

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Στατική

Δικτυώματα

Διδάσκων

Δρ Καββουσάνος Μανόλης

ΔΙΚΤΥΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ (ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ)

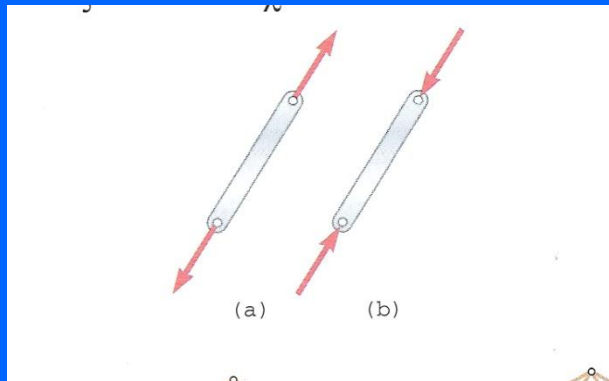
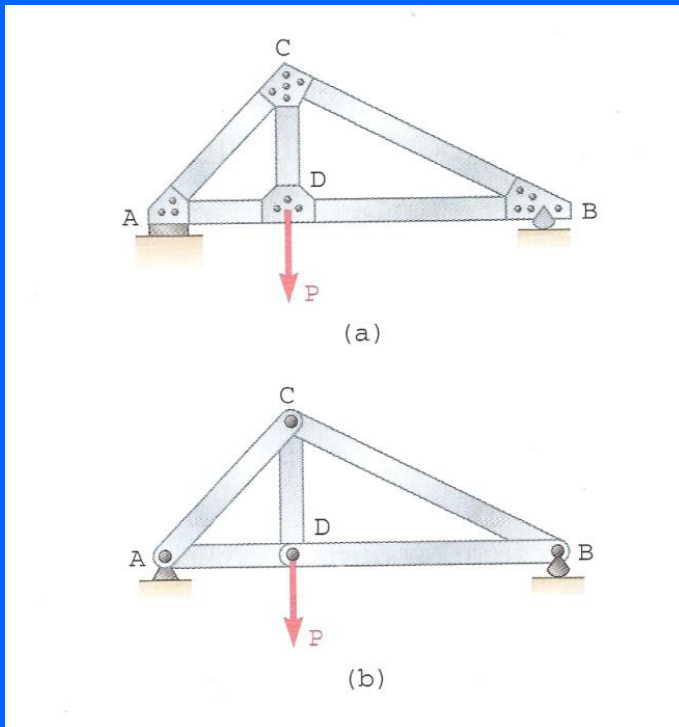


- Πως μπορώ να φτιάξω τον πυλώνα και τα μπράτσα αυτού του τεράστιου γερανού χρησιμοποιώντας απλές ράβδους του εμπορίου (δικτύωμα);
- Πως μπορώ να φτιάξω αυτή την τεράστια σκεπή με τον ίδιο τρόπο;

-Κοινό χαρακτηριστικό των κατασκευών αυτών είναι το ότι κατασκευάζονται από μικρού μήκους (σχετικά με το μέγεθος της κατασκευής) ευθύγραμμα τμήματα που συνδέονται μεταξύ τους στους **κόμβους**. Οι κατασκευές αυτές ονομάζονται **δικτυώματα**



ΔΙΚΤΥΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ (ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ)



Τα μικρού μήκους αυτά ευθύγραμμα τμήματα θα τα ονομάζουμε **ράβδους**. Οι ράβδοι έχουν συνήθως **τυποποιημένες διατομές (κύκλους, γωνίες)** και μπορεί κανείς να τις προμηθευθεί από το εμπόριο.

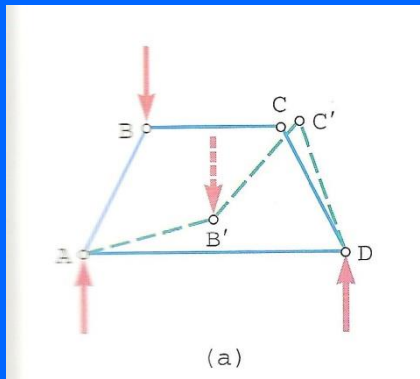
Ο σχεδιασμός του δικτυώματος συνήθως είναι τέτοιος, που να του επιτρέπει να παραλάβει τα φορτία στους κόμβους.

Θεωρούμε ακόμη ότι οι ράβδοι «φορτίζονται με μία δύναμη που δρα κατά μήκος τους», **θεωρούμε δηλαδή ότι οι κόμβοι είναι αρθρώσεις, παρά το γεγονός ότι συνήθως οι συνδέσεις των ράβδων γίνονται με κοχλίες ή συγκόλληση.**

Μια τέτοια θεώρηση (που δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα εφ' όσον τα μήκη των ράβδων είναι σχετικά μικρά) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε σχετικά εύκολα τις δυνάμεις με τις οποίες καταπονούνται οι ράβδοι και άρα να επιλέξουμε το κατάλληλο μέγεθος της απαιτούμενης διατομής.

Η δύναμη σε μια ράβδο, ή θα τείνει συνεπώς να την «τραβήξει, να την τεντώσει» οπότε θα λέγεται **εφελκυστική** ή το αντίθετο οπότε θα λέγεται **θλιπτική**.

Απλά δικτυώματα



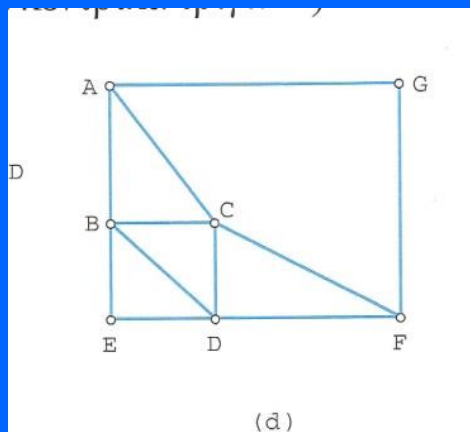
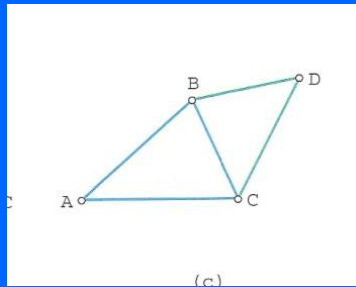
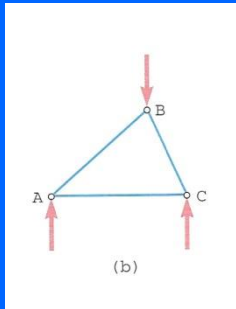
Τα δικτυώματα αποτελούνται από ράβδους που συνδέονται με αρθρώσεις και πρέπει βεβαίως να συμπεριφέρονται ως «στερεά σώματα» προκειμένου να μπορούν να παραλάβουν φορτία. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει για οποιοδήποτε «συνδυασμό» ράβδων.

Ο απλούστερος «στερεός σχηματισμός» ράβδων συνδεδεμένων με αρθρώσεις είναι το τρίγωνο. Ονομάζεται στοιχειώδης στερεός σχηματισμός.

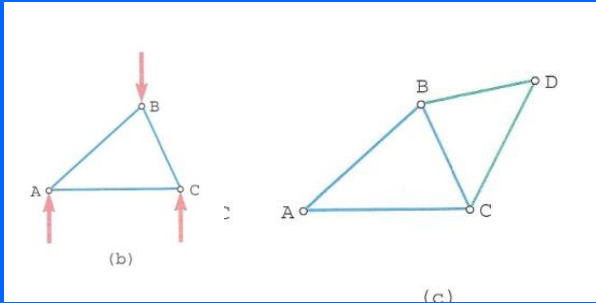
Αν στον στοιχειώδη σχηματισμό, προσθέτουμε κάθε φορά δύο ράβδους, τότε (εκτός μιας εξαιρέσεως) προκύπτει στερεός σχηματισμός.

Με προσθήκη δύο ράβδων κατά την παραπάνω λογική, μπορεί κανείς να διαμορφώσει οποδήποτε πολύπλοκα δικτυώματα.

Τα δικτυώματα αυτά ονομάζονται **απλά δικτυώματα**.



Επίλυση απλού δικτυώματος



Από τον τρόπο «σχηματισμού» ενός απλού δικτυώματος, μπορεί κανείς να καταλάβει ότι, εφ' όσον για κάθε δύο νέες ράβδους δημιουργείται ένας κόμβος - άρθρωση, ισχύει :

$$m = 2 * n - 3$$

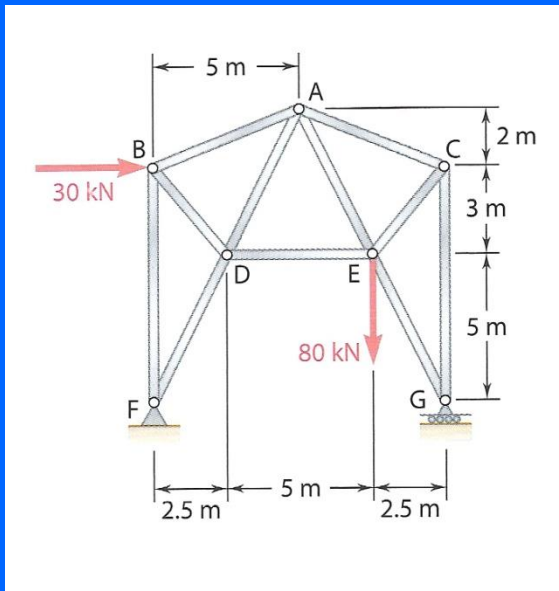
όπου m : αριθμός ράβδων, n : αριθμός κόμβων.

Αν το δικτύωμα στηρίζεται ισοστατικά, τότε πρέπει να προσδιορίσουμε : Τις τρεις δυνάμεις αντίδρασης + τις m δυνάμεις των ράβδων. Από την παραπάνω σχέση όμως προκύπτει, ότι :

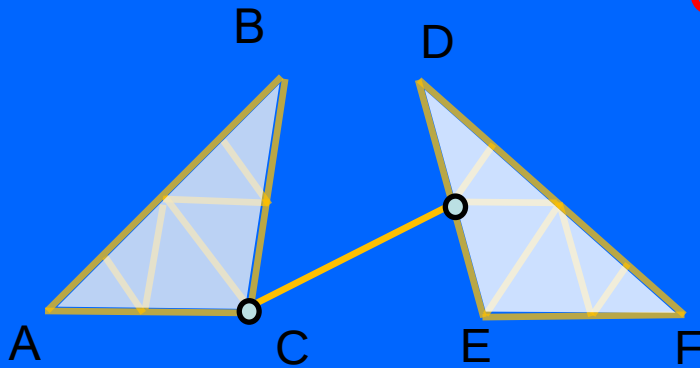
$$m + 3 = 2 * n$$

Πρέπει να προσδιορίσουμε δηλαδή $2n$ αγνώστους. Αν πάρουμε τις 2 εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων σε κάθε κόμβο (ισορροπία κατά τον άξονα X και Y δηλαδή), τότε έχουμε ένα σύστημα $2n$ εξισώσεων ...

...που αν επιλύσουμε προσδιορίζουμε όλες τις δυνάμεις.



Δικτυώματα αποτελούμενα από απλά δικτυώματα



Τα δικτυώματα ABC και DEF είναι απλά δικτυώματα που το καθένα αποτελείται από $m=13$ ράβδους και $n=8$ αρθρώσεις.

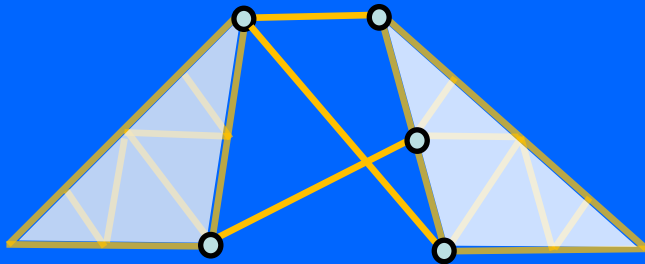
$$\text{Ισχύει δε : } m + 3 = 2 * n$$

Αν τα «συνδέσουμε» με μια ράβδο, όπως στο σχήμα, τότε δεν προκύπτει «στερεός» σχηματισμός.

Αν τα «συνδέσουμε» με δύο ράβδους, τότε και πάλι δεν προκύπτει «στερεός» σχηματισμός.

Αν τα «συνδέσουμε» με μια άρθρωση, ομοίως δεν προκύπτει «στερεός» σχηματισμός.

Δικτυώματα αποτελούμενα από απλά δικτυώματα



Αν αντιθέτως συνδέσουμε τα δικτυώματα με τρεις ράβδους, τότε προκύπτει στερεός σχηματισμός....

...ο οποίος διαθέτει

$M=(2*m + 3)$ ράβδους και $N=(2*n)$ αρθρώσεις.

Το σύνολο των μεγεθών που πρέπει να υπολογισθούν για την «επίλυση» του δικτυώματος είναι = αριθμό ράβδων + 3

αντιδράσεις στηρίξεων = $M+3 = 2*m + 6 = \mathbf{2*(m+3)}$.

Λόγω όμως του «απλού μικρού δικτυώματος» ισχύει ότι :

$$m + 3 = 2*n$$

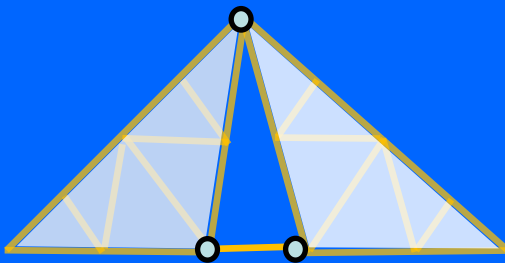
Οπότε ,το σύνολο των μεγεθών που πρέπει να υπολογισθούν

$$= \mathbf{2*(2*n)}.$$

Το δε σύνολο των εξισώσεων που διαθέτομε είναι επίσης

$$\mathbf{2*N = 2* (2*n)}$$
 (δυο εξισώσεις για κάθε κόμβο)

Οπότε οι άγνωστες δυνάμεις μπορούν να υπολογισθούν.



Στερεός σχηματισμός προκύπτει επίσης αν τα δικτυώματα συνδεθούν σε μια άρθρωση και μια ράβδο.

Στη περίπτωση αυτή : **$M=(2*m + 1)$ και $N=(2*n-1)$.**

Το σύνολο των μεγεθών που πρέπει να υπολογισθούν για την «επίλυση» του δικτυώματος είναι = $M+3 = 2m+4 = 2(2n-$

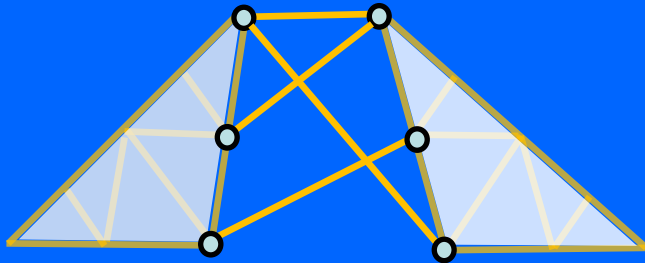
$$3)+4 = \mathbf{4n-2}.$$

Οι δε εξισώσεις που διαθέτομε είναι :

$$2N = 2(2n-1) = \mathbf{4n-2}$$

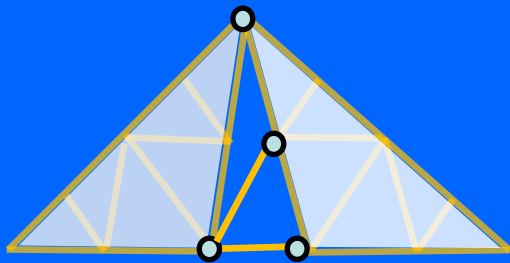
Οπότε οι άγνωστες δυνάμεις μπορούν και πάλι να υπολογισθούν

Δικτυώματα αποτελούμενα από απλά δικτυώματα

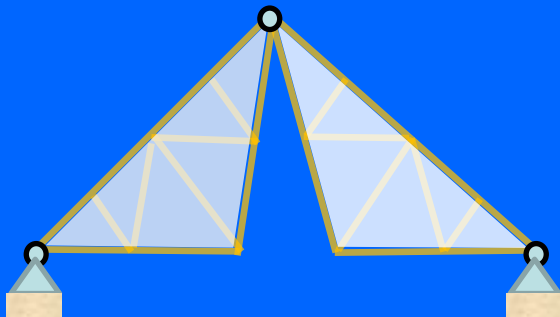


Αν προσθέσουμε μια ακόμη ράβδο στα «σύνθετα» αυτά δικτυώματα, τότε το δικτύωμα προφανώς εξακολουθεί να είναι στερεό – σχήματα (α) και (β). Καμιά νέα εξίσωση όμως δεν προκύπτει, ενώ αυξάνεται ο αριθμός των προς υπολογισμό μεγεθών –κατά ένα εν προκειμένω : Οι δυνάμεις των ράβδων δηλαδή και οι αντιδράσεις δεν μπορούν πλέον να υπολογισθούν μόνο με χρήση των εξισώσεων στατικής ισορροπίας.

Το δικτύωμα είναι υπερστατικό.



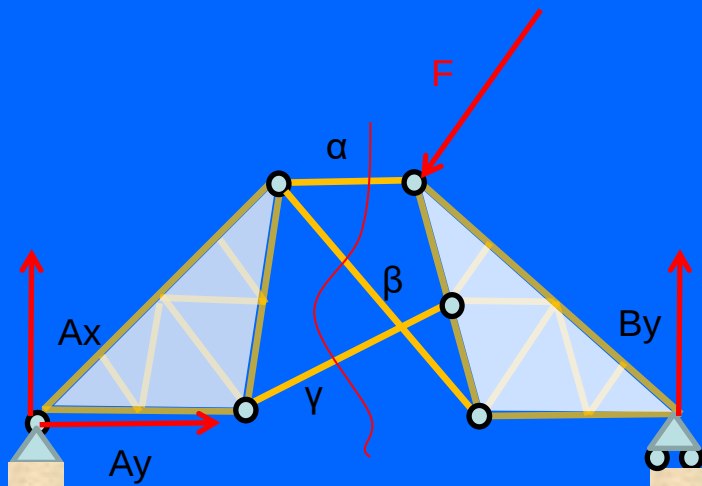
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατασκευή του σχήματος (γ) : Το δικτύωμα, ενώ δεν είναι στερεός σχηματισμός, στηρίζεται με δύο αρθρώσεις, οπότε **η όλη κατασκευή είναι πλέον στερεή.**



Ο σύνολο των αγνώστων που πρέπει να προσδιορισθούν είναι $= 2m(\text{σύνολο ράβδων}) + 4$ (άγνωστες αντιδράσεις) Όσες δηλαδή και σε προηγούμενη περίπτωση. Οπότε μπορούν να προσδιορισθούν με επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας.

Η κατασκευή είναι ισοστατική
και έχει τη μορφή
τριαρθρωτού τόξου

Επίλυση «σύνθετου» δικτυώματος – Μέθοδος Ritter



(α)

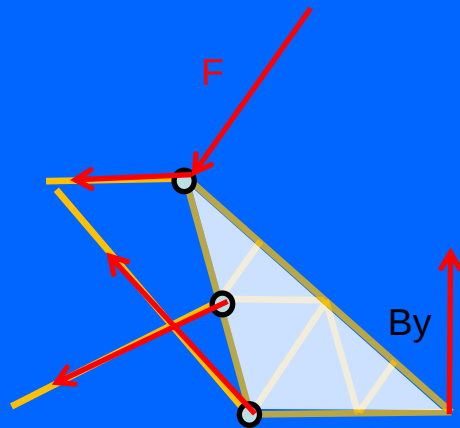
Έστω το σύνθετο δικτύωμα του σχήματος, που αποτελείται από δύο απλά, ισοστατικά δικτυώματα συνδεδεμένα με τρεις ράβδους, που στηρίζεται ισοστατικά και φορτίζεται με την δύναμη F .

Α. Αν θεωρήσει κανείς την ισορροπία όλης της κατασκευής μπορεί να προσδιορίσει τις αντιδράσεις A_x , A_y , B_y στις στηρίξεις – Σχήμα (α).

Β. Φανταζόμαστε μια τομή του δικτυώματος που να «κόβει» όλες τις «συνδετήριες ράβδους».

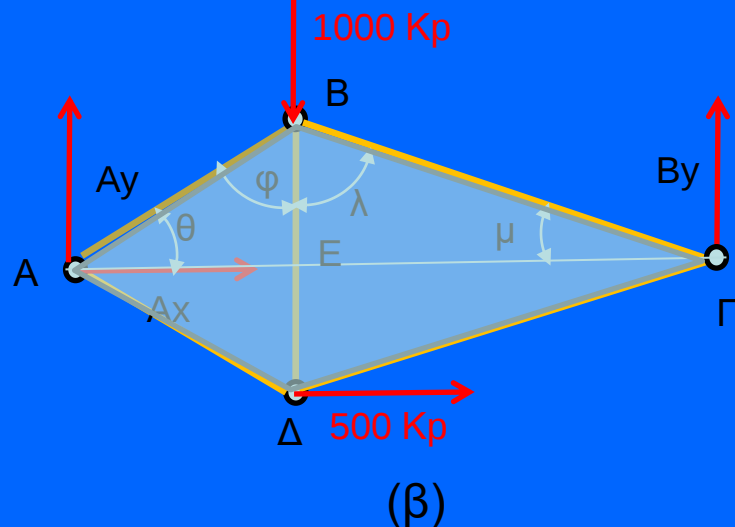
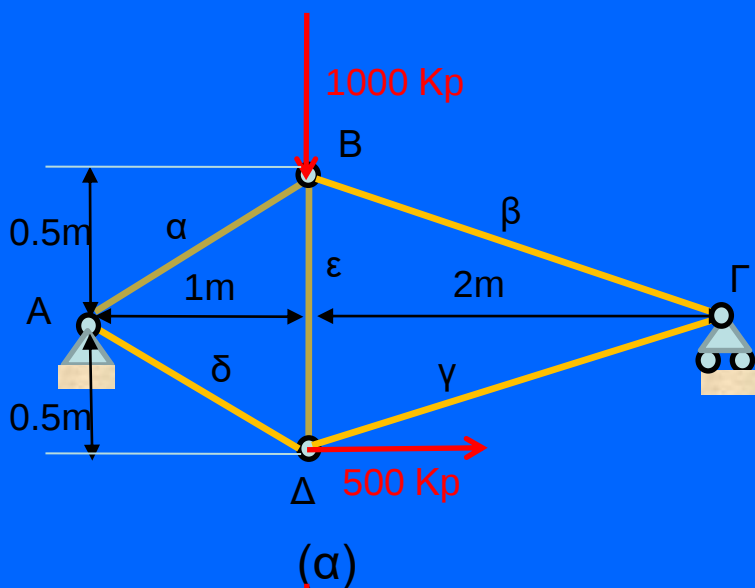
Γ. Εξετάζουμε την ισορροπία ενός εκ των δύο μερών που προέκυψαν από την τομή – έστω του δεξιού. Για τον σκοπό αυτό, στη θέση των ράβδων πρέπει να βάλουμε τις δυνάμεις τους – Σχήμα (β). Από τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας, μπορούν να προσδιορισθούν οι άγνωστες αυτές δυνάμεις.

Δ. Στη συνέχεια μπορούμε να επιλύσουμε κάθε ένα από τα απλά δικτυώματα, αφού γνωρίζουμε όλες τις εξωτερικές δυνάμεις με τις οποίες φορτίζεται.



(β)

Δικτυώματα – Παράδειγμα



Υπολογίστε τις φορτίσεις των ράβδων α, β, γ, δ, ε του δικτυώματος του σχήματος (α).

A. Υπολογισμός γωνιών :

Ορθογώνιο τρίγωνο AEB :

$$\epsilon\phi\theta = 0.5\text{m}/1\text{m} = > \theta = 26.57^\circ$$

$$\phi = 90^\circ - \theta = > \phi = 63.43^\circ$$

Ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ :

$$\epsilon\phi\mu = 0.5\text{m}/2\text{m} = > \mu = 14.04^\circ$$

$$\lambda = 90^\circ - \mu = > \lambda = 75.96^\circ$$

B. Υπολογισμός αντιδράσεων στις στηρίξεις.

Αντικαθιστούμε τις στηρίξεις με τις αντιδράσεις τους και σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος – σχήμα (β).

Ισορροπία ροπών ως προς Α :

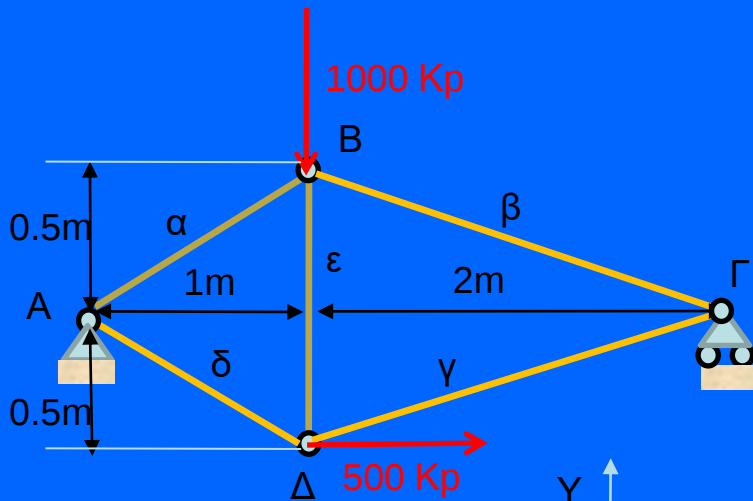
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -1000\text{Kp} \cdot 1\text{m} + 500\text{Kp} \cdot 0.5\text{m} + B_y \cdot 3\text{m} = 0 \Rightarrow B_y = 250\text{ Kp}$$

Ισορροπία δυνάμεων :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 1000\text{Kp} + 250\text{Kp} = 0 \Rightarrow A_y = 750\text{ Kp}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + 500\text{Kp} = 0 \Rightarrow A_x = -500\text{ Kp}$$

Δικτυώματα – Παράδειγμα



Υπολογίσετε τις φορτίσεις των ράβδων α, β, γ, δ, ε του δικτυώματος του σχήματος (α).

Κόμβος Γ – Ισορροπία δυνάμεων:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_\beta \cos(180-\mu) + F_\gamma \cos(180+\mu) = 0 \Rightarrow F_\beta = -F_\gamma \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_\beta \cos(90-\mu) + 250\text{Kp} + F_\gamma \cos(90+\mu) = 0$$

και λόγω της (1) :

$$\Rightarrow F_\beta = -515.3 \text{ Kp} \\ F_\gamma = +515.3 \text{ Kp}$$

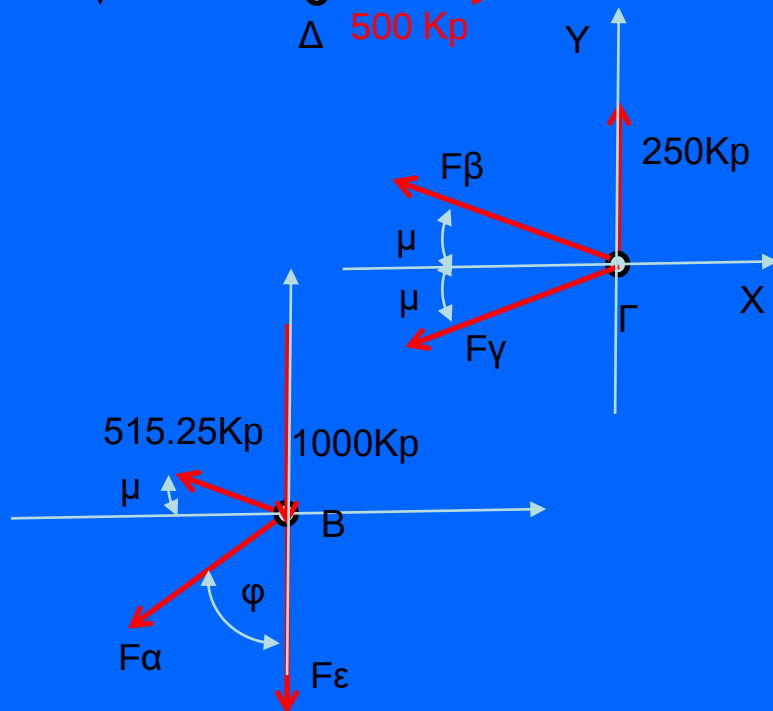
Κόμβος Β – Ισορροπία δυνάμεων:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 515.25 \cos(180-\mu) + F_\alpha \cos(90+\varphi) = 0 \Rightarrow$$

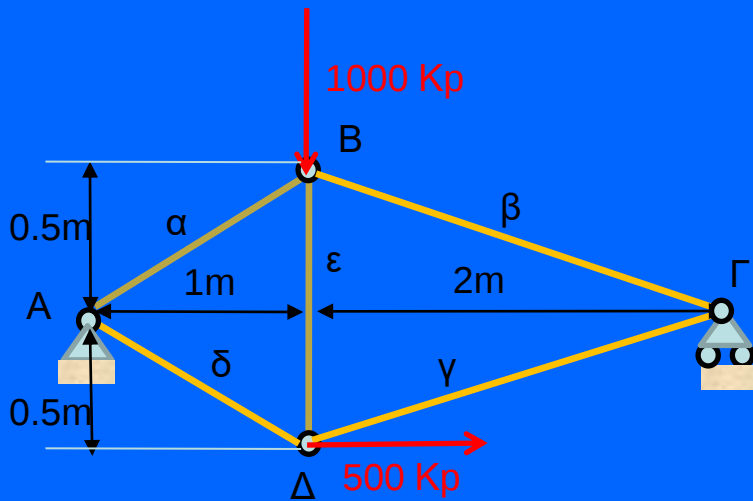
$$\Rightarrow F_\alpha = -559.0 \text{ Kp}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -1000\text{Kp} + 515.25 \cos(90-\mu) + (-559.05) \cos(180-\varphi) - F_\epsilon = 0$$

$$\Rightarrow F_\epsilon = -624.9 \text{ Kp}$$



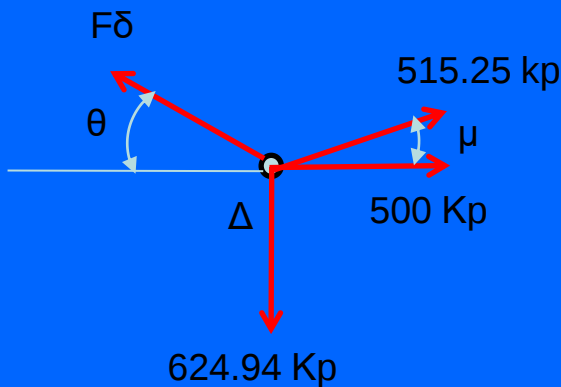
Δικτυώματα – Παράδειγμα



Υπολογίσετε τις φορτίσεις των ράβδων α, β, γ, δ, ε του δικτυώματος του σχήματος (α).

Κόμβος Δ – Ισορροπία δυνάμεων:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \\ + F_{\delta} \cos(180-\theta) + 500 \text{ Kp} + 515.25 \cos(\mu) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\delta} = 1118.1 \text{ Kp} \end{aligned}$$



Ράβδος	Φορτίο (Kp)	Είδος
α	559.0	Θλιπτικό
β	515.3	Θλιπτικό
γ	515.3	Εφελκυστικό
δ	1118.1	Εφελκυστικό
ε	624.9	Θλιπτικό