

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

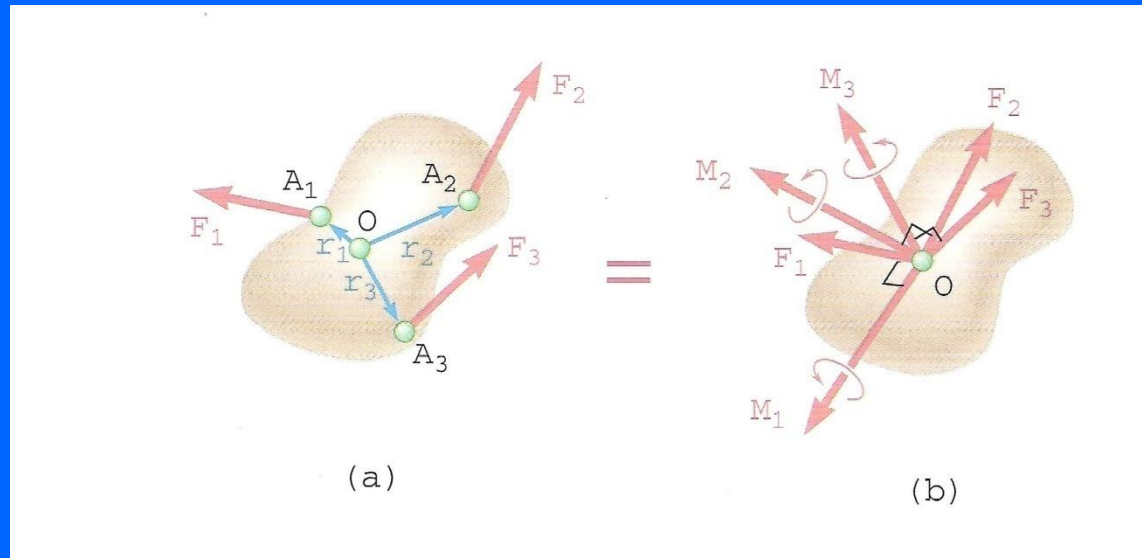
Στατική

Ισορροπία του στερεού σώματος

Διδάσκων

Δρ Καββουσάνος Μανόλης

Ισορροπία στερεού σώματος



Πρέπει να ισχύει : $\sum \vec{F} = 0$
ΚΑΙ

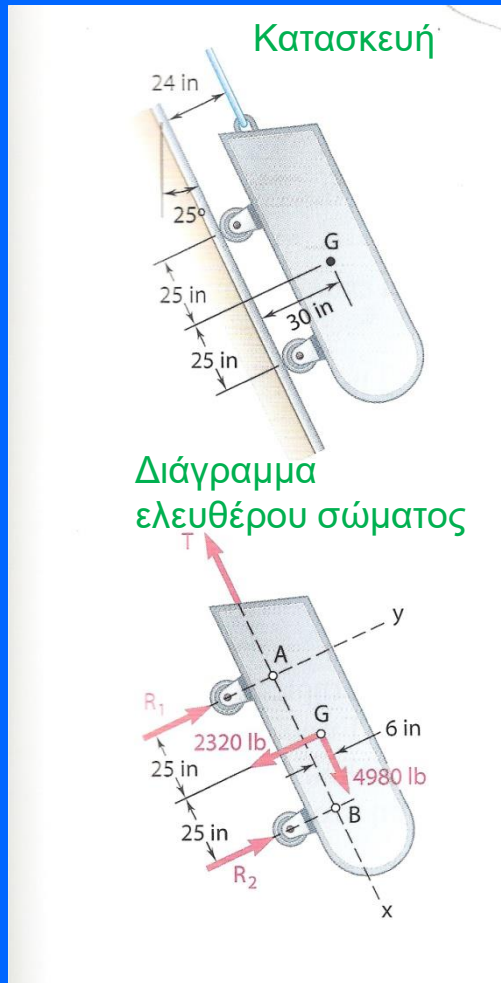
Για τυχόν σημείο O του χώρου : $\sum \vec{M}_O = 0$

Αναλυτικά, ως προς σύστημα συντεταγμένων XYZ:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x &= 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0\end{aligned}$$

Ισορροπία δυνάμεων
Ισορροπία ροπών

Διάγραμμα ελευθέρου σώματος



-> Επιλέγουμε το σώμα του οποίου η ισορροπία μας ενδιαφέρει και σχεδιάζουμε το περίγραμμά του απομονωμένο από τα υπόλοιπα σώματα.

-> «Τοποθετούμε» (σημείο εφαρμογής) **όλες τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται** στο σώμα : Αντιδράσεις στα σημεία στήριξης, βάρος και δυνάμεις από τα σώματα που «αποκόπτονται».

-> «Δείχνουμε» όποια άλλα στοιχεία είναι γνωστά από τις εξωτερικές δυνάμεις : μέτρο ή κατεύθυνση

-> Δείχνουμε όποιες διαστάσεις είναι γνωστές

Αντιδράσεις σε στηρίξεις και συνδέσεις

Στηρίξεις «δύο διαστάσεων» – 2D

268 □ Κεφάλαιο 4

Στήριγμα ή Σύνδεση	Αντιδράσεις	Αριθμός Αγνώστων
Κυλίσεις 	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1
Κοντό καλώδιο  Βραχύς σύνδεσμος 	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1
Κολάρο πάνω σε μια άνευ τριβής ράβδο 	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1
Άρθρωση 	Δύναμη άγνωστης κατεύθυνσης	2
Επιφάνεια με τριβή 	Δύναμη άγνωστης κατεύθυνσης και ροπή	3

-> Στηρίξεις ισοδύναμες με μια δύναμη με γνωστή γραμμή επενέργειας : **κυλίσεις, επιφάνειες χωρίς τριβή.** Εμποδίζουν την κίνηση του σώματος σε μια μόνο κατεύθυνση.

1 Άγνωστος : Το μέτρο της δύναμης

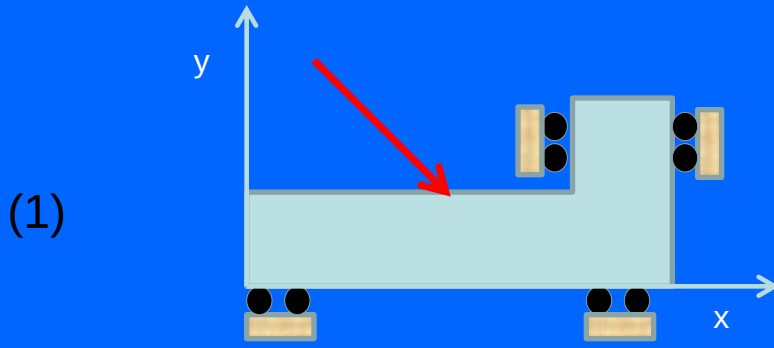
-> Στηρίξεις ισοδύναμες με μια δύναμη άγνωστη κατά μέτρο και κατεύθυνση : **αρθρώσεις, επιφάνειες με τριβή.** Εμποδίζουν την κίνηση του σώματος προς όλες τις κατευθύνσεις – επιτρέπουν περιστροφή.

2 Άγνωστοι : Μέτρο και κατεύθυνση

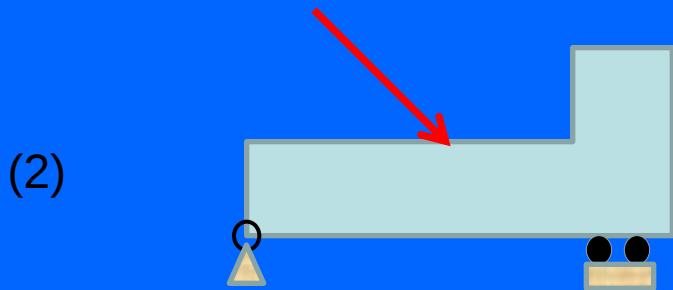
-> Στηρίξεις ισοδύναμες με μια δύναμη και μια ροπή : **πακτώσεις.** Εμποδίζουν οποιαδήποτε κίνηση ή περιστροφή του σώματος.

3 Άγνωστοι : Συνήθως οι δύο συνιστώσες της δύναμης και η ροπή

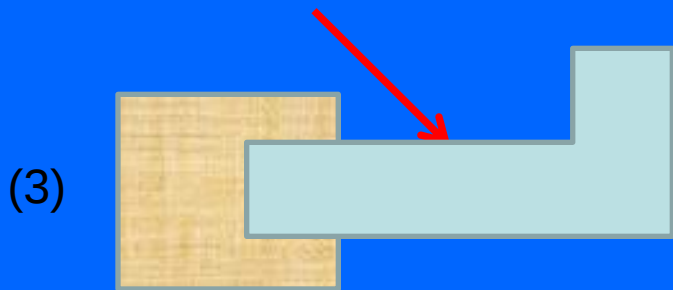
Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις



-> Το στερεό σώμα του σχήματος έχει σταθερό πάχος (κατά τον άξονα z). Την ισορροπία του μπορούμε να εξετάζουμε τότε στις δύο διαστάσεις - επίπεδο xy .



-> Μια οποιαδήποτε μετακίνηση του σώματος στο επίπεδο αυτό μπορεί να αναλυθεί σε : μια μεταφορά κατά τον άξονα των x , μια μεταφορά κατά τον άξονα y και μια περιστροφή. Λέμε ότι το σώμα διαθέτει 3 βαθμούς ελευθερίας στο επίπεδο.



-> Προκειμένου να αναγκάσουμε το σώμα να ισορροπήσει υπό την επίδραση τυχουσών δυνάμεων πρέπει να "περιορίσουμε" και τους τρεις αυτούς βαθμούς ελευθερίας.

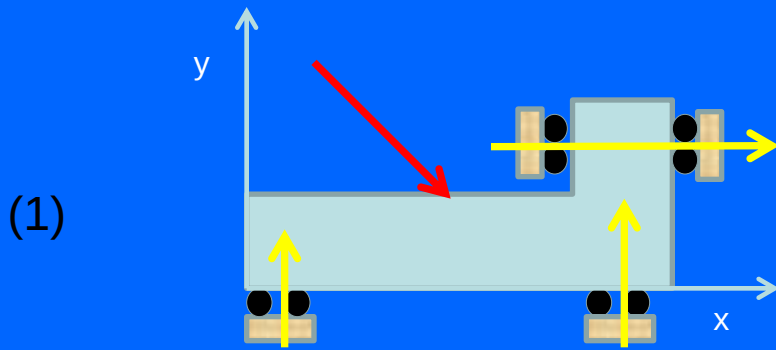
-> Στο Σχήμα φαίνονται τρεις τρόποι να κάνουμε κάτι τέτοιο :

(1) Με χρήση τριών κυλίσεων

(2) Με χρήση μιας άρθρωσης και μιας κύλισης

(3) Με χρήση μιας πάκτωσης

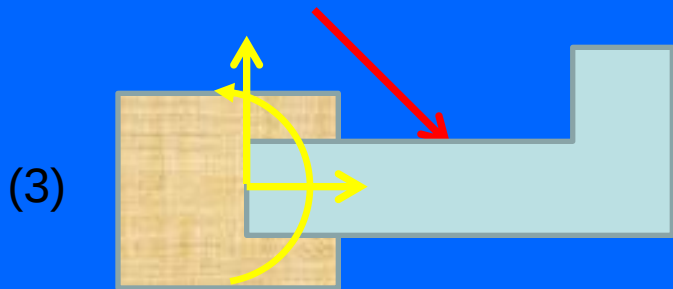
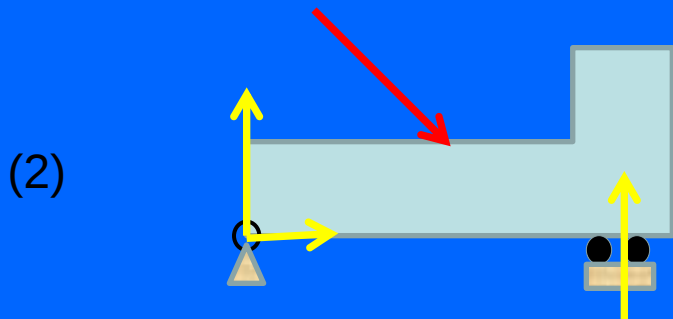
Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις



Για την περίπτωση του επιπέδου, οι συνθήκες ισορροπίας του σώματος "εκκρίνουν" στις εξής :

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

όπου O τυχόν σημείο του επιπέδου.

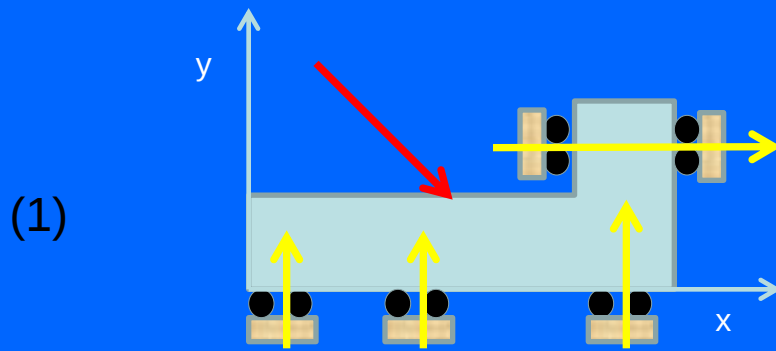


Αν οι εξωτερικές δυνάμεις είναι γνωστές, τότε στις παραπάνω 3 εξισώσεις, μόνοι άγνωστοι είναι οι όποιες τρεις αντιδράσεις των στηρίξεων, οι οποίες μπορούν να προσδιορισθούν με λύση του συστήματος.

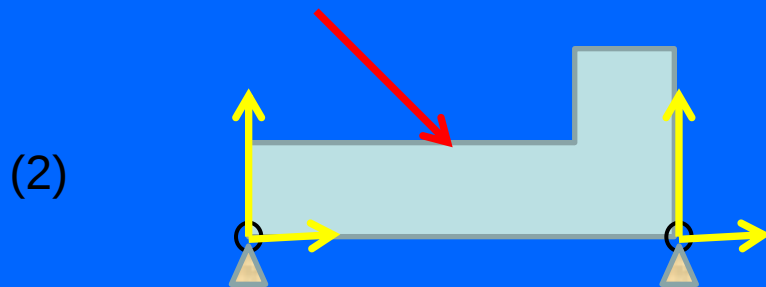
Οι τρόποι "στήριξης" που φαίνονται στο σχήμα επιλέχθηκαν κατά τέτοιο τρόπο που να υπάρχουν τρεις μόνο άγνωστες αντιδράσεις (δυνάμεις ή ροπές) οι οποίες μπορούν να προσδιορισθούν με επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας.

Λέμε τότε ότι οι αντιδράσεις είναι "στατικά προσδιοριζόμενες" (statically determined). Λέμε επίσης ότι ο "φορέας είναι ισοστατικός".

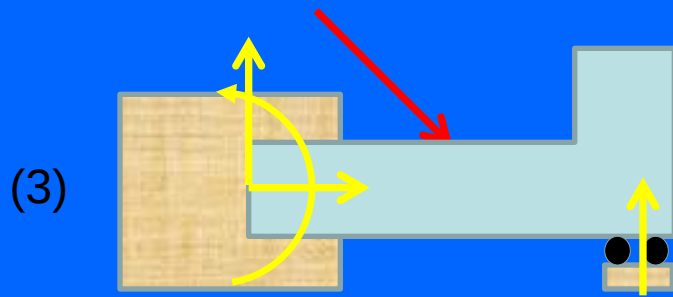
Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις



Στηρίξεις με "στατικά προσδιοριζόμενες" αντιδράσεις δεν είναι οι μοναδικές που επιτρέπονται στις κατασκευές.



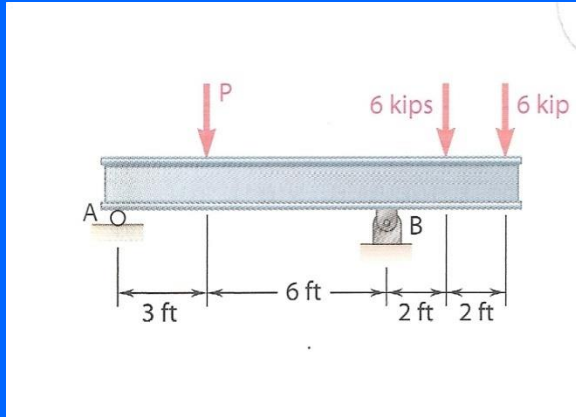
Στο Σχήμα φαίνονται μερικές στηρίξεις όπου οι αντιδράσεις είναι περισσότερες από τρεις. Λέμε τότε ότι οι αντιδράσεις είναι "στατικά μη προσδιοριζόμενες" ή ότι ο φορέας είναι **"υπερστατικός"**.



Στις περιπτώσεις αυτές οι αντιδράσεις δεν μπορούν κατά κανόνα να προσδιορισθούν από τις εξισώσεις ισορροπίας : Μας χρειάζονται άλλες μέθοδοι που λαμβάνουν υπ' όψιν το υλικό και τις παραμορφώσεις που υφίσταται εξ αιτίας των φορτίσεων. (Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, "Σχεδιασμός Μηχανών με Η/Υ")

Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα



Η δοκός του σχήματος στηρίζεται στο σημείο A με κύλιση και στο σημείο B με άρθρωση. Να βρεθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις αν το βάρος θεωρηθεί αμελητέο.

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A + B_y + (-15) + (-6) + (-6) = 0 \Rightarrow$$

$$A + B_y = + 27 \text{ KN} \quad (1)$$

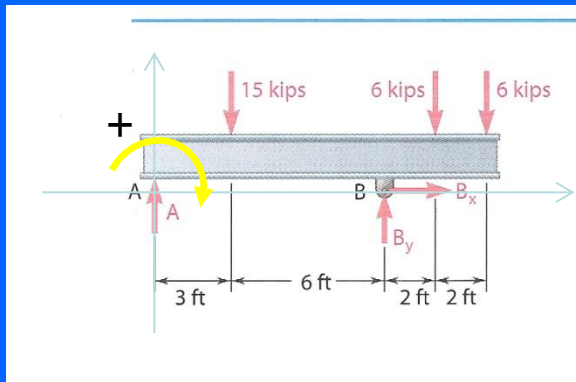
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + (15 \cdot 3) - (B_y \cdot 9) + (6 \cdot 11) + (6 \cdot 13) = 0 \Rightarrow$$

$$B_y = + 21 \text{ KN}$$

και από την (1)

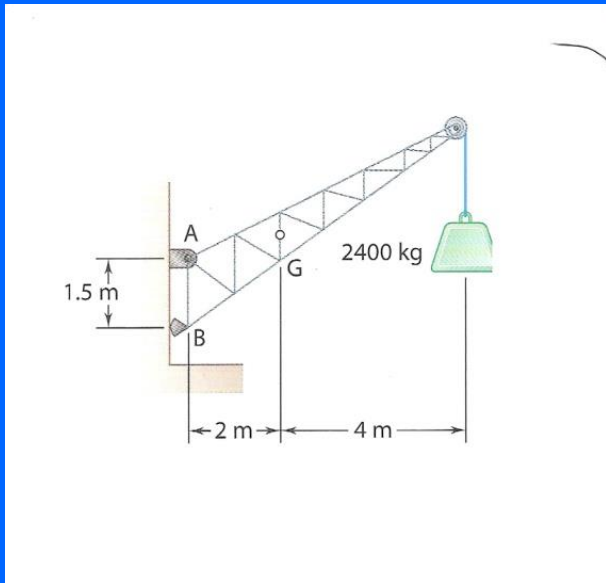
$$A = + 6 \text{ KN}$$

Διάγραμμα ελευθέρου σώματος



Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα



Γερανός με μάζα 1000 Kg στηρίζεται στο σημείο A με άρθρωση και στο B με κύλιση. Υπολογίσετε τις αντιδράσεις στα σημεία στήριξης όταν σηκώνει κιβώτιο μάζας 2400 Kg.

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \mathbf{A_x + B = 0} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + (-9.81) + (-23.5) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{A_y = + 33.3 \text{ KN}}$$

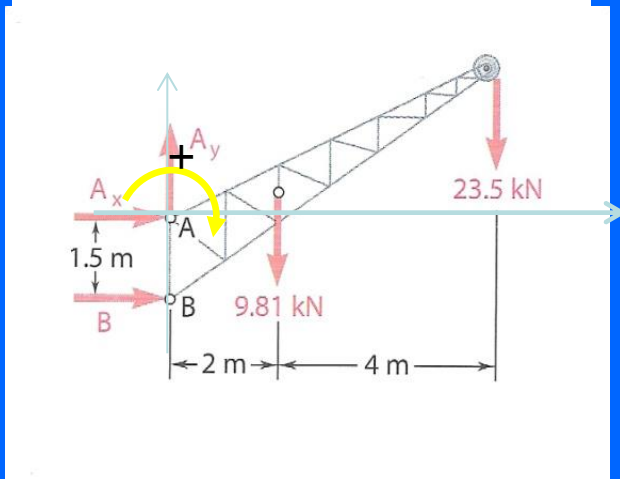
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(B \cdot 1.5) + (9.81 \cdot 2) + (23.5 \cdot 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{B = + 107.1 \text{ KN}}$$

και από την (1)

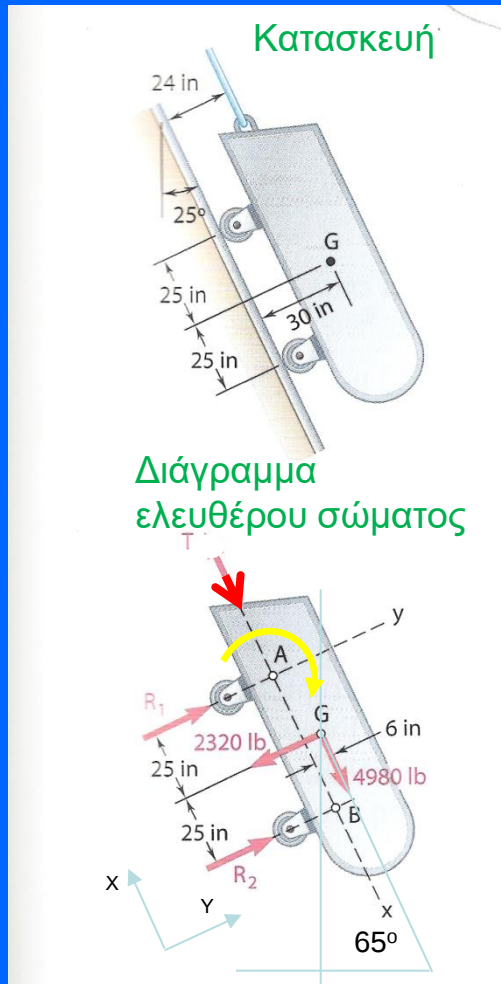
$$\mathbf{A_x = - 107.1 \text{ KN}}$$

Διάγραμμα ελευθέρου σώματος



Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα



Βαγονέτο κρατιέται με συρματοσχοινο ακίνητο σε σιδηροτροχιά κλίσης 65°. Το μεικτό βάρος του βαγονέτου είναι 5500 Kp και το κέντρο βάρους φαίνεται στο Σχήμα. Να προσδιορισθεί η δύναμη στο καλώδιο και οι αντιδράσεις στους τροχούς.

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Αναλύουμε το βάρος στους άξονες x και y :

$$B_x = +B \cdot \sin(25^\circ) = +4980 \text{ Kp}$$

$$B_y = -B \cdot \sin(65^\circ) = -2320 \text{ Kp}$$

Συνθήκες ισορροπίας :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + 4980 = 0 \Rightarrow \underline{T = -4980 \text{ Kp}}$$

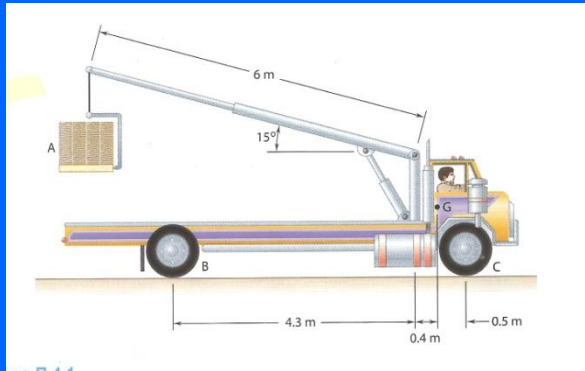
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow +(2320 \cdot 25) + (4980 \cdot 6) - (R_2 \cdot 50) = 0 \Rightarrow \underline{R_2 = +1758 \text{ Kp}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_1 + 1758 + (-2320) = 0 \Rightarrow \underline{R_1 = +562 \text{ Kp}}$$

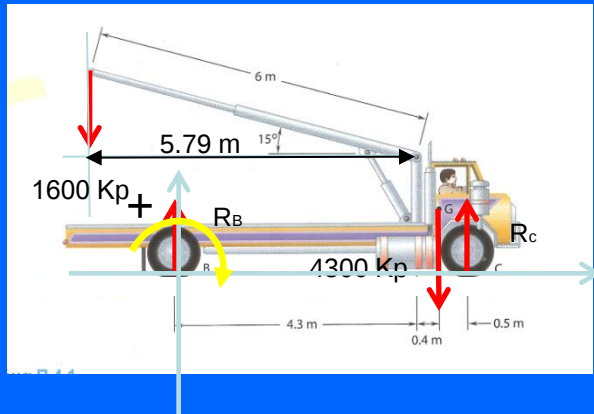
Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα

Κατασκευή



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος



Ο βραχίονας του γερανού «κρατά» ακίνητο βάρος 1600 Kp – σχήμα. Το βάρος του γερανού είναι 4300 Kp – το κέντρο βάρους (KB) φαίνεται στο σχήμα επίσης. Προσδιορίσετε τις αντιδράσεις σε κάθε τροχό.

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

Μήκος οριζόντιας προβολής του βραχίονα :
 $B_x = 6 \text{ m} \cdot \sin(15^\circ) = 5.79 \text{ m}$

Συνθήκες ισορροπίας :

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -[1600 \cdot (5.79 - 4.3)] + (4300 \cdot 4.7) - (R_C \cdot 5.2) = 0 \Rightarrow$$
$$R_C = + \mathbf{3428.08 \text{ Kp}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow (-1600) + R_B + (-4300) + 3428.08 = 0 \Rightarrow$$
$$R_B = + \mathbf{2471.91 \text{ Kp}}$$

Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα

Πόσο πρέπει να εκταθεί ο βραχίονας για να αρχίσει να ανατρέπεται ο γερανός;

Όταν αρχίζουν να ανασηκώνονται οι μπροστινοί τροχοί, $R_c = 0$. Οπότε :

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -[1600 \cdot (X - 4.3)] + (4300 \cdot 4.7) - (0 \cdot 5.2) = 0 \Rightarrow$$
$$\underline{X = 16.93 \text{ m}}$$

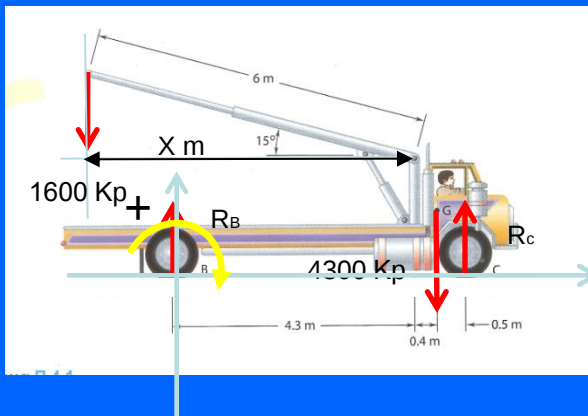
Αν ο βραχίονας εκταθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση τότε ενδέχεται να αρχίσουν να ανασηκώνονται οι πίσω τροχοί.

Όταν αρχίζουν να ανασηκώνονται οι πίσω τροχοί, $R_B = 0$. Οπότε :

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -4300 \cdot 0.5 + [1600 \cdot (X - 0.9)] = 0 \Rightarrow$$

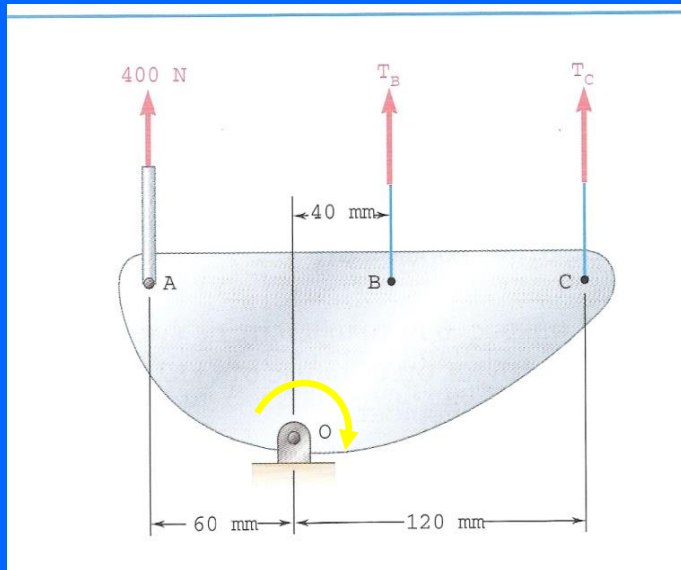
$$\underline{X = 2.24 \text{ m}}$$

Διάγραμμα
ελευθέρου σώματος



Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα



Ο στρόφαλος του σχήματος είναι αρθρωμένος στο σημείο O και συγκρατείται με την βοήθεια της ράβδου στο A και των σχοινιών στα A και C. Τα σχοινιά αντέχουν 180 N. Ποιο είναι το εύρος τιμών που επιτρέπεται να εξασκεί το σχοινί C ούτως ώστε ούτε τα σχοινιά να χαλαρώσουν ούτε να κοπούν.

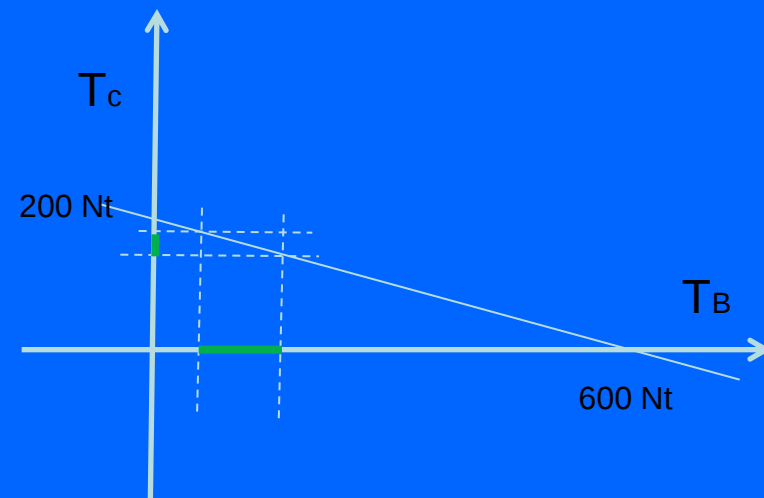
Συνθήκη ισορροπίας :

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow +[400 \cdot 60] - T_B \cdot 40 - T_C \cdot 120 = 0$$

Παριστάνομε γραφικά την παραπάνω γραμμική σχέση. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η T_C μειώνεται η απαιτούμενη T_B .

Η τιμή της T_C για την οποία αντέχει μόλις το σχοινί στο B προκύπτει από την παραπάνω σχέση για $T_B = 180$: **$T_C = 140 \text{ N}$**

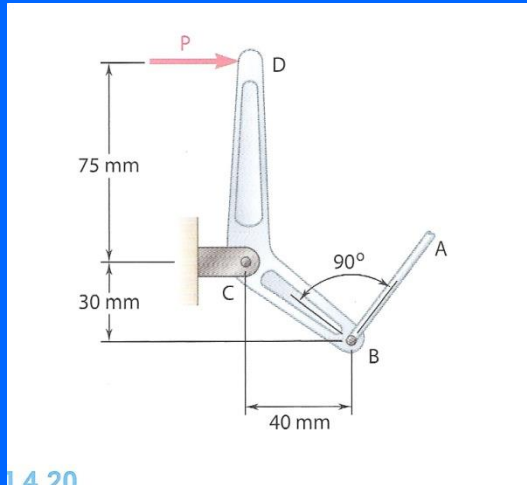
Άρα η **T_C** μπορεί να μεταβάλλεται από :
 $140 \text{ .. } 180 \text{ N.}$



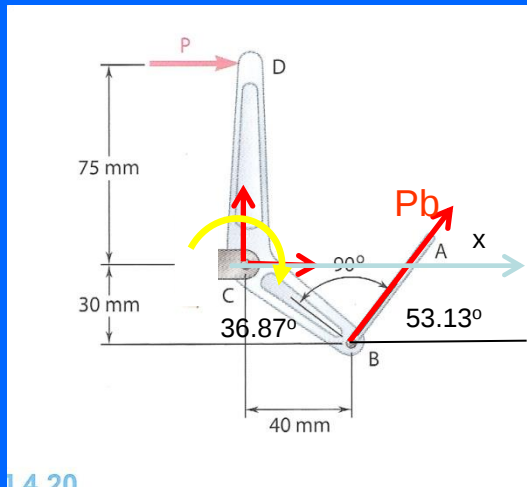
Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα

Κατασκευή



Διάγραμμα
ελευθέρου σώματος



Ο μοχλός BCD είναι αρθρωμένος στο C. Πόση δύναμη εξασκεί στη ράβδο AB αν η $P = 200 \text{ N}$; Προσδιορίσετε επίσης τις αντιδράσεις στην άρθρωση.

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Υπολογίζουμε τη γωνία ϕ που σχηματίζει η CB με τον άξονα X :

$$\phi = \tan^{-1}(30/40) = 36.87^\circ .$$

Οπότε η γωνία που σχηματίζει η δύναμη (της ράβδου) P_b με τον άξονα X είναι

$$\theta = 90^\circ - \phi = 53.13^\circ .$$

Επίσης $BC^2 = 30^2 + 40^2 \Rightarrow \underline{BC = 50 \text{ mm}}$

Συνθήκες ισορροπίας :

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow +[P \cdot 75] - (P_b \cdot 50) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{P_b = 300 \text{ N}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P + C_x + P_{bx} = 200 + C_x + 300 \cdot \cos(53.13^\circ) = 0 \Rightarrow$$

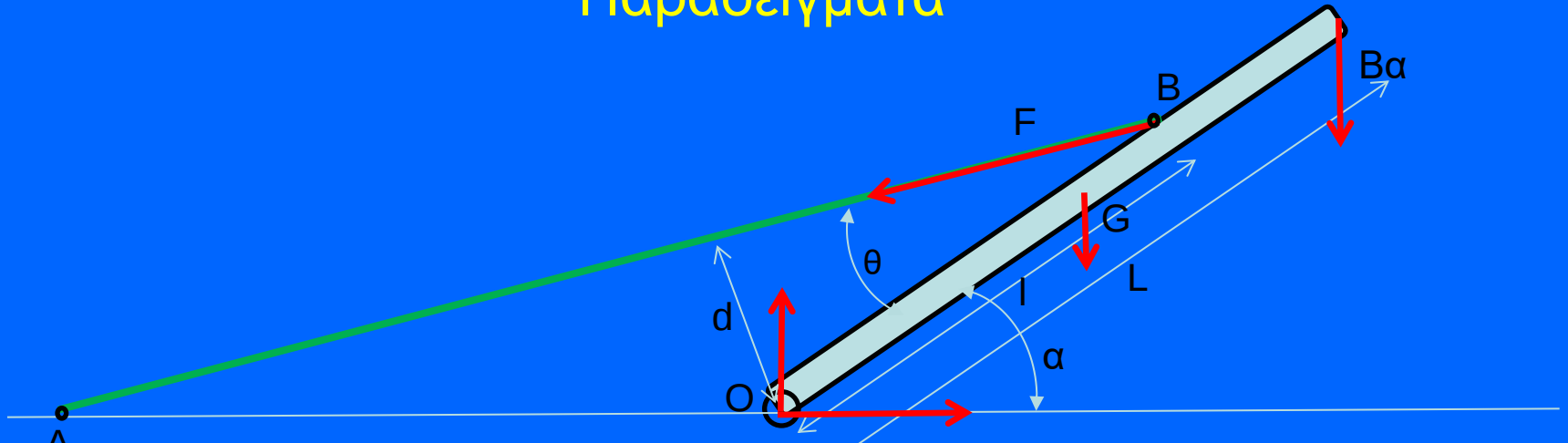
$$\underline{C_x = -480 \text{ N}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y + P_{by} = C_y + 300 \cdot \sin(53.13^\circ) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{C_y = -240 \text{ N}}$$

Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα



Πυλώνας μήκους L , που βρίσκεται υπό γωνία α ως προς το οριζόντιο επίπεδο, είναι αρθρωμένος στο σημείο O και συγκρατείται με την βοήθεια του συρματοσχοίνου AB . Αν το βάρος του πυλώνα είναι G και στο άκρο του συγκρατεί βάρος Ba , υπολογίστε την δύναμη F στο συρματοσχοίνο καθώς και τις αντιδράσεις Ox και Oy στην άρθρωση. Επιλύσετε το πρόβλημα με παραμέτρους : την γωνία α , το μήκος AO και το μήκος OB .

Λίγη γεωμετρία για να προσδιορίσουμε την απόσταση d της F από την άρθρωση :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$$

$$\eta\mu(\theta)/AO = \eta\mu(180^\circ - \alpha)/AB \Rightarrow \eta\mu(\theta) = (AO/AB) \cdot \eta\mu(\alpha) \quad (1)$$

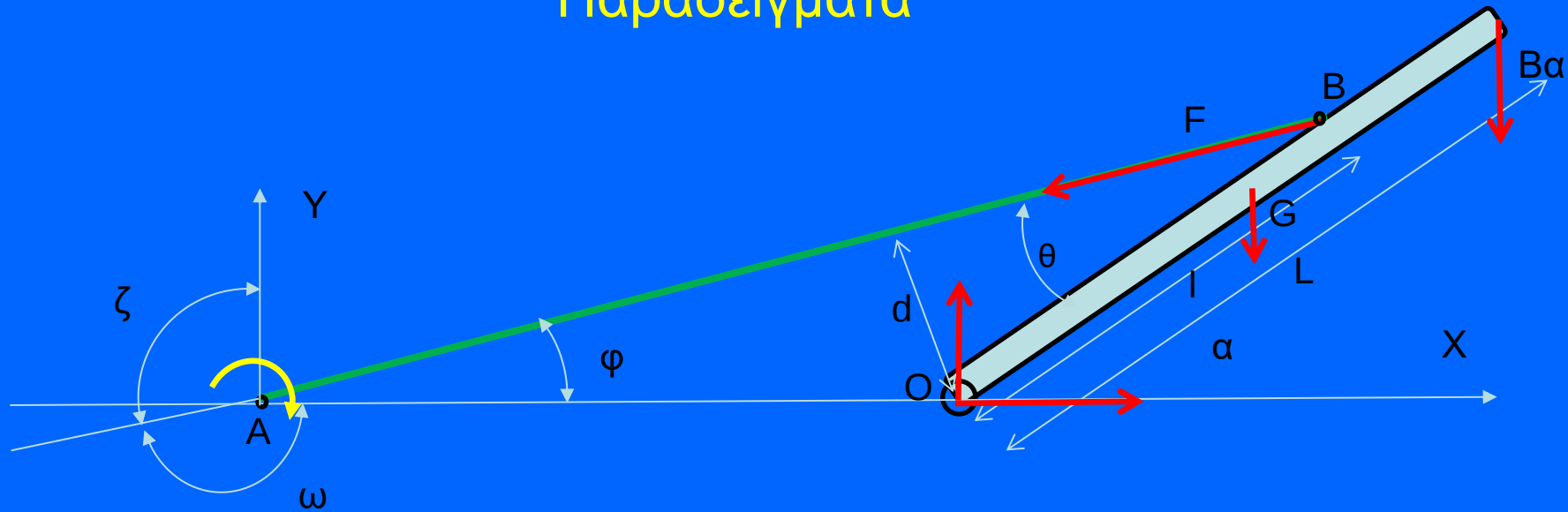
$$d = l \cdot \eta\mu(\theta) \quad (2)$$

Συνθήκες ισορροπίας :

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow -F \cdot d + G \cdot (L/2 \cdot \sin(\alpha)) + Ba \cdot (L \cdot \sin(\alpha)) = 0 \Rightarrow$$

Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Παραδείγματα



$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow -F*(l*\eta\mu(\theta)) + G*L*\sigma\upsilon\nu(\alpha)/2 + B\alpha*L*\sigma\upsilon\nu(\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$(\text{αν λάβομε υπ' όψιν την (1) και (2) }) \quad \mathbf{F = (L*AB/(l*AO*\epsilon\phi\alpha))*(B\alpha + G/2)}$$

$$\text{Λίγη γεωμετρία ακόμη : } \phi = \alpha - \theta, \quad \omega = 180^\circ - \phi = \mathbf{180^\circ + \alpha - \theta}, \quad \zeta = 90^\circ + \phi = \mathbf{90^\circ + \alpha - \theta}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow O_x + F*\sigma\upsilon\nu(\omega) = 0 \Rightarrow$$

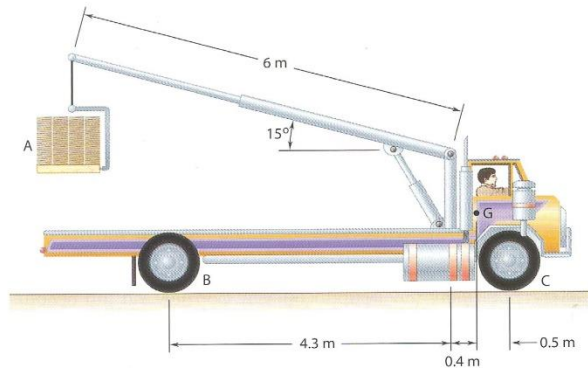
$$\mathbf{O_x = -F * \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha - \theta)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow O_y - G - B\alpha + F*\sigma\upsilon\nu(\zeta) = 0 \Rightarrow$$

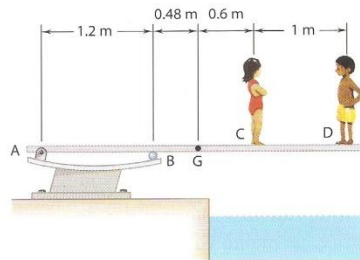
$$\mathbf{O_y = G + B\alpha - F*\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \alpha - \theta)}$$

Ισορροπία στερεού σώματος στις δύο διαστάσεις

Ασκήσεις



Σχήμα Π 4.1



Σχήμα Π 4.2

4.2 Δύο παιδιά στέκονται πάνω σε μια εξέδρα καταδύσεων μάζας 65 kg. Γνωρίζοντας ότι οι μάζες των παιδιών στα σημεία C και D είναι 28 kg και 40 kg αντίστοιχα, να καθορίσετε:

- (α) τις αντιδράσεις στο σημείο A, και
- (β) την αντίδραση στο σημείο B.

4.3 Δύο κιβώτια, το καθένα από τα οποία ζυγίζει 250 lb, τοποθετούνται όπως φαίνεται στο σκίτσο στην καρότσα ενός αγροτικού αυτοκινήτου. Να καθορίσετε τις αντιδράσεις σε καθένα από τους δύο:

- (α) πίσω τροχούς A, και
- (β) μπροστινούς τροχούς B.

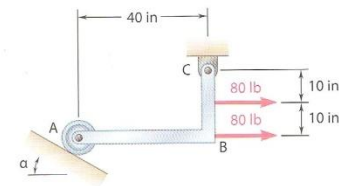
4.17 Να καθορίσετε τις αντιδράσεις στα σημεία A και C, όταν:

- (α) $\alpha = 0$ και
- (β) $\alpha = 30^\circ$.

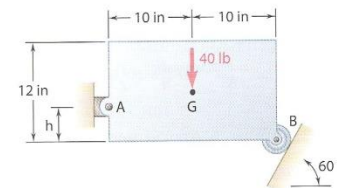
4.18 Να καθορίσετε τις αντιδράσεις στα σημεία A και B, όταν (α) $h = 0$ και (β) $h = 8$ in.

4.19 Ο μοχλός BCD συστρέφεται γύρω από το σημείο C και συνδέεται με μια ράβδο ελέγχου στο σημείο B. Εάν $P = 200$ N, να καθορίσετε

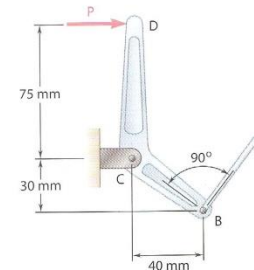
- (α) τη δύναμη στη ράβδο AB, και
- (β) τις αντιδράσεις στο σημείο C.



Σχήμα Π 4.17

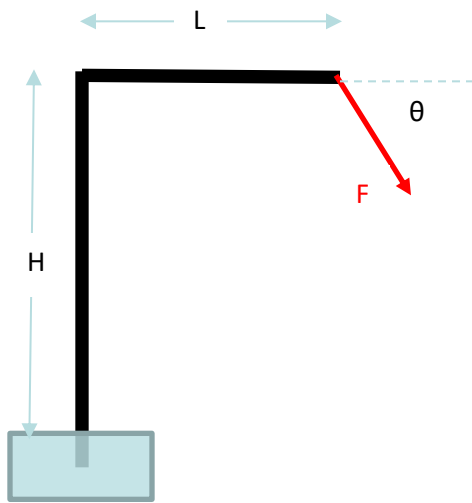


Σχήμα Π 4.18

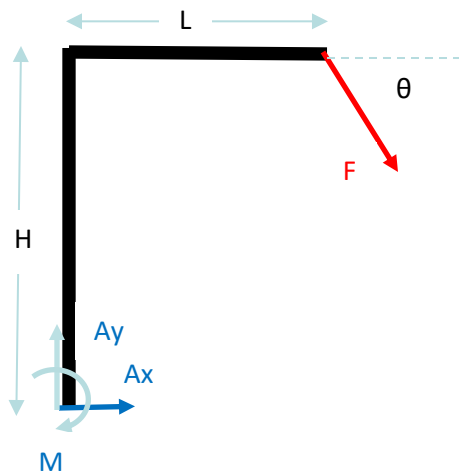


Σχήμα Π 4.19 και Π 4.20

Πυλώνας πακτωμένος στη θέση Α



Διάγραμμα ελεύθερου σώματος

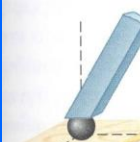
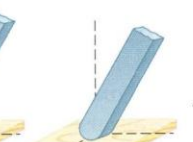
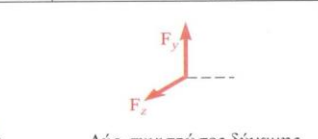
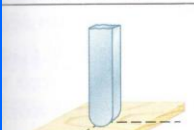
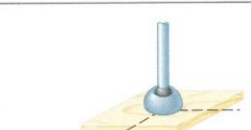
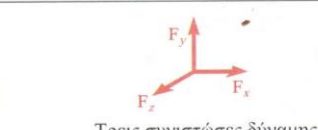
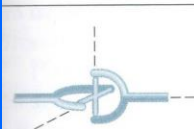
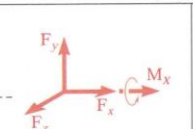
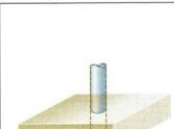
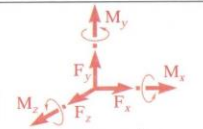
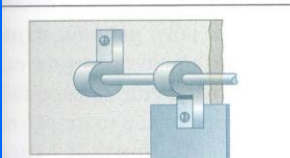
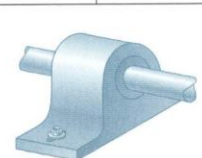
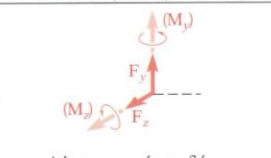
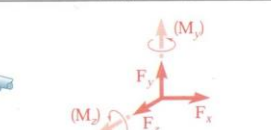


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + F \cos(\theta) = 0 \quad (1)$$

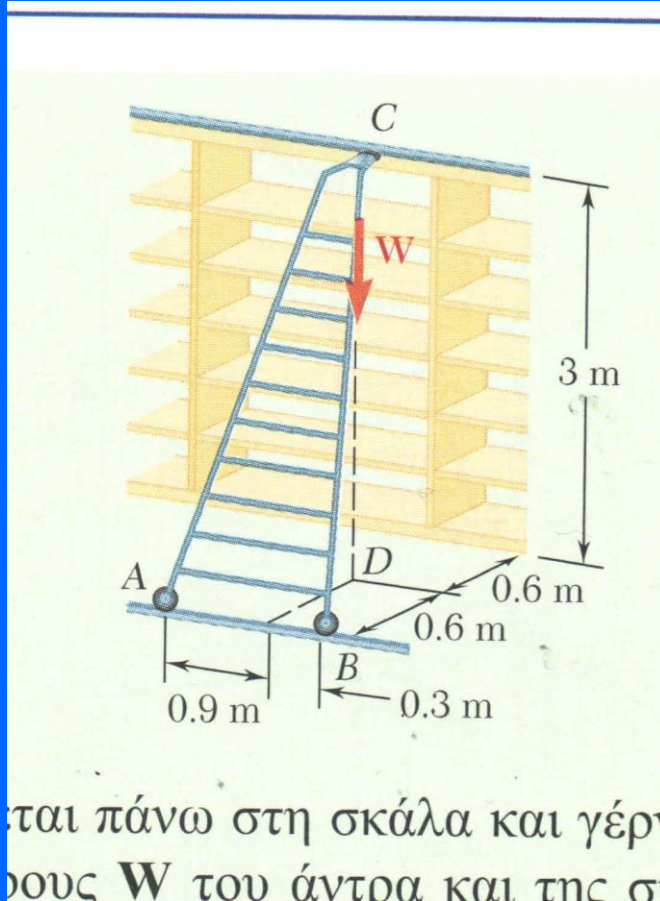
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + F \cos(90^\circ + \theta) = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow +M + (F \cos(\theta)H + (F \sin(\theta))L = 0 \quad (3)$$

Στηρίξεις χωρικών (3D) κατασκευών

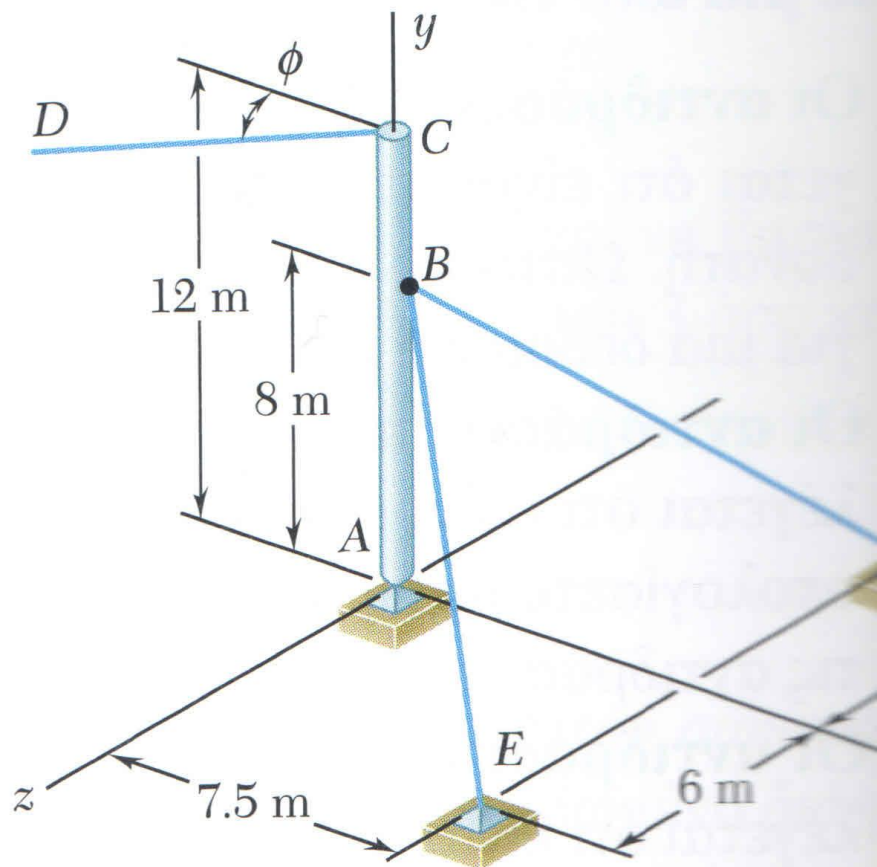
 Σφαίρα	 Άνευ τριβής επιφάνεια	 Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας κάθετη στην επιφάνεια (ένας άγνωστος)	 Καλώδιο Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας κατά μήκος του καλωδίου (ένας άγνωστος)
 Τροχός σε ανώμαλη επιφάνεια	 Τροχός σε ράγες	 Δύο συνιστώσες δύναμης, μία κάθετη στην επιφάνεια και μία παράλληλη στον άξονα του τροχού	
 Ανώμαλη επιφάνεια	 Σφαιρική σύνδεση/άρθρωση	 Τρεις συνιστώσες δύναμης, κάθετες μεταξύ τους στο σημείο επαφής	
 Μερικά αρθρωτός σύνδεσμος ('σταυρός')	 Τρεις συνιστώσες δύναμης και μια ροπή	 Πάκτωση	 Τρεις συνιστώσες δύναμης και τρεις ροπές (καμία μετατόπιση, καμία περιστροφή)
 Μεντεσές και έδρανο στήριξης ακτινικού φορτίου		 Δύο συνιστώσες δύναμης και μέχρι δύο ροπές	
			 Τρεις συνιστώσες δύναμης

Ισορροπία στερεού (3D) σώματος



Ισορροπία στερεού (3D) σώματος

ονική ωθηση.



Σχήμα Π 4.ΕΣ6