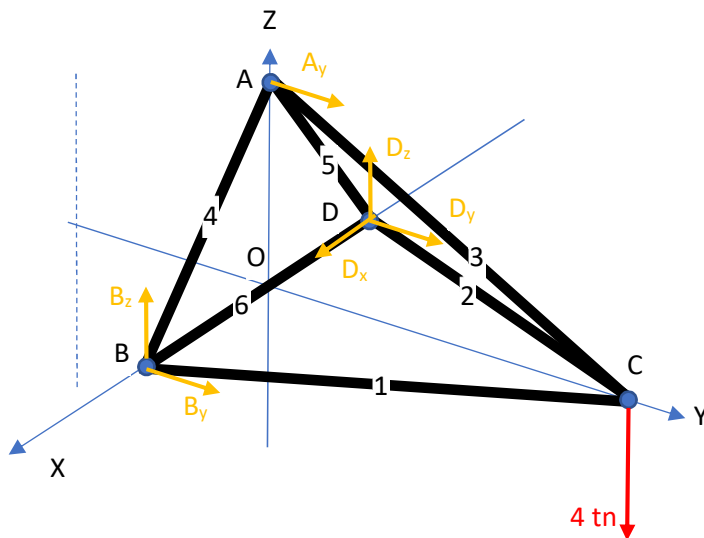


Άσκηση



Το χωρικό δικτύωμα του σχήματος στηρίζεται στις θέσεις D, B, A με στηρίξεις οι δυνάμεις των οποίων φαίνονται στο σχήμα. Πρόκειται δηλαδή για μια σφαιρική άρθρωση (D), για μια κύλιση που επιτρέπει κίνηση κατά τον άξονα X (B) και μια κύλιση στο επίπεδο XZ (A). Φορτίζεται επίσης με δύναμη 4 tn, παράλληλη στον άξονα Z.

Να υπολογισθούν οι δυνάμεις στις ράβδους και οι δυνάμεις στις στηρίξεις.

Οι συντεταγμένες των

τεσσάρων κόμβων A, B, C και D του δικτύωματος είναι αντίστοιχα :

$$(0, 0, 5\text{m}), (3.5\text{m}, 0, 0), (0, 12\text{m}, 0), (-3.5\text{m}, 0, 0)$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε τα εξής :

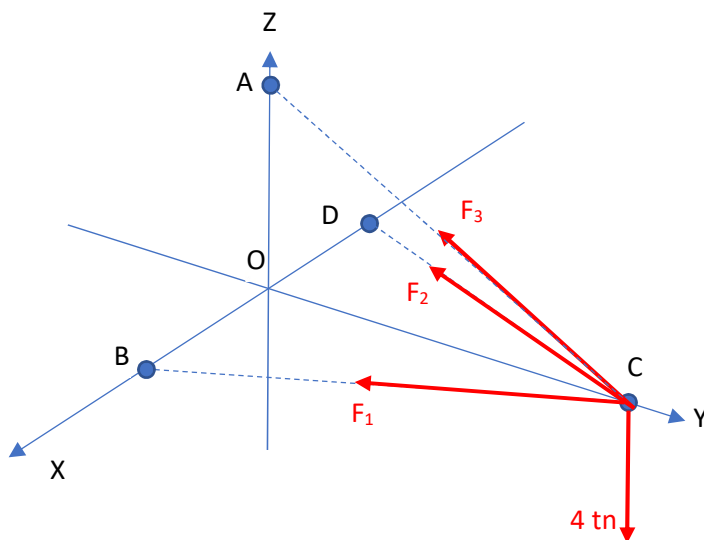
Στον κόμβο C του δικτύωματος συντρέχουν τρεις ράβδοι. Μπορούμε συνεπώς να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων στον κόμβο αυτό :

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

προκειμένου να υπολογίζουμε τις δυνάμεις των τριών αυτών ράβδων.

Στη συνέχεια μπορούμε να προχωρήσουμε στον κόμβο A, όπου με γνωστή πλέον την δύναμη της ράβδου 3, μπορούμε και πάλι να υπολογίσουμε τις δυνάμεις των ράβδων 4 και 5 καθώς και την δύναμη A της στήριξης – που είναι κάθετη στο επίπεδο XZ.

Με ανάλογους συλλογισμούς προχωρούμε στον κόμβο B και στην συνέχεια στον κόμβο D και υπολογίζουμε τόσο τις δυνάμεις όλων των ράβδων όσο και τις δυνάμεις των στηρίξεων.



Κόμβος C

Στο Σχήμα φαίνονται σχεδιασμένες οι δυνάμεις που ασκούνται στον κόμβο. Οι άγνωστες δυνάμεις των ράβδων 1, 2 και 3 θεωρούνται εφελκυστικές.

Για να βρούμε τις συνιστώσες κάθε δύναμης κατά μήκος των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων, χρειαζόμαστε τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων αυτών. Αυτά είναι ίδια με τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος που ορίζει η αντίστοιχη ράβδος.

Για το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{CB}$

ισχύει :

$$CB^2 = (X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2 + (Z_B - Z_C)^2 = (3.5m - 0)^2 + (0 - 12)^2 + (0 - 0)^2 \\ \Rightarrow CB = 12.5 m$$

Για δε τα συνημίτονα κατεύθυνσής του :

$$\cos(\vartheta_{1_x}) = \frac{(X_B - X_C)}{CB} = \frac{(3.5m - 0)}{12.5m} = 0.280 \\ \cos(\vartheta_{1_y}) = \frac{(Y_B - Y_C)}{CB} = \frac{(0 - 12m)}{12.5m} = -0.960 \\ \cos(\vartheta_{1_z}) = \frac{(Z_B - Z_C)}{CB} = \frac{(0 - 0)}{12.5m} = 0.000$$

Με αντίστοιχους υπολογισμούς προσδιορίζουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης και των δύο άλλων δυνάμεων :

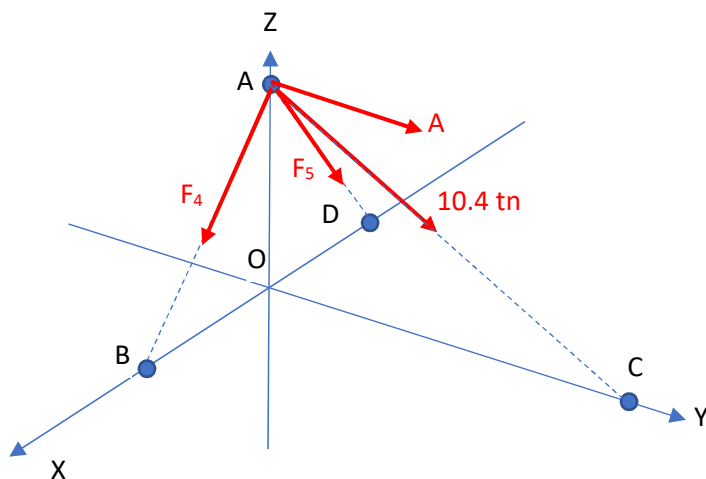
$$\begin{aligned} \cos(\vartheta_{2_x}) &= -0.280 & \cos(\vartheta_{3_x}) &= 0.000 \\ \cos(\vartheta_{2_y}) &= -0.960 & \cos(\vartheta_{3_y}) &= -0.923 \\ \cos(\vartheta_{2_z}) &= 0.000 & \cos(\vartheta_{3_z}) &= 0.385 \end{aligned}$$

Οι τέσσερις δυνάμεις που συντρέχουν στον κόμβο C ισορροπούν, οπότε ισχύει :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \\ F_1 \cos(\vartheta_{1_x}) + F_2 \cos(\vartheta_{2_x}) + F_3 \cos(\vartheta_{3_x}) &= 0 \\ F_1 \cos(\vartheta_{1_y}) + F_2 \cos(\vartheta_{2_y}) + F_3 \cos(\vartheta_{3_y}) &= 0 \\ F_1 \cos(\vartheta_{1_z}) + F_2 \cos(\vartheta_{2_z}) + F_3 \cos(\vartheta_{3_z}) &= 4 tn \end{aligned}$$

Η επίλυση του συστήματος δίδει :

$$F_1 = -5 tn \text{ (Θλιπτική)}, \quad F_2 = -5 tn \text{ (Θλιπτική)}, \quad F_3 = 10.40 tn \text{ (Εφελκυστική)}$$



Κόμβος A

Στο Σχήμα φαίνονται σχεδιασμένες οι δυνάμεις που ασκούνται στον κόμβο. Οι άγνωστες δυνάμεις των ράβδων 4 και 5 θεωρούνται εφελκυστικές. Άγνωστη επίσης είναι η δύναμη της κύλισης

Εργαζόμαστε όπως και πριν για να προσδιορίσουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων F_4 και F_5 . Τα συνημίτονα κατεύθυνσης της δύναμης 10.4 tn είναι ίδια κατά μέτρο αλλά με αντίθετο πρόσημο με αυτά της F_3

του προηγούμενου κόμβου (γιατί;). Η δύναμη A είναι κάθετη στο επίπεδο XZ, οπότε τα συνημίτονα κατεύθυνσής της είναι 0 , 1 , 0 .

Τελικά :

$$\begin{array}{llll} \cos(\vartheta_{4_x}) = +0.573 & \cos(\vartheta_{5_x}) = -0.573 & \cos(\vartheta_{13_x}) = 0.000 & \cos(\vartheta_{A_x}) = 0.000 \\ \cos(\vartheta_{4_y}) = 0.000 & \cos(\vartheta_{5_y}) = 0.000 & \cos(\vartheta_{13_y}) = +0.923 & \cos(\vartheta_{A_y}) = +1.000 \\ \cos(\vartheta_{4_z}) = -0.819 & \cos(\vartheta_{5_z}) = -0.819 & \cos(\vartheta_{13_z}) = -0.385 & \cos(\vartheta_{A_z}) = 0.000 \end{array}$$

Οι τέσσερις δυνάμεις που συντρέχουν στον κόμβο A ισορροπούν, οπότε ισχύει :

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \Rightarrow$$

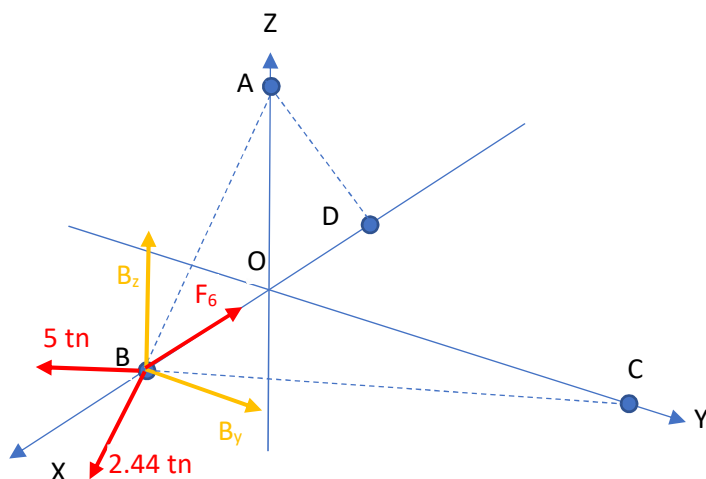
$$F_4(0.573) + F_5(-0.573) + 10.4tn(0.000) + A(0.000) = 0$$

$$F_4(0.000) + F_5(0.000) + 10.4tn(0.923) + A(1.000) = 0$$

$$F_4(-0.819) + F_5(-0.819) + 10.4tn(-0.385) + A(0.000) = 0$$

Η επίλυση του συστήματος δίδει :

$$F_4 = -2.44 \text{ tn (Θλιπτική)}, \quad F_5 = -2.44 \text{ tn (Θλιπτική)}, \quad A = -9.60 \text{ tn}$$



Κόμβος B

Στο Σχήμα φαίνονται σχεδιασμένες οι δυνάμεις που ασκούνται στον κόμβο. Η άγνωστη δύναμη της ράβδου 6 θεωρείται εφελκυστική. Άγνωστες επίσης είναι οι δυνάμεις της στήριξης. Τις δυνάμεις από τις ράβδους 1 και 4 που έχουμε ήδη υπολογίσει, τις σχεδιάζουμε με την πραγματική τους φορά : Θλιπτικές, άρα «σπρώχνουν» τον κόμβο B.

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων B_z , B_y και F_6 είναι προφανή, αφού οι δυνάμεις αυτές είναι παράλληλες στους άξονες τους συστήματος XYZ. Είναι δε :

$$(0, 0, 1) \text{ , } (0, 1, 0) \text{ και } (-1, 0, 0)$$

αντίστοιχα. Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων 5 tn και 2.44 tn, όπως έχουν σχεδιασθεί, είναι ίδια με αυτά των F_4 και F_4 των προηγούμενων κόμβων.

Οι πέντε δυνάμεις που συντρέχουν στον κόμβο B ισορροπούν, οπότε ισχύει :

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \Rightarrow$$

$$B_z(0.000) + B_y(0.000) + F_6(-1.000) + 2.44 \text{ tn}(0.573) + 5 \text{ tn}(0.280) = 0$$

$$B_z(0.000) + B_y(1.000) + F_6(0.000) + 2.44 \text{ tn}(0.000) + 5 \text{ tn}(-0.960) = 0$$

$$B_z(1.000) + B_y(0.000) + F_6(0.000) + 2.44 \text{ tn}(-0.819) + 5 \text{ tn}(0.000) = 0$$

Η επίλυση, εύκολη εν προκειμένω, του συστήματος, δίδει :

$$B_z = +2.00 \text{ tn} \text{ , } B_y = +4.80 \text{ tn} \text{ , } F_6 = +2.78 \text{ tn (Εφελκυστική)}$$

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων στήριξης στο σημείο D, θα μπορούσε κανείς να εξετάσει την ισορροπία του κόμβου D, με παρόμοιο τρόπο όπως και πριν.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να εξετάσει την **ισορροπία όλου του δικτυώματος**, θεωρούμενου ως ένα σώμα και να δει μόνο την συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$$

$$\sum F_y = B_y + D_y + A_y = 0 \Rightarrow D_y = 4.8 \text{ tn}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow B_z + D_z - 4 \text{ tn} = 0 \Rightarrow D_z = 2 \text{ tn}$$