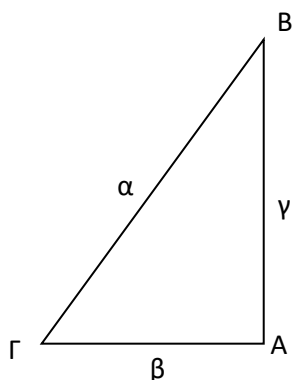


ΒΑΣΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Για την γωνία Γ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει :



$$\eta\mu(\Gamma) = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \sigma\upsilon\nu(\Gamma) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \epsilon\phi(\Gamma) = \frac{\gamma}{\beta}$$

Με την βοήθεια των σχέσεων αυτών, μπορούμε να υπολογίζουμε :

- Τις υπόλοιπες πλευρές αν μας δίνεται μια πλευρά και μια γωνία. Πώς;
- Τις γωνίες και την άλλη πλευρά, αν μας δίνονται δύο πλευρές. Πως;

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για την γωνία B

Υπενθυμίζεται ότι ισχύει επίσης το Πυθαγόρειο θεώρημα :

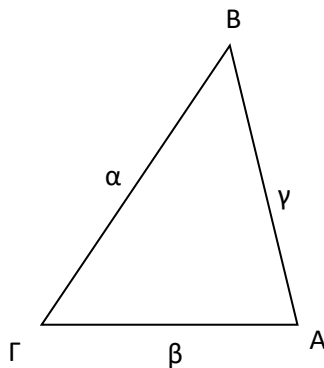
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Τα παραπάνω ισχύουν μόνο για ορθογώνιο τρίγωνο.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

A. Θεώρημα των συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει το «γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα» ή αλλιώς νόμος των συνημιτόνων :



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu(A)$$

Παρατηρείστε ότι, αν η γωνία A είναι ορθή, τότε το $\sigma\upsilon\nu(A) = 0$ και η παραπάνω σχέση είναι το πυθαγόρειο θεώρημα.

Αντίστοιχες σχέσεις μπορούμε να γράψουμε και για τις υπόλοιπες γωνίες :

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu(B)$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu(\Gamma)$$

B. Θεώρημα των ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu(A)} = \frac{\beta}{\eta\mu(B)} = \frac{\gamma}{\eta\mu(\Gamma)}$$

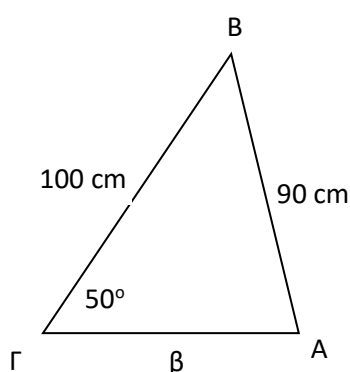
Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων μπορούμε, αν μας δίνονται τρία στοιχεία ενός τριγώνου¹, να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα τρία, να **επιλύσουμε** δηλαδή το τρίγωνο. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση που μας δίδονται τρεις γωνίες – το τρίγωνο τότε δεν επιλύεται.

Πώς ;

- Αν μας δίδονται τα μήκη των πλευρών : Με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος συνημιτόνων υπολογίζουμε τις γωνίες. Πως αλλιώς;
- Αν μας δίδονται δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία : Και πάλι με την βοήθεια του θεωρήματος συνημιτόνων υπολογίζουμε την τρίτη πλευρά και στην συνέχεια και τις υπόλοιπες γωνίες.
- Αν μας δίδονται δύο πλευρές και μια γωνία- όχι η περιεχόμενη : Με την βοήθεια του θεωρήματος ημιτόνων υπολογίζουμε μια ακόμη γωνία – οπότε και η τρίτη είναι γνωστή αφού το άθροισμα των γωνιών είναι 180° . Στην συνέχεια με μια ακόμη εφαρμογή του θεωρήματος ημιτόνων υπολογίζουμε και την τρίτη πλευρά. Πως αλλιώς;
- Αν μας δίδονται δύο γωνίες και μια πλευρά : Με την βοήθεια του θεωρήματος ημιτόνων υπολογίζουμε μια ακόμη πλευρά και στην συνέχεια προχωρούμε όπως πριν..
- Αν στην φάση της επίλυσης ενός τριγώνου, έχετε την επιλογή να χρησιμοποιήσετε είτε το θεώρημα των συνημιτόνων είτε το θεώρημα των ημιτόνων για να υπολογίσετε μια άγνωστη γωνία, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα των συνημιτόνων. Το συνημίτονο της γωνίας που θα υπολογίσετε με τον τρόπο είναι ένας αριθμός μεταξύ -1 και +1 , οπότε η γωνία που θα προκύψει είναι μεταξύ 180° και 0° – αυτό που χρειαζόμαστε δηλαδή.

Παράδειγμα

Να επιλυθεί το τρίγωνο της εικόνας.



Εφαρμόζουμε τον νόμο των ημιτόνων :

$$\frac{\alpha}{\eta\mu(A)} = \frac{\gamma}{\eta\mu(\Gamma)} \Rightarrow \frac{100}{\eta\mu(A)} = \frac{90}{\eta\mu(50)} \Rightarrow \eta\mu(A) = \eta\mu(50) \frac{100}{90} = 0.851$$

$$\Rightarrow \mathbf{A = 58.3^\circ}$$

$$B = 180^\circ - A - \Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{B = 71.7^\circ}$$

Μια ακόμη εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων :

$$\frac{\beta}{\eta\mu(B)} = \frac{\gamma}{\eta\mu(\Gamma)} \Rightarrow \frac{\beta}{\eta\mu(71.7)} = \frac{90}{\eta\mu(50)} \Rightarrow \beta = 90 \frac{\eta\mu(71.7)}{\eta\mu(50)} \Rightarrow \beta = 111.5 \text{ cm}$$

¹ Στοιχεία τριγώνου : Τα μήκη των πλευρών και οι γωνίες του.

Ασκήσεις

Επιλύστε τα τρίγωνα – υπολογίστε δηλαδή τα στοιχεία που δεν σας δίνονται :

1. $\alpha=1\text{m}$, $\beta=60\text{cm}$, $\gamma=80\text{ cm}$.
2. $\alpha=60\text{ cm}$, $\beta=70\text{ cm}$, $\Gamma= 110^\circ$
3. $\alpha=100\text{ cm}$, $\beta=120\text{ cm}$, $B= 70^\circ$
4. $\alpha=100\text{ cm}$, $\Gamma= 50^\circ$, $B= 70^\circ$

Απαντήσεις

1. $A= 90^\circ$, $B=37^\circ$, $\Gamma=53^\circ$
2. $A=32^\circ$, $B=38^\circ$, $\gamma=106.64\text{ cm}$
3. $A=52^\circ$, $\Gamma=58^\circ$, $\gamma = 108.83\text{ cm}$
4. $A=60^\circ$, $\gamma=88.46\text{ cm}$, $\beta=108.51\text{ cm}$