

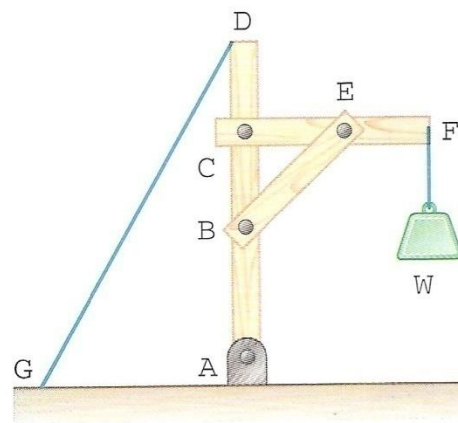
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι - Στατική

**Εσωτερικές δυνάμεις στα μέλη των
κατασκευών**

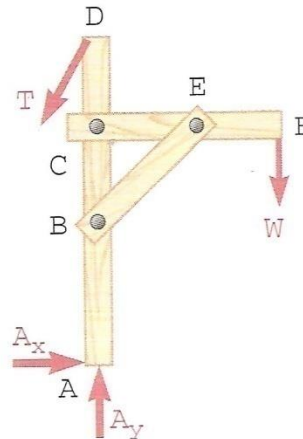
Διδάσκων

Δρ Καββουσάνος Μανόλης

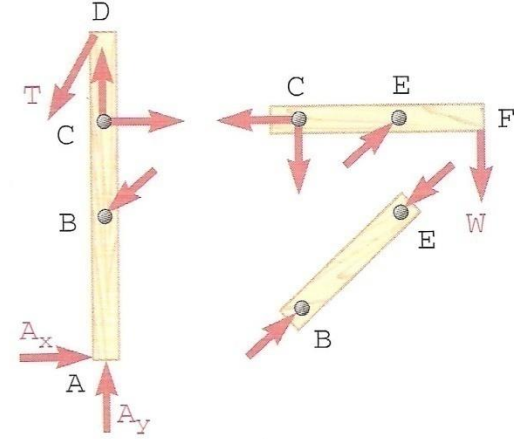
Ανάλυση των κατασκευών



(a)



(b)



(c)

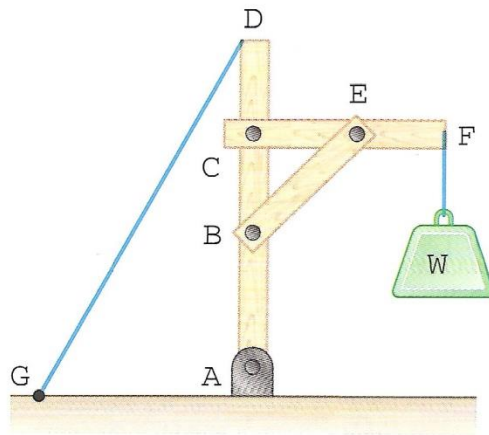
Σχήμα 6.1

Μέχρι τώρα διαπραγματευθήκαμε την ισορροπία ενός μοναδικού στερεού σώματος.

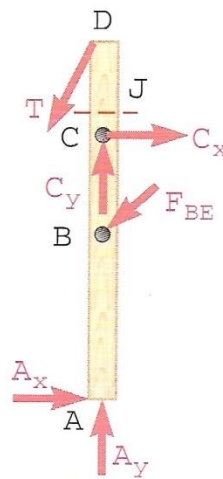
Στην Μηχανολογία, αυτή η περίπτωση είναι μάλλον σπάνια. Συνήθως χρησιμοποιούνται κατασκευές που συντίθενται από περισσότερα μέλη – στοιχεία όπως ο γερανός του σχήματος.

Αν θεωρήσει κανείς τον γερανό ως ένα σώμα μπορεί να υπολογίσει τις αντιδράσεις A_x και A_y στην άρθρωση καθώς και την τάση του καλωδίου στήριξης. Οι δυνάμεις αυτές μαζί με το βάρος W και το ίδιο βάρος του γερανού αποτελούν τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στην κατασκευή.

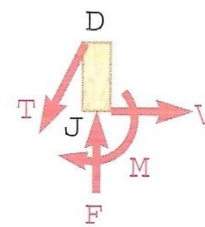
Ανάλυση των κατασκευών



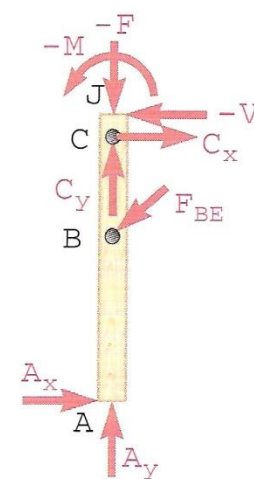
(a)



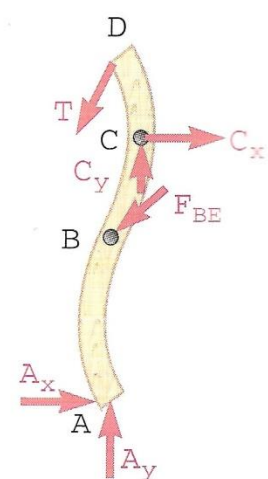
(b)



(c)



(d)

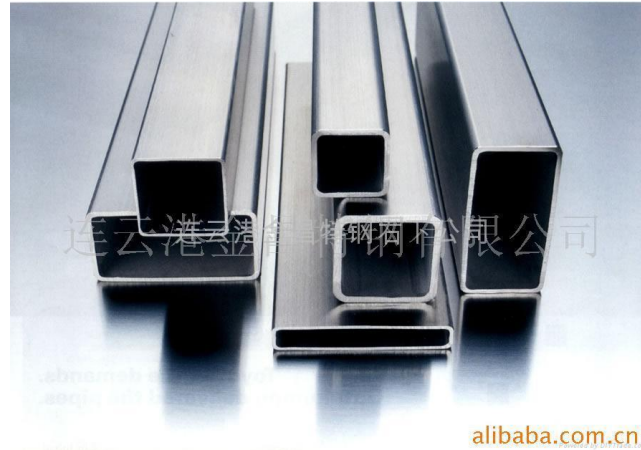
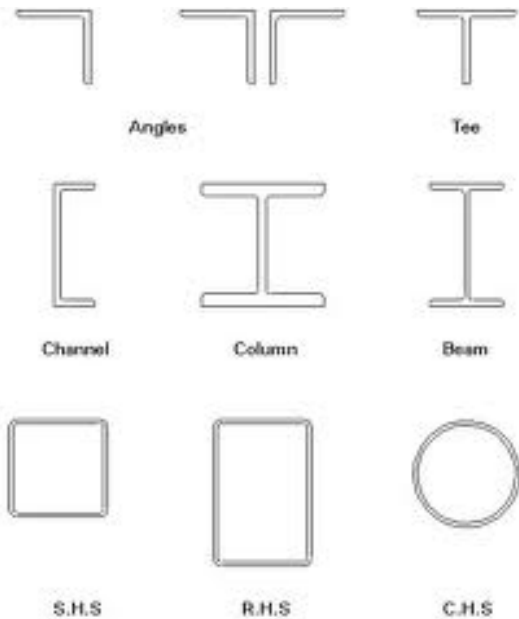


(e)

Αν εξετάσουμε την ισορροπία ενός μέλους της κατασκευής – ας πούμε του στύλου AD, τότε μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ισορροπία εξασφαλίζεται εξ αιτίας των δυνάμεων που εξασκούν άλλα μέλη της κατασκευής στις αρθρώσεις C και D. Οι δυνάμεις αυτές που συγκρατούν τα διάφορα μέλη της κατασκευής λέγονται εσωτερικές δυνάμεις της κατασκευής.

Αν τώρα φαντασθούμε ένα τμήμα του στύλου, το DJ, ως πακτωμένο στο υπόλοιπο – το JA, για να ισορροπεί πρέπει το JA να του εξασκεί δυνάμεις F και V καθώς και ροπή M – σχήμα (c). Οι δυνάμεις αυτές λέγονται εσωτερικές δυνάμεις της δοκού AD. Είναι φανερό ότι για μελετήσουμε την αντοχή της δοκού και τον τρόπο που παραμορφώνεται, πρέπει να προσδιορίσουμε τις εσωτερικές αυτές δυνάμεις.

Ανάλυση των κατασκευών



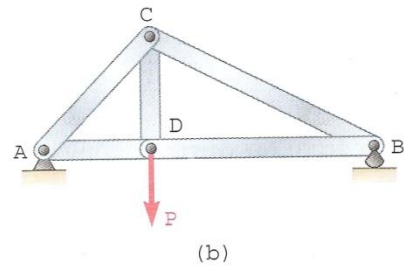
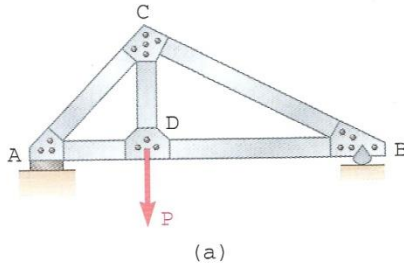
Στην περίπτωση του γερανού, ο στύλος (αλλά και ο πρόβολος) «φορτίζονται» με περισσότερες από 2 δυνάμεις που δεν είναι συγγραμμικές έτσι που εμφανίζονται πάντα εσωτερικές «διατμητικές» δυνάμεις και «καμπτικές» ροπές .

Για να αντέχουν, τα μέλη αυτά των κατασκευών που στο εξής θα τα ονομάζουμε και «δοκούς», οι διατομές τους διαμορφώνονται με «έξυπνο» τρόπο ώστε να αντέχουν στις κάμψεις με το ελάχιστο δυνατό βάρος.

Τις κατασκευές αυτές θα ονομάζουμε **πλαίσια**.



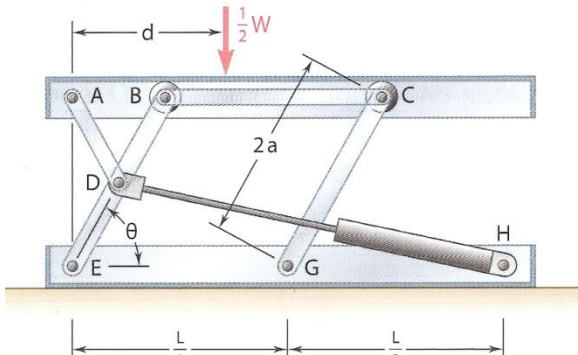
Δικτυώματα - μηχανισμοί



Η «στερεή κατασκευή» του διπλανού σχήματος, αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα που συνδέονται μεταξύ τους σε κόμβους – αρθρώσεις. Τα μέλη αυτά επομένως «φορτίζονται με μία δύναμη που δρα κατά μήκος τους». Τα μέλη αυτά που θα τα ονομάζομαι και «ράβδους» δεν κάμπτονται οπότε η ανάλυση της αντοχής τους είναι ευκολότερη. Κατασκευές σαν κι αυτή ονομάζονται **δικτυώματα**.

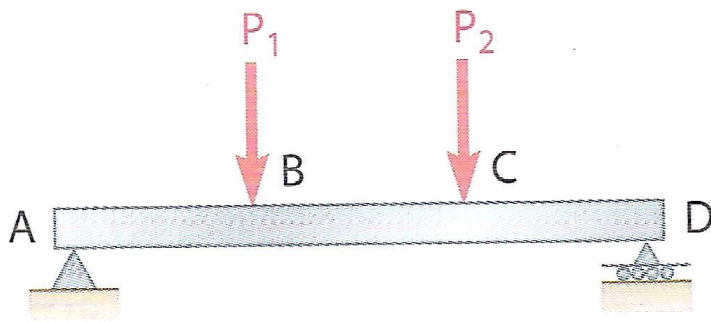
Η κατασκευή του διπλανού σχήματος χρησιμοποιείται για την ανύψωση φορτίων. Δεν είναι στερεή προφανώς – όσο εκτείνεται το βάκτρο του κυλίνδρου η πλατφόρμα ανυψώνεται. Η ανάλυση των δυνάμεων πάντως που εξασκεί αλλά και η ανάλυση των εσωτερικών δυνάμεων είναι πολύ σημαντικά θέματα για την Μηχανολογία.

Κατασκευές σαν κι αυτή ονομάζονται **μηχανισμοί**.

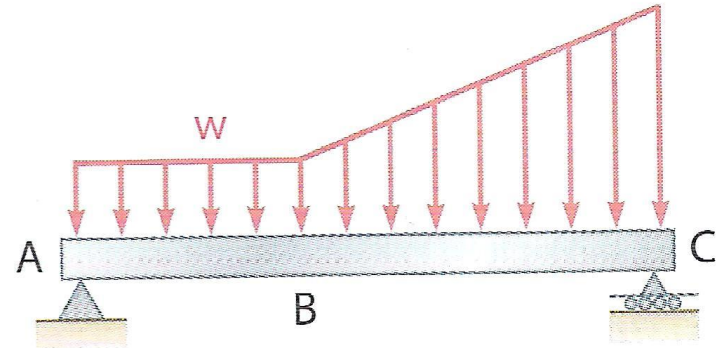


Δοκοί

Δοκός είναι ένα στοιχείο –μέλος μιας κατασκευής (συνήθως ευθύγραμμο) που προορίζεται να «παραλάβει» φορτία εφαρμοσμένα σε διάφορα σημεία κατά μήκος της. Για να επιλέξουμε την δοκό που είναι ικανή να αντέξει τα φορτία αυτά, πρέπει να υπολογίσουμε σε κάθε σημείο της τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές.



(a) Συγκεντρωμένα φορτία



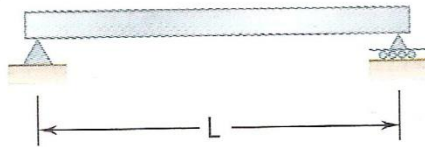
(b) Κατανεμημένα φορτία

Μια δοκός μπορεί να φορτίζεται με **συγκεντρωμένα ή κατανεμημένα φορτία**. Κατανεμημένα φορτία προέρχονται συνήθως από το ίδιο βάρος, την υδροστατική πίεση και την ανεμοπίεση

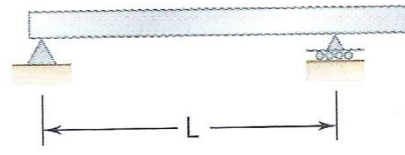
Δοκοί

Οι δοκοί μπορούν να στηρίζονται είτε ισοστατικά είτε υπερστατικά.

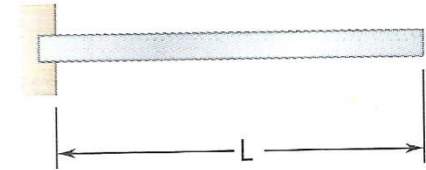
Ισοστατικές
δοκοί



(a) Αμφιέριστη δοκός

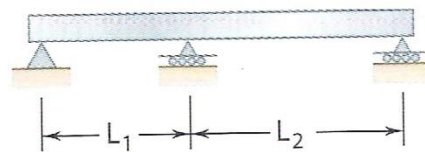


(b) Μονοπροέχουσα δοκός

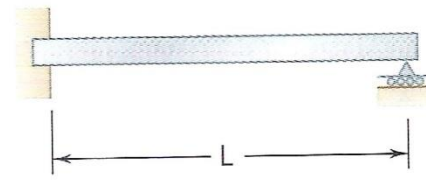


(c) Δοκός πρόβολος

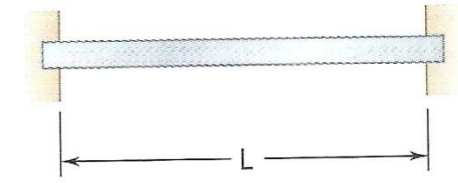
Υπερστατικές
δοκοί



(d) Συνεχής δοκός



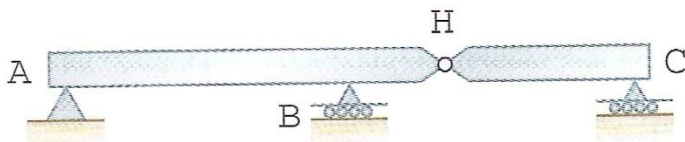
(e) Δοκός πακτωμένη και
με στήριγμα κύλισης



(f) Αμφίπακτη δοκός



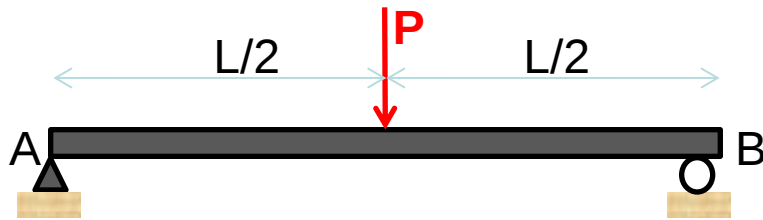
(a)



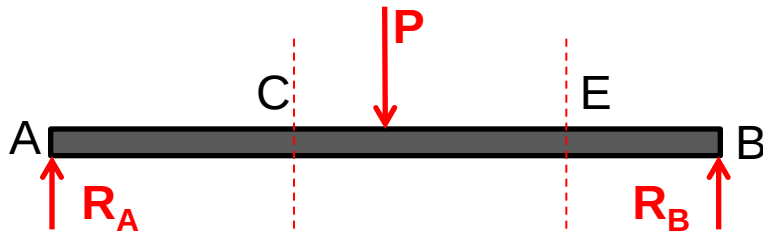
(b)

Στις περιπτώσεις υπερστατικών δοκών αν προστεθεί μια άρθρωση με κατάλληλο τρόπο, τότε προκύπτουν δύο δοκοί και η κατασκευή μπορεί να γίνει ισοστατική. Τέτοιου τύπου δοκοί ονομάζονται δοκοί Gerber.

Δοκοί : Τέμνουσα δύναμη, Καμπτική Ροπή



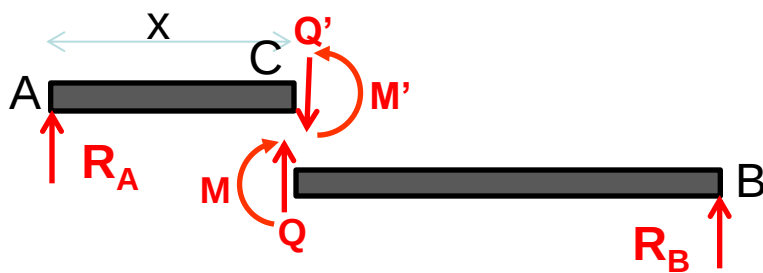
Ας πάρουμε την πολύ απλή περίπτωση μιας αμφιέριστης ισοστατικής δοκού που φορτίζεται στο μέσο της με κατακόρυφη δύναμη P . Εύκολα μπορεί να προκύψει ότι οι αντιδράσεις R_A και R_B στις στηρίξεις είναι επίσης κατακόρυφες, μέτρου $P/2$.



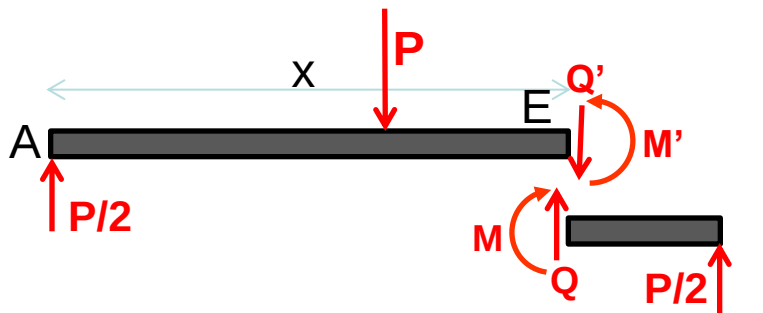
Ας φαντασθούμε τώρα το τμήμα AC της δοκού, ως ξεχωριστό σώμα. Το σώμα αυτό δέχεται την εξωτερική δύναμη R_A και ισορροπεί μόνο γιατί μπορούμε να το φαντασθούμε πακτωμένο στο υπόλοιπο τμήμα της δοκού.

Την κάθετη στο φορέα δύναμη που εξασκεί το AC στο CB θα ονομάζομε **τέμνουσα δύναμη** της δοκού στο σημείο C και θα την συμβολίζομε με Q .

Την ροπή που εξασκεί το AC στο CB (που είναι το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων του τμήματος AC ως προς το C) θα ονομάζομε **καμπτική ροπή** της δοκού στη θέση C και θα συμβολίζομε με M .



Η τέμνουσα δύναμη, κατά σύμβαση, θα θεωρείται θετική, όταν έχει φορά κατά τα θετικά του άξονα των Y .
Αντίστοιχα, η καμπτική ροπή, κατά σύμβαση, θεωρείται θετική όταν έχει την φορά των δεικτών του ωρολογίου.



Για το σημείο C , εύκολα προκύπτει ότι :

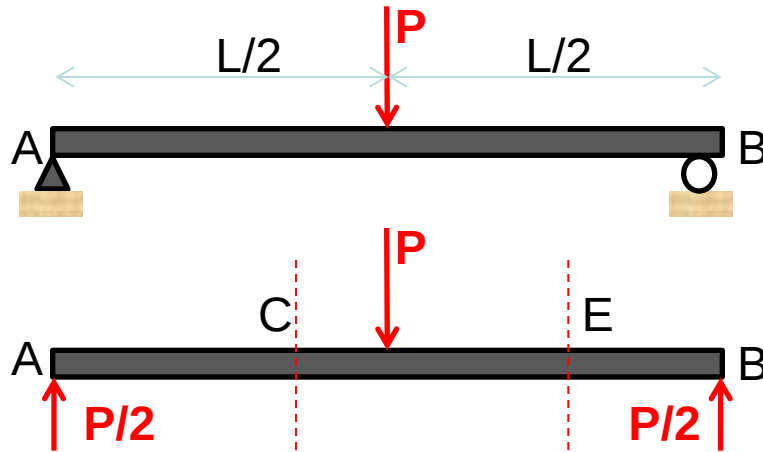
$$Q = R_A = P/2 \text{ και } M = (P/2) * x$$

Ενώ για το σημείο E :

$$Q = R_A - P = -P/2 \text{ και}$$

$$M = (P/2) * x - P * (x - L/2) = P * (L - x) / 2$$

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων - καμπτικών ροπών



Παρατηρούμε συνεπώς ότι τόσο η **τέμνουσα δύναμη** όσο και η **καμπτική ροπή μεταβάλλονται κατά μήκος της δοκού**.

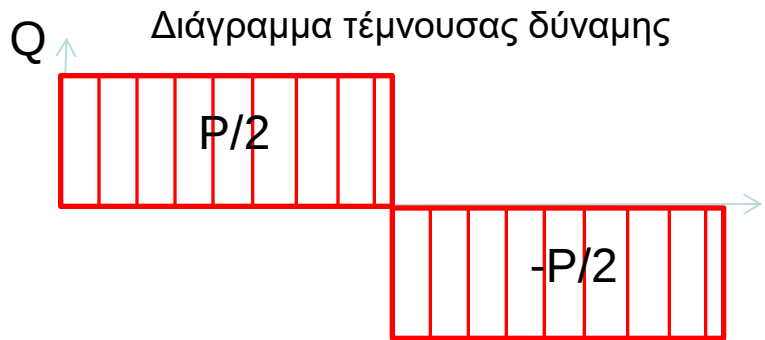
Δεδομένου δε ότι η αντοχή της εξαρτάται από τα μεγέθη αυτά, είναι σκόπιμο να σχεδιάσουμε **τα διαγράμματα** των παραπάνω μεγεθών κατά μήκος της δοκού.

Για την περίπτωση που μελετούμε, έχουμε ήδη βρει, ότι η τέμνουσα δύναμη είναι :

αριστερά της P
ενώ δεξιά της

$$Q = P/2$$

$$Q = -P/2$$

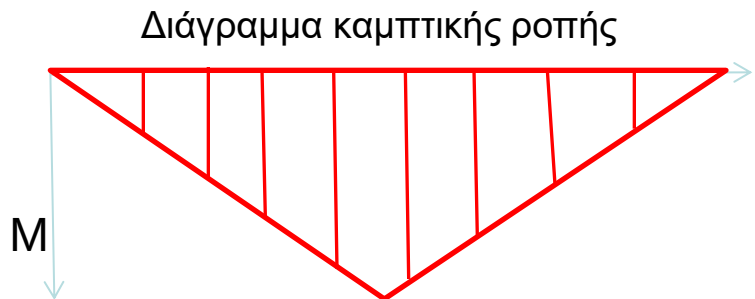


Η καμπτική ροπή είναι αντίστοιχα :

αριστερά της P
και δεξιά της

$$M = (P/2) * x$$

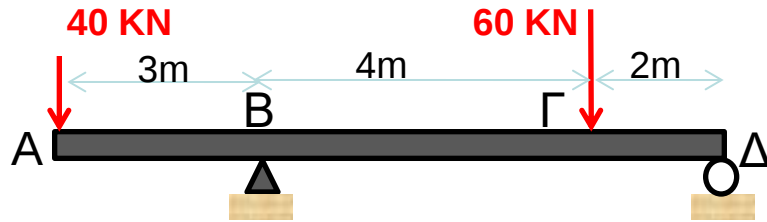
$$M = P*(L-x)/2$$



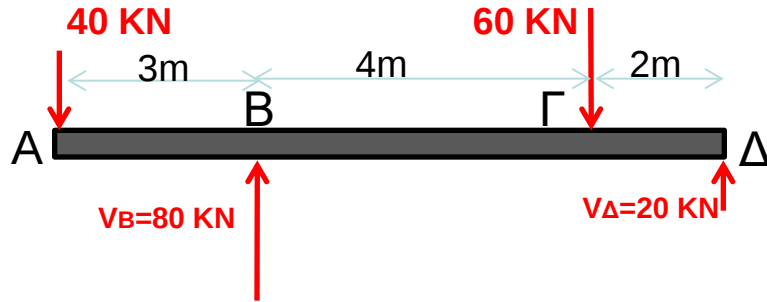
Η μέγιστη τιμή της καμπτικής ροπής προκύπτει αν σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω σχέσεις θέσουμε $x=L/2$, και είναι :

$$\mathbf{M_{max} = P*L/4}$$

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων – Παράδειγμα



Μονοπροέχουσα δοκός φορτίζεται όπως στο σχήμα. Βρείτε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις, σχεδιάστε τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών και δώσετε τις μέγιστες απόλυτες τιμές τους.



Ροπές ως προς το σημείο Δ :

$$V_B \cdot 6 = 40 \cdot 9 + 60 \cdot 2 \Rightarrow V_B = 80 \text{ KN}$$

Ισορροπία δυνάμεων κατά τον άξονα γ :

$$V_B + V_\Delta = 40 + 60 \Rightarrow V_\Delta = 20 \text{ KN}$$

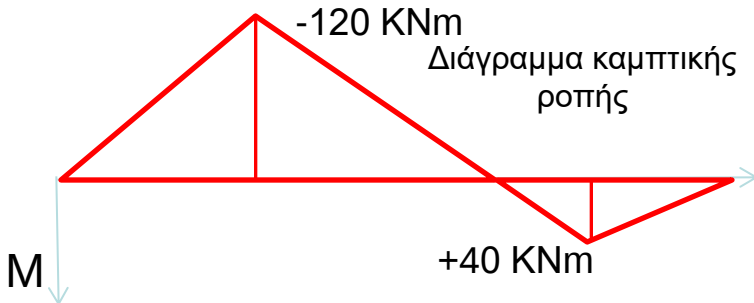
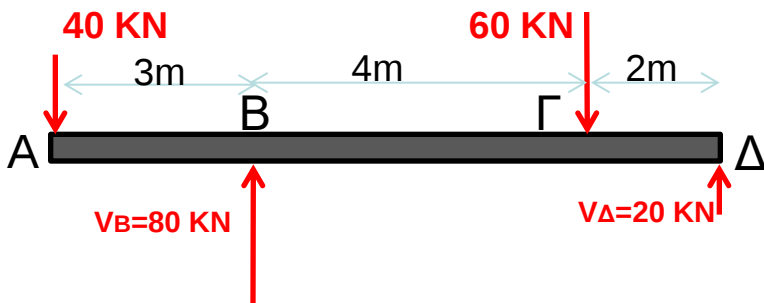
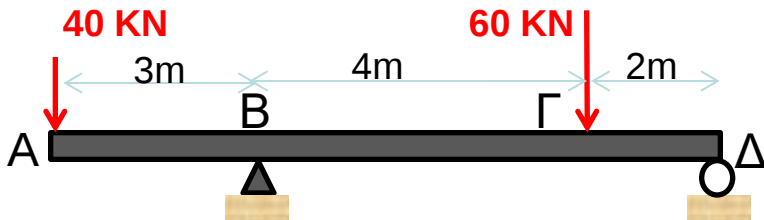
Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης



Για την περίπτωση συγκεντρωμένων φορτίων :

1. Όπως ίσως εύκολα μπορεί να προκύψει εκ του ορισμού, σε κάθε σημείο της δοκού τέμνουσα δύναμη είναι το αλγεβρικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που επιδρούν στο αριστερό τμήμα της δοκού.

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων – Παράδειγμα

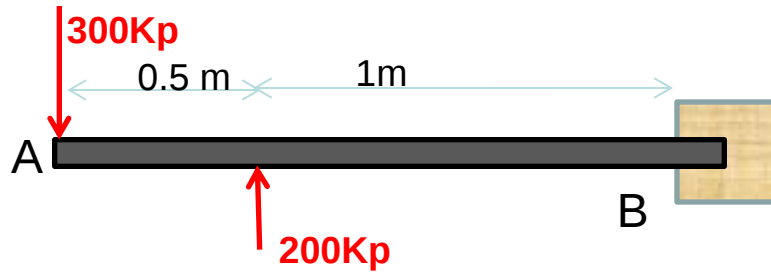


2. Καμπτική ροπή σε ένα σημείου είναι εξ ορισμού το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων αριστερά του σημείου ως προς το σημείο αυτό. Η καμπτική ροπή είναι λοιπόν άθροισμα συναρτήσεων 1^{ου} βαθμού ως προς την απόσταση του σημείου από το αριστερό άκρο. Το διάγραμμα της συνεπώς θα αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι γενικά παράλληλα στον άξονα X και που θα αλλάζουν κλίση στα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων.

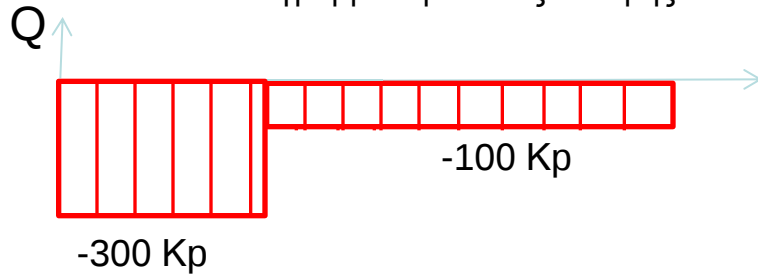
Στην περίπτωση μας, ξεκινώντας από αριστερά, στο σημείο A προφανώς η καμπτική ροπή είναι 0. Από το A -> B θα μεταβάλλεται γραμμικά και στο B θα έχει την τιμή : **$M_B = -40\text{KN} \cdot 3\text{m} = -120\text{KNm}$**
Στο σημείο Γ θα έχει την τιμή :
 $M_\Gamma = -40 \cdot 7 + 80 \cdot 4 = \Rightarrow$ **$M_\Gamma = +40\text{KNm}$**
Τέλος στο σημείο Δ της κύλισης, προφανώς η καμπτική ροπή και πάλι θα γίνει 0.

Τοποθετούμε τις χαρακτηριστικές αυτές τιμές στο διάγραμμα και τις ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα προκειμένου να προκύψει το διάγραμμα καμπτικών ροπών.

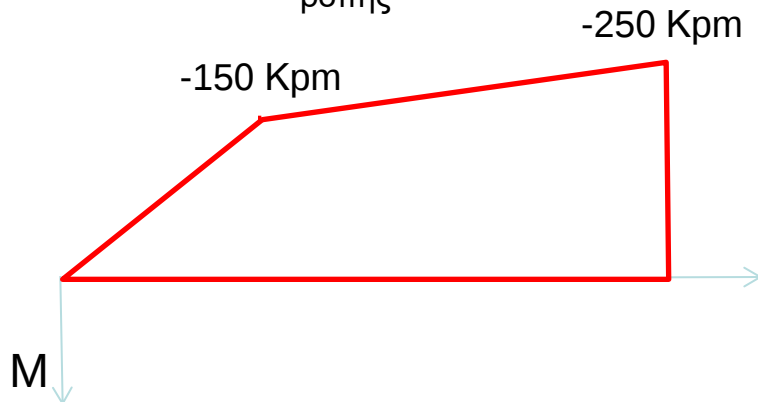
Διαγράμματα τέμνουσών δυνάμεων – Παράδειγμα



Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης



Διάγραμμα καμπτικής ροπής

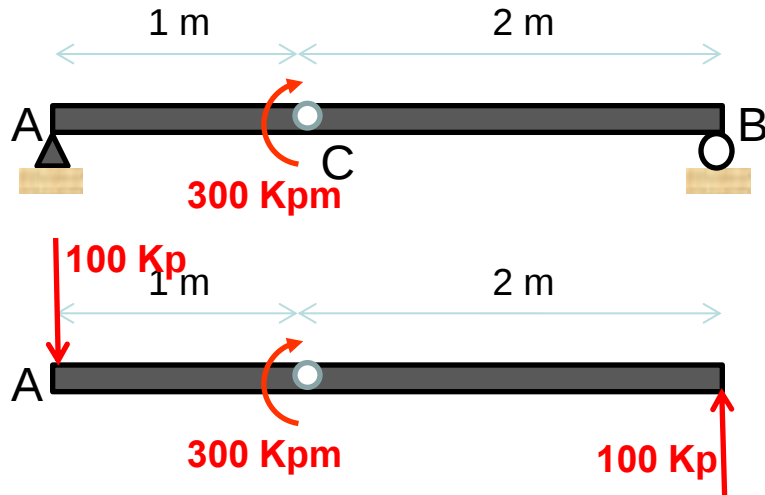


Για τον πρόβολο του σχήματος να σχεδιάσετε τα διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής.

Με σκέψεις αντίστοιχες του προηγούμενου παραδείγματος σχεδιάζουμε τα διαγράμματα όπως στα σχήματα.

Παρατήρηση : Δείτε ότι δεν χρειάστηκε στο παράδειγμα αυτό να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις στην πάκτωση. Αντιθέτως αυτές μπορούν να προκύψουν από τα διαγράμματα : Είναι ακριβώς η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή στο σημείο B – με αντίθετο πρόσημο όμως!

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων – Παράδειγμα



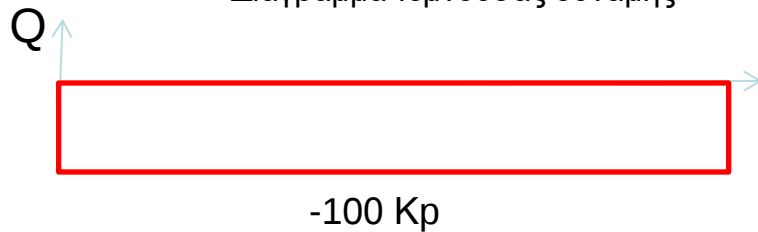
Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος φορτίζεται μόνο από ροπή 300 Kpm στο σημείο C. Υπολογίστε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις καθώς και τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ρομών.

Ροπές ως προς A :

$$V_B * 3 \text{ m} = 300 \text{ Kpm} \Rightarrow V_B = 100 \text{ Kp}$$

Ισορροπία στον άξονα των γ : $V_A = - 100 \text{ Kp}$

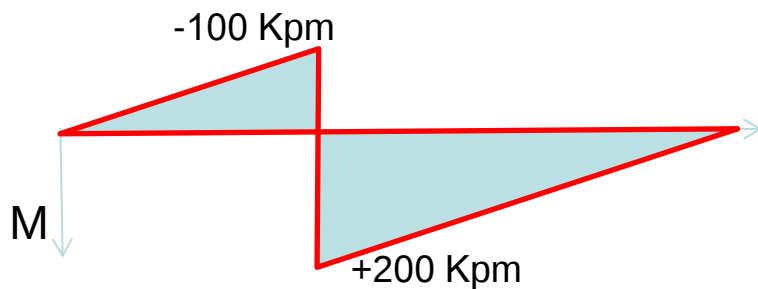
Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης



Το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης δεν παρουσιάζει κάτι ξεχωριστό.

Για την καμπτική ροπή παρατηρούμε ότι :

Διάγραμμα καμπτικής ροπής



Από αριστερά μέχρι το σημείο C έχει γραμμική μεταβολή και στο σημείο αυτό έχει τιμή $- 100 \text{ Kp} * 1 \text{ m} = - 100 \text{ Kpm}$. Στο σημείο αυτό επενεργεί η συγκεντρωμένη ροπή των $+ 300 \text{ Kpm}$, οπότε το διάγραμμα κάνει άλμα στα $+ 200 \text{ Kpm}$. Από το σημείο αυτό φθίνει στη συνέχεια γραμμικά μέχρι να μηδενισθεί στην κύλιση – σημείο B.

Κατανεμημένα φορτία σε δοκούς

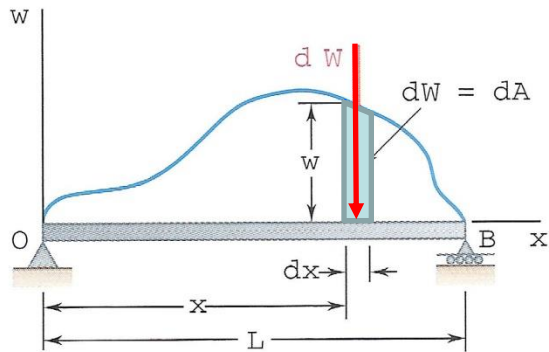
Εκτός από τα συγκεντρωμένα φορτία – δυνάμεις που (θεωρητικά τουλάχιστον) εφαρμόζονται σε ένα σημείο της δοκού, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες τα φορτία «κατανέμονται, μοιράζονται» καθ' όλο ή ένα τμήμα του μήκους της δοκού. Κατανεμημένα φορτία μπορεί να είναι το ίδιο βάρος, ή οι δυνάμεις που εξασκεί στη δοκό άλλη επιφάνεια που στηρίζεται σ' αυτήν και η οποία επιφάνεια μπορεί να δέχεται κατανεμημένα βαρυτικά φορτία ή υδροστατική πίεση ή ανεμοπίεση.

~

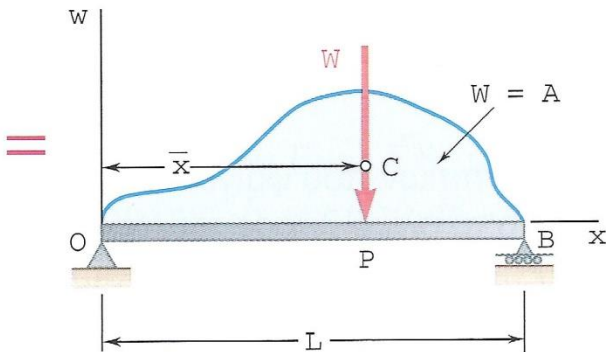
Το κατανεμημένο φορτίο θα μετρούμε με την δύναμη w που δέχεται η δοκός ανά μονάδα μήκους. Στο Σχήμα (α) φαίνεται ότι η συνάρτηση $w(x)$ μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση. Σε κάθε όμως περίπτωση, η δύναμη που δέχεται η δοκός σε ένα στοιχειώδες τμήμα της dx είναι $dW = w \cdot dx$, οπότε η συνολική δύναμη W είναι το άθροισμα των στοιχειωδών αυτών δυνάμεων, δηλαδή :

$$W = \int_0^L w dx$$

που είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας A (σχήμα b).

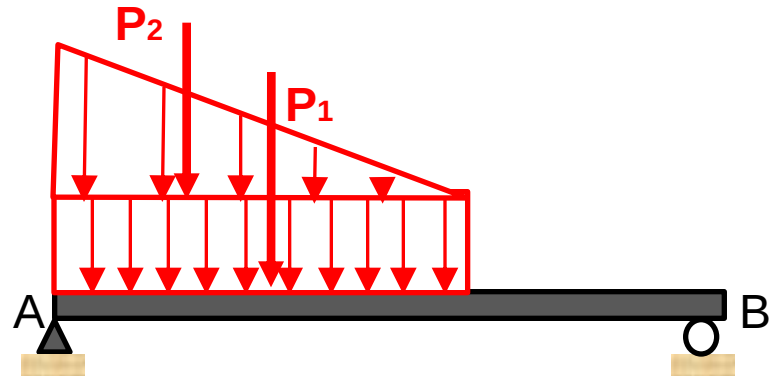
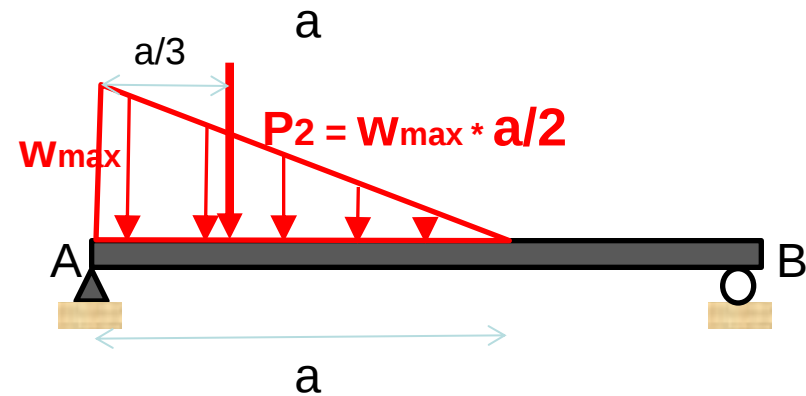
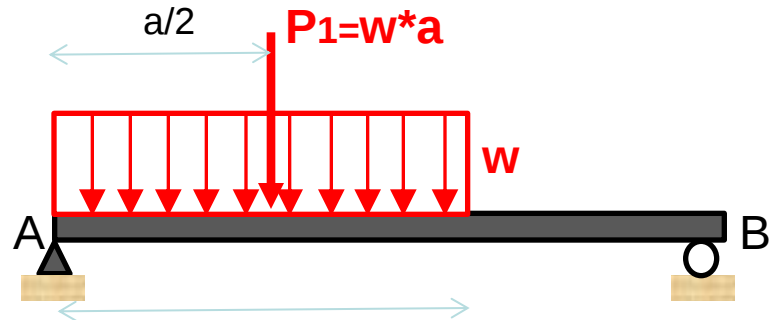


(a)



(b)

Κατανεμημένα φορτία σε δοκούς



Το σημείο εφαρμογής της συνολικής δύναμης εξ αιτίας του κατανεμημένου φορτίου, διέρχεται από το *κεντροειδές* της επιφάνειας A – το κέντρο βάρους δηλαδή μιάς πλάκας ομοιόμορφου πάχους που έχει το σχήμα της επιφάνειας.

Ισχύει (σχήμα b, προηγούμενη διαφάνεια):

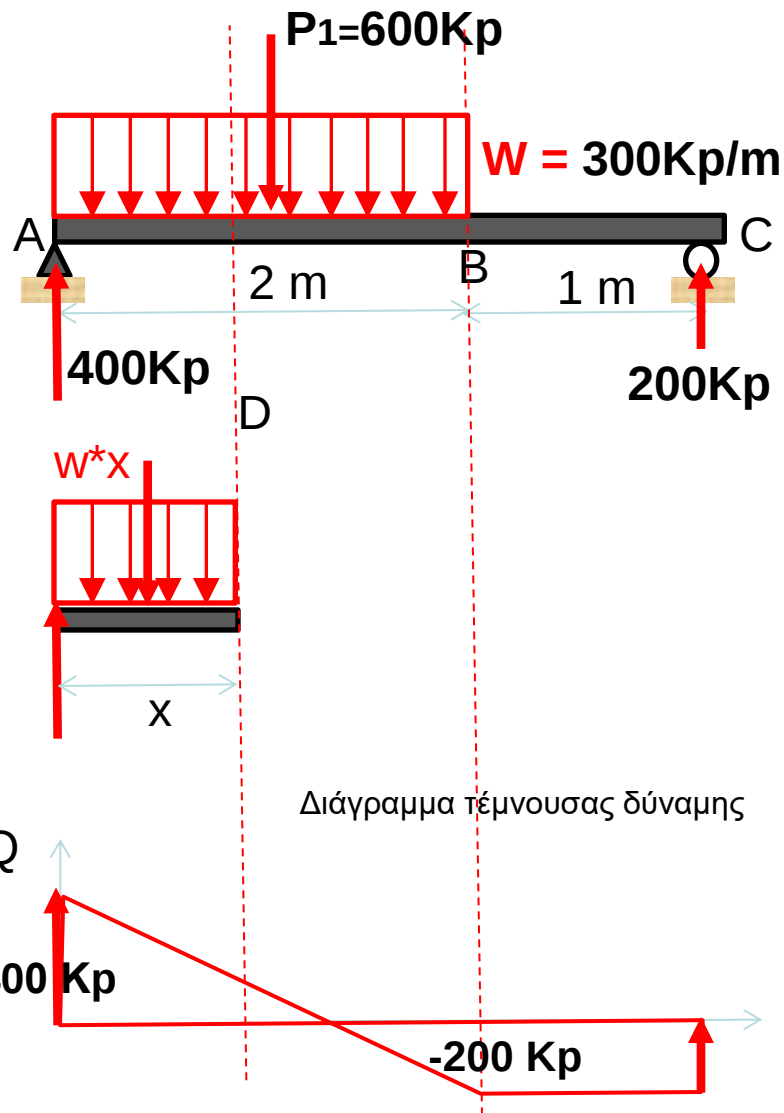
$$\bar{X} = \frac{\int_0^a x w dx}{W}$$

που είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας A (σχήμα b).

Στα σχήματα φαίνεται η συνολική ισοδύναμη δύναμη καθώς και το σημείο εφαρμογής της για τις απλές περιπτώσεις του ομοιόμορφου και του «τριγωνικού» φορτίου.

Το «τραπεζοειδές» φορτίο είναι ισοδύναμο με ένα ομοιόμορφο και ένα τριγωνικό (σχήμα).

Κατανεμημένα φορτία σε δοκούς – Διαγράμματα τέμνουσας δύναμης καμπτικής ροής - Παράδειγμα



Η δοκός του σχήματος φορτίζεται με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο $w = 300 \text{ Kp/m}$, όπως στο σχήμα. Σχεδιάσετε τα διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροής.

Για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων στις στηρίξεις βρίσκουμε την ισοδύναμη δύναμη :

$$P_1 = w \cdot 2 \text{ m} = \mathbf{600 \text{ Kp}}$$

Οπότε εύκολα προκύπτουν οι αντιδράσεις :

$$\mathbf{A_y = 400 \text{ Kp} \quad A_x = 200 \text{ Kp}}$$

Τέμνουσα δύναμη – Τμήμα AB

Σε τυχούσα θέση x , η ισοδύναμη δύναμη του κατανεμημένου φορτίου είναι $w \cdot x$, οπότε η τέμνουσα δύναμη είναι :

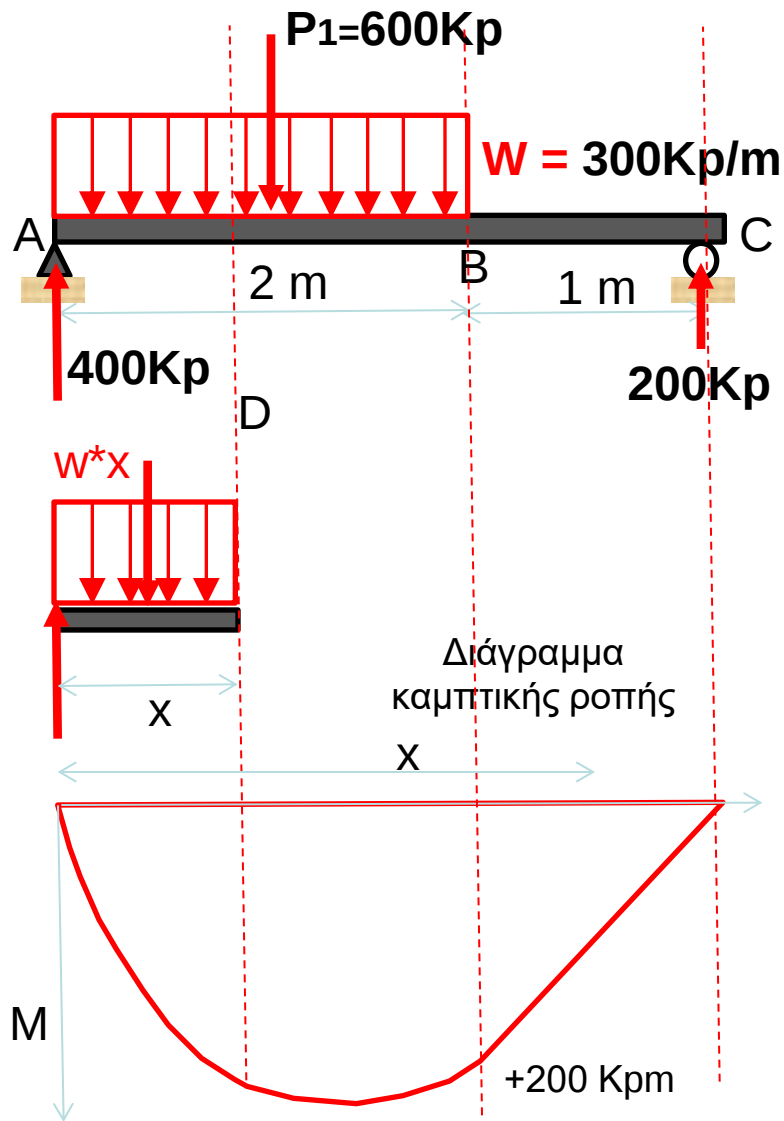
$$\mathbf{Q = A_y - wx = 400 - 300x \text{ Kp.}}$$

Το διάγραμμα συνεπώς είναι ευθύγραμμο τμήμα όπως στο σχήμα.

Τέμνουσα δύναμη – Τμήμα BC

Στο τμήμα αυτό δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη συνεπώς η τέμνουσα παραμένει ίση με την τιμή που έχει στο σημείο B.

Κατανεμημένα φορτία σε δοκούς – Διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροής - Παράδειγμα



Η δοκός του σχήματος φορτίζεται με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο $w = 300 \text{ Kp/m}$, όπως στο σχήμα. Σχεδιάστε τα διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροής.

Καμπτική ροή – Τμήμα AB

Σε τυχούσα θέση x , η ισοδύναμη δύναμη του κατανεμημένου φορτίου είναι $w \cdot x$, οπότε η καμπτική ροή είναι :

$$M(x) = A_y \cdot x - (w \cdot x) \cdot (x/2) = >$$

$$M(x) = 400x - 150x^2 \text{ Kp.}$$

Το διάγραμμα συνεπώς είναι τμήμα παραβολής όπως στο σχήμα.

Καμπτική ροή – Τμήμα BC

Σε τυχούσα θέση x , η καμπτική ροή είναι :

$$M(x) = A_y \cdot x - P_1 \cdot (x - 1) = >$$

$$M(x) = -200x + 600 \text{ Kpm.}$$

Το διάγραμμα συνεπώς είναι ευθύγραμμο τμήμα όπως στο σχήμα.