιφάνεια περνάει από τα ακραία σημεία του πίνακα των ΣΕ. Περνάει από τα σημεία P_{00} , P_{0m} , P_{n0} και P_{nm} .
- Εφάπτεται στις ακραίες ακμές του πολυέδρου ελέγχου και προς τις δύο κατευθύνσεις u και v .
- Εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα:

$$P_{u00} = n(P_{10} - P_{00})$$

$$P_{un0} = n(P_{n0} - P_{(n-1)0}) \text{ για την ακμή } v = 0$$

$$P_{u0m} = n(P_{1m} - P_{0m})$$

$$P_{unm} = n(P_{nm} - P_{(n-1)m}) \text{ για την ακμή } v = 1$$

$$P_{v00} = m(P_{01} - P_{00})$$

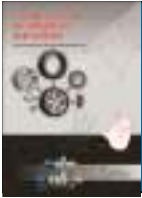
$$P_{u0m} = m(P_{0m} - P_{0(m-1)}) \text{ για την ακμή } u = 0$$

$$P_{vn0} = m(P_{n1} - P_{n0})$$

$$P_{unm} = m(P_{nm} - P_{n(m-1)}) \text{ για την ακμή } u = 1$$

- **Όρια επιφάνειας και ισοπαραμετρικές καμπύλες.** Τα όρια της επιφάνειας Bézier είναι καμπύλες Bézier
 - ορίζονται από τα ακραία σημεία του ορθογώνιου πίνακα σημείων.
 - Η ισοπαραμετρική για $v = 0$ ορίζεται από τα ΣΕ P_{i0} ,
 - η ισοπαραμετρική για $v = 1$ ορίζεται από τα ΣΕ P_{i1} , ($0 \leq i \leq n$).
- Ισοπαραμετρικές καμπύλες πάνω στην επιφάνεια είναι καμπύλες Bézier,
 - τα ΣΕ δεν ταυτίζονται με τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας.
 - ισοπαραμετρική για $u = 0,5$.
 - Ορίζονται οι καμπύλες Bézier σε κάθε σειρά σημείων ελέγχου.
 - Ορίζονται $m + 1$ καμπύλες Bézier C_j , n βαθμού,
 - Σε καθεμιά καμπύλη C_i ορίζεται το σημείο $C_i(u=0,5)$.
 - Τα σημεία $C_i(u)$ είναι τα ζητούμενα ΣΕ της ισοπαραμετρικής καμπύλης

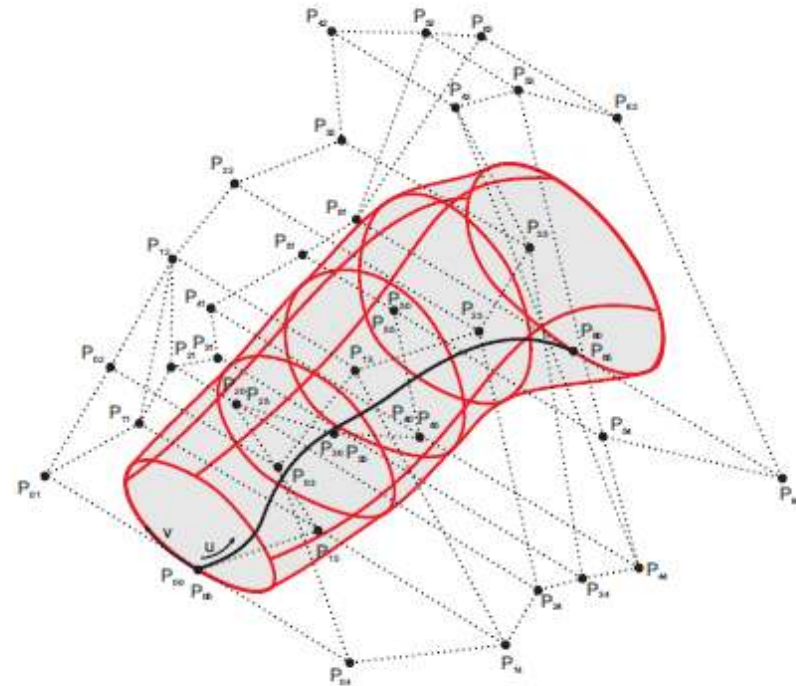


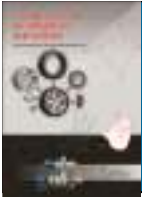


ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ BEZIER

- **Κλειστό περίβλημα.**
 - Η τελική επιφάνεια περιορίζεται μέσα στο κυρτό πολύεδρο που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου
- **Μεταβολή μορφής.** Από τα ΣΕ, με αλλαγή της θέσης ενός ή περισσότερων σημείων ελέγχου.
 - Αλλάζει η μορφή όλης της επιφάνειας,
 - Δεν επηρεάζονται οι οριακές συνθήκες που αναφέρονται στην πρώτη ιδιότητα
- **Κλειστή επιφάνεια.** Δημιουργείται από ένα κλειστό πολύεδρο ελέγχου

ΣΧΗΜΑ 4.18 Κλειστή επιφάνεια Bézier μαζί με το πολύγωνο ελέγχου.



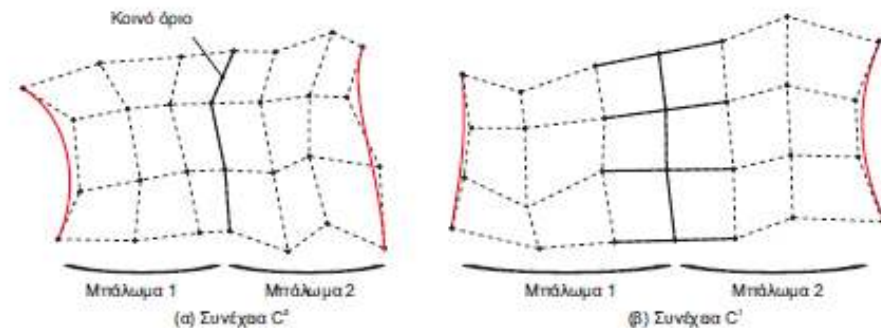


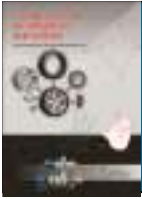
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ BEZIER

- **Βαθμός επιφάνειας.** Ο βαθμός της επιφάνειας σε καθεμιά από τις δύο κατευθύνσεις εξαρτάται από τον αριθμό των σημείων ελέγχου σε κάθε κατεύθυνση.
- **Σύνδεση επιφανειών Bézier και συνθήκες συνέχειας.**
 - καθορίζεται από τη σχετική θέση των οριακών σημείων ελέγχου στη σύνδεση των μπαλωμάτων.
 - Σύνδεση με C^0 συνέχεια, όταν έχουν μόνο κοινή οριακή καμπύλη.
 - Σύνδεση με C^1 συνέχεια, όταν τα δύο τελευταία σημεία ελέγχου κάθε σειράς ή στήλης σημείων ελέγχου της πρώτης επιφάνειας, είναι στην ίδια ευθεία με τα δύο πρώτα σημεία ελέγχου της αντίστοιχης σειράς ή στήλης του δεύτερου μπαλώματος και ο λόγος των μηκών τους είναι αντιστρόφως ανάλογος του βαθμού των μπαλωμάτων σε αυτή την κατεύθυνση

ΣΧΗΜΑ 4.19

Σύνθετη επιφάνεια Bézier, με (α) συνέχεια C^0 , και (β) συνέχεια C^1 .





ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DE CASTELJAU

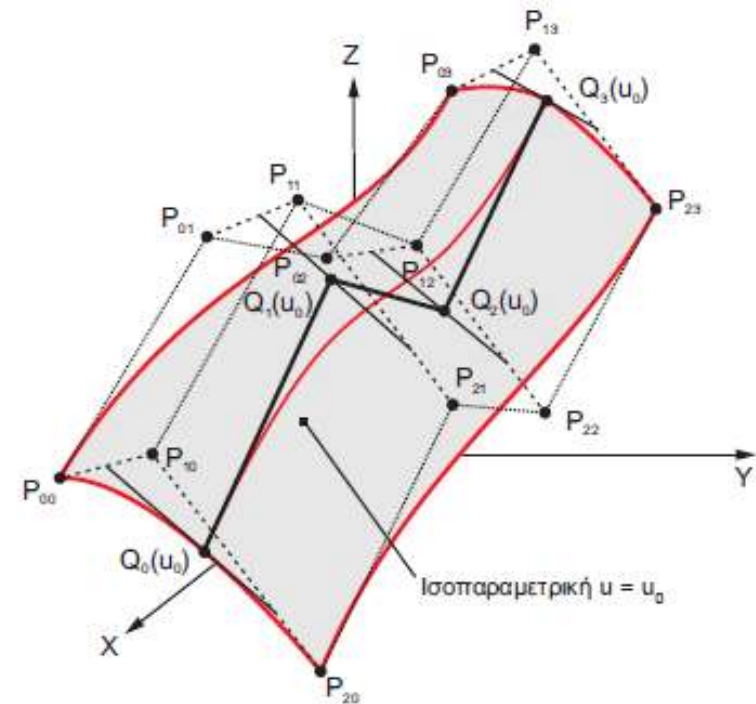
- Ισχύει ο αλγόριθμος de Casteljau για
 - εύρεση σημείων πάνω στην επιφάνεια,
 - διαίρεση της επιφάνειας
 - ανύψωση του βαθμού προς τη μία ή και τις δύο κατευθύνσεις
 - Μεθοδολογία λειτουργίας αλγορίθμου
- Ο υπολογισμός σημείου στην επιφάνεια αρχίζοντας από την u κατεύθυνση, απαιτεί:

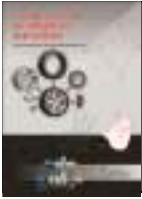
$n(n+1)(m+1)/2 + m(m+1)/2$ υπολογισμούς,

- αρχίζοντας από την v κατεύθυνση απαιτεί:

$m(m+1)(n+1)/2 + n(n+1)/2$ υπολογισμούς

ΣΧΗΜΑ 4.20 Ο αλγόριθμος de Casteljau για επιφάνεια Bézier.

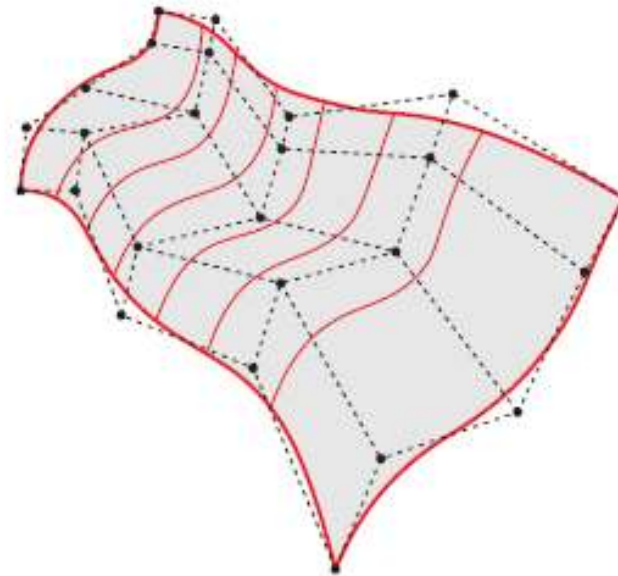


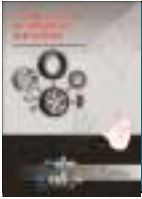


ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ B-SPLINES

- Ορίζονται από πλέγμα σημείων, διατεταγμένων σε πίνακα.
- Τα σημεία αποτελούν τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας και ορίζουν το πολυέδρο ελέγχου.
- Η επιφάνεια προσεγγίζει τα σημεία ελέγχου (ή διέρχεται από ορισμένα σημεία) και μεταβάλλοντας τις θέσεις των σημείων ελέγχου, μεταβάλλουμε και τη μορφή της επιφάνειας.
- Ο βαθμός της επιφάνειας επιλέγεται από το χρήστη, για καθεμιά από τις δύο κατευθύνσεις ορισμού u και v ορισμού της επιφάνειας και είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των σημείων ελέγχου.
- Ο βαθμός δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ίδιος στις δύο διευθύνσεις ορισμού της επιφάνειας.
- Μετατόπιση ενός σημείου ελέγχου επηρεάζει μόνον ένα τμήμα πάνω στην επιφάνεια και όχι όλη την επιφάνεια,
- δυνατότητα της τοπικής μεταβολής

Επιφάνεια B-Spline που ορίζεται από πλέγμα σημείων ελέγχου διατεταγμένων σε πίνακα και αποτελούν το πολυέδρο ελέγχου.





ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ B-SPLINES

- Εξίσωση επιφάνειας που ορίζεται από $(n + 1) \times (m + 1)$ ΣΕ

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \quad 0 \leq u \leq u_{\max}, 0 \leq v \leq v_{\max}$$

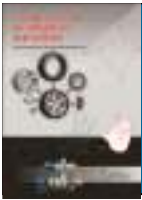
Οι N_{ij} ονομάζονται βασικές συναρτήσεις και ορίζονται δύο για κάθε ΣΕ, μια για κάθε κατεύθυνση

- Διανύσματα κόμβων.**
 - Ορίζονται δύο διανύσματα κόμβων, ένα για καθεμιά από τις δύο κατευθύνσεις ορισμού u και v .
 - Οι κόμβοι στις διευθύνσεις u και v είναι σταθεροί για κάθε σειρά ή στήλη σημείων ελέγχου, αλλά δεν είναι αναγκαστικά ίσοι μεταξύ τους.
- Καθορίζεται
 - το είδος του διανύσματος,
 - ο βαθμός της επιφάνειας σε κάθε διεύθυνση, και
 - Ανάλογα με τον αριθμό των ΣΕ, σε κάθε γραμμή ή στήλη των σημείων ελέγχου, καθορίζονται οι διακριτές τιμές του διανύσματος κόμβων

Παράδειγμα

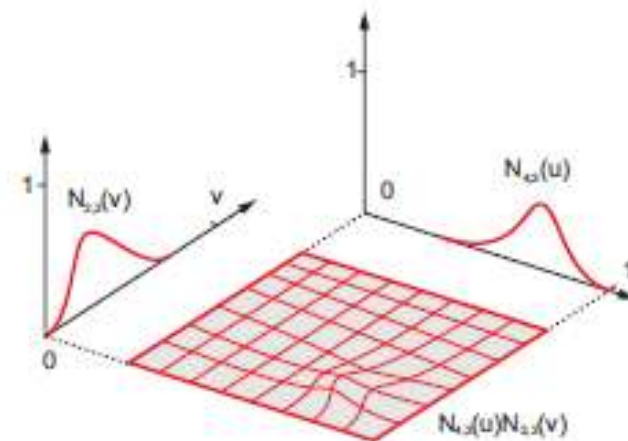
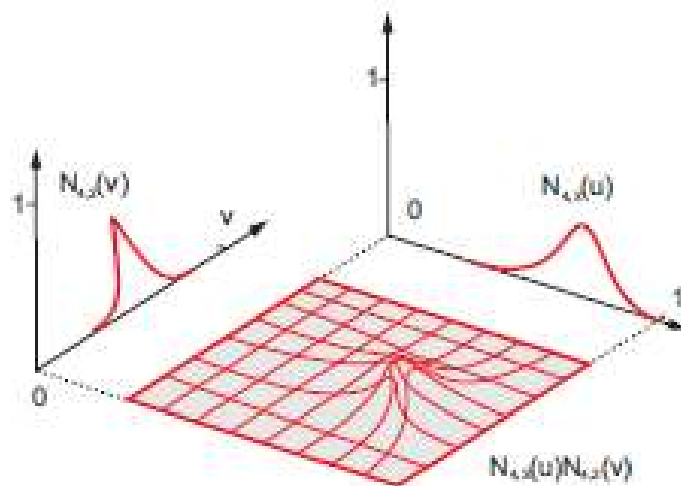
- Επιφάνεια B-Spline ορίζεται από 8×7 σημεία ελέγχου και
- είναι βαθμού 3×2 για τις διευθύνσεις u και v αντίστοιχα.
- αριθμός των κόμβων κατά τη διεύθυνση u $m_u = n_u + p_u + 1 = 7 + 3 + 1 = 11$,
- και ως προς τη διεύθυνση v $m_v = n_v + p_v + 1 = 6 + 2 + 1 = 9$.
- Συνεπώς τα δύο διανύσματα είναι,
 $U = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5] = [0, 0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1]$
 και
 $V = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5] = [0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1]$.

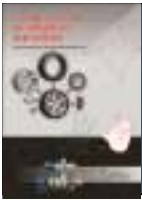




ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Ο ορισμός των βασικών συναρτήσεων για κάθε σημείο ελέγχου βασίζεται στον ορισμό των δύο βασικών συναρτήσεων του σημείου ως προς τις δύο κατευθύνσεις και μετά από τον πολλαπλασιασμό τους.
- Οι βασικές συναρτήσεις των σημείων P4,4 και P4,2 ορίζονται από το γινόμενο των $N_{4,3}(u)N_{4,2}(v)$ και $N_{4,3}(u)N_{2,2}(v)$
- Διανύσματα κόμβων $U = (0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4)$ και $V = (0,0,0,1,2,3,3,4,5,5,5)$.



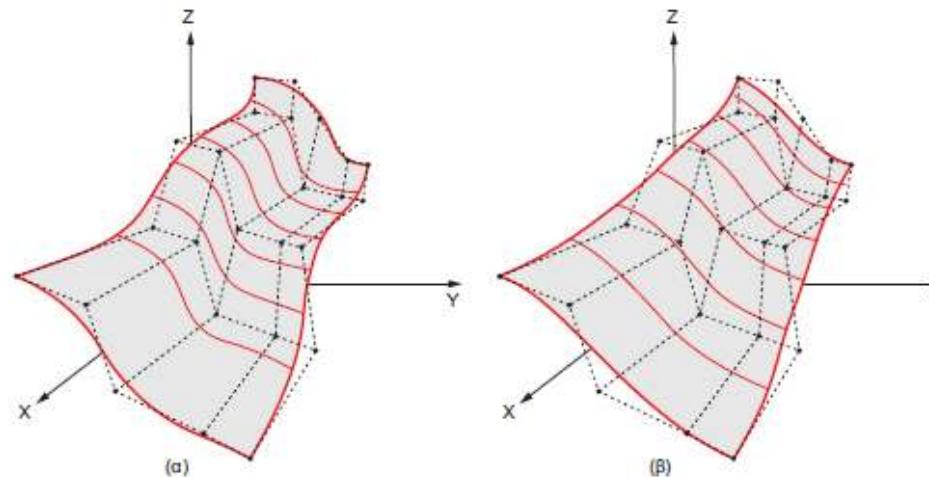


ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

- ορίζεται ο βαθμός της επιφάνειας σε καθεμία από τις δύο κατευθύνσεις
 - ορίζεται ανεξάρτητα ο βαθμός ως προς κάθε κατεύθυνση
- ορίζεται από ένα σύνολο επιμέρους επιφανειών, και η συνέχεια μεταξύ τους διατηρείται από τις ιδιότητες των συναρτήσεων μείξης των σημείων ελέγχου, δηλαδή των βασικών συναρτήσεων

ΣΧΗΜΑ 4.23

Δύο επιφάνειες B-Spline που ορίζονται από το ίδιο πολύγωνο ελέγχου (α) επιφάνεια βαθμού 2 x 2, (β) επιφάνεια βαθμού 4 x 4.



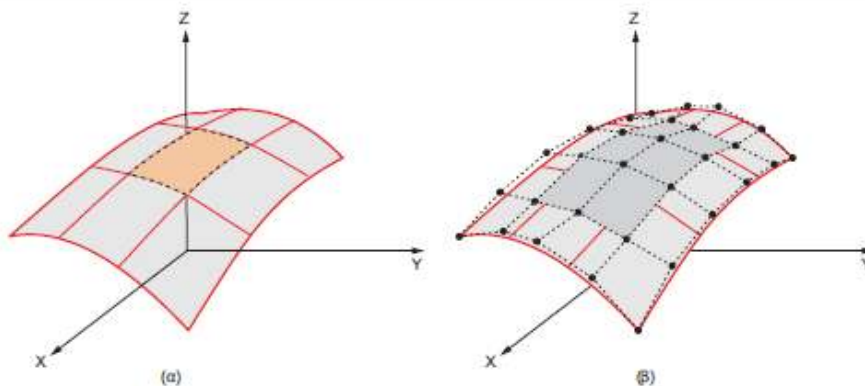
Το πολύγωνο ελέγχου αποτελείται από 5 x 5 ΣΕ.
Η διτετράγωνη επιφάνεια αποτελείται από 3 x 3 επιμέρους επιφάνειες
Η 4 x 4 βαθμού επιφάνεια είναι μια επιφάνεια Bézier



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ B-SPLINE

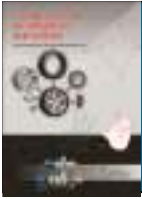
- Οι επιφάνειες B-Spline έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και οι αντίστοιχες καμπύλες.
- **Ακραίες συνθήκες.** Η ανοικτή επιφάνεια περνάει από τα ακραία σημεία ελέγχου στον πίνακα των σημείων ελέγχου και ξεκινάει και καταλήγει εφαπτόμενη προς τα αντίστοιχα τμήματα του αντίστοιχου πολυγώνου ελέγχου.
 - Οι καμπύλες στα όρια της επιφάνειας ορίζονται μόνον από τα αντίστοιχα ακραία σημεία ελέγχου και είναι καμπύλες B-Splines.
- **Μετασχηματισμοί.** Οι μετασχηματισμοί στην επιφάνεια εφαρμόζονται στα σημεία ελέγχου της επιφάνειας.
- **Όριο μεταβολής επιφάνειας.** Ισχύει η ιδιότητα του κυρτού πολυέδρου, όπως εφαρμόζεται και στις καμπύλες. Η επιφάνεια περικλείεται στο κλειστό πολύεδρο που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου
 - Ισχύουν και τα τοπικά κλειστά πολύεδρα για κάθε τμήμα της επιφάνειας που ορίζεται σ' ένα υποσύνολο του διανύσματος κόμβων.

ΣΧΗΜΑ 4.24 (α) Επιφάνεια B-Spline βαθμού 3 x 2. (β) Η ιδιότητα του κυρτού πολυέδρου.



ΣΕ = 6X5, ΒΑΘΜΟΣ 3X2,
 ΔΚ [0,0,0,0,1,2,3,3,3,3] [0,0,0,1,2,3,3,3]
 3X3 ΤΜΗΜΑΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
 ΤΟ ΤΜΗΜΑ [1,2) [1,2) ΠΕΡΙΚΛΕΙΕΤΑΙ
 ΣΤΟ ΚΠ
 $P_{ij}, M \ 1 \leq i \leq 4, \ 1 \leq j \leq 3.$





ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ COONS

- παρεμβάλλουν μια επιφάνεια σε τέσσερις καμπύλες στο χώρο, που τέμνονται μεταξύ τους και σχηματίζουν ένα κλειστό τετράπλευρο
- οι απέναντι καμπύλες έχουν την ίδια παραμετροποίηση
- Το είδος της επιφάνειας που δημιουργείται εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες στα όρια της επιφάνειας και η παρεμβολή μπορεί να είναι από την απλή διγραμμική παρεμβολή μέχρι την πλήρη δικυβική παρεμβολή

ΣΧΗΜΑ 4.32 Οριακές καμπύλες στον ορισμό μπαλώματος Coons.

