

Άσκηση 7.38 (Στατική, F.Beer et al)

Για την αμφιέριστη δοκό του σχήματος να σχεδιάσετε τα διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής.

ΛΥΣΗ

1. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη δοκό και τοποθετούμε τις αντιδράσεις των στηρίξεων. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει οριζόντια συνιστώσα στις φορτίσεις, δεν υπάρχει αντίστοιχη συνιστώσα και στις αντιδράσεις.

2. Για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων, υπολογίζουμε κατ' αρχήν το ισοδύναμο του κατανεμημένου, συγκεντρωμένο φορτίο (δύναμη) :

$$F = 200 \text{ Kp/m} * 2 \text{ m} = 400 \text{ Kp}$$

Την εν λόγω δύναμη θα χρησιμοποιήσουμε μόνο για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων. Χρησιμοποιούμε τις συνθήκες ισορροπίας της δοκού :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y * 5 - 1200 * 3 - F * 1 = 0 \Rightarrow A_y = 800 \text{ Kp}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 1200 - 400 + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 800 \text{ Kp}$$

3. Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης

Υπενθύμιση : Τέμνουσα δύναμη σε τυχούσα θέση της δοκού είναι το αλγεβρικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων κατά τον άξονα των y , που δρουν στην δοκό αριστερά της θέσης αυτής.

$$\text{Τμήμα AC : } Q(x) = +800 \text{ Kp}$$

$$\text{Τμήμα CD : } Q(x) = +800 \text{ Kp} - 1200 \text{ Kp} = -400 \text{ Kp}$$

Τμήμα DB (δες παράδειγμα σημειώσεων μαθήματος) :

$$Q(x) = +800 \text{ Kp} - 1200 \text{ Kp} - 200 \text{ Kp/m} * (x-3) \text{ m} = -200 * x + 200 \text{ (Kp)}$$

4. Διάγραμμα καμπτικής ροπής.

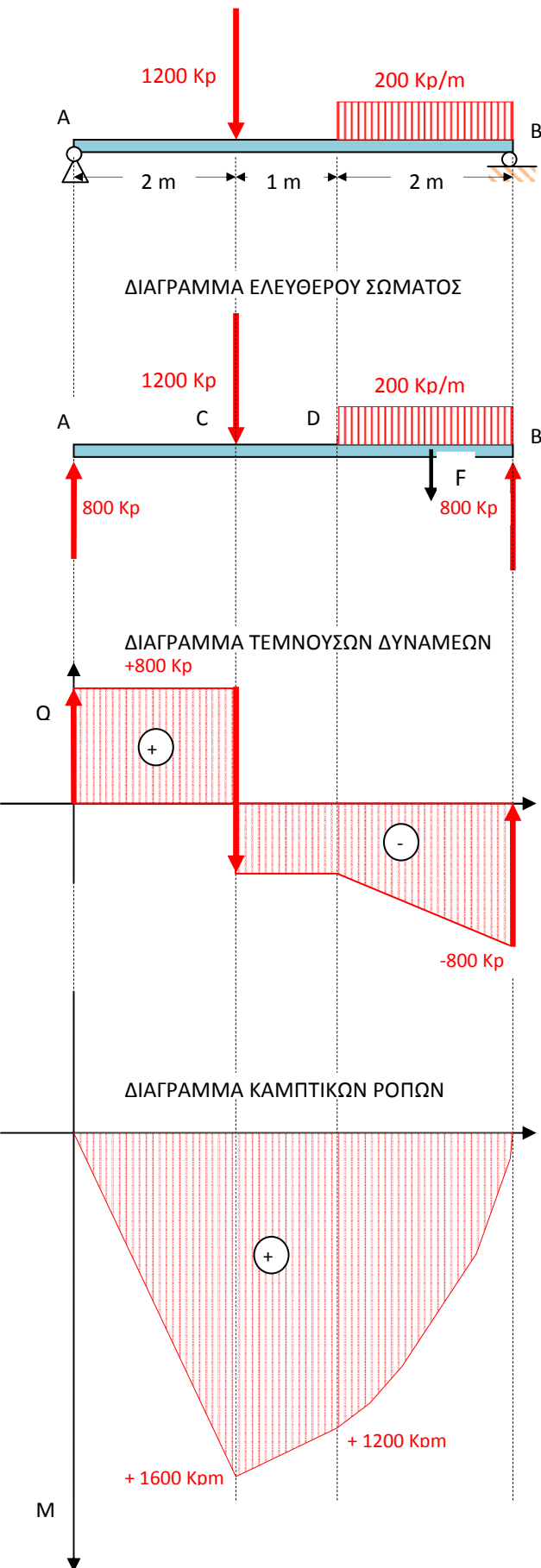
(Δες και παράδειγμα σημειώσεων)

$$\text{Τμήμα AC : } M(x) = +800 \text{ Kp} * x = +800 * x \text{ (Kpm)}$$

$$\text{Τμήμα CD : } M(x) = +800 \text{ Kp} * x - 1200 \text{ Kp} * (x-2) = -400 * x + 2400 \text{ (Kpm)}$$

$$\text{Τμήμα DA : } M(x) = -400 * x + 2400 - [200 \text{ Kp/m} * (x-3) \text{ m}] * [(x-3) \text{ m} / 2] \Rightarrow$$

$$M(x) = -100 x^2 + 200 x + 1500 \text{ (Kpm)}$$



Άσκηση 7.35 (Στατική, F.Beer et al)

Για την δοκό - πρόβολο του σχήματος να σχεδιάσετε τα διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής.

ΛΥΣΗ

1. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για τη δοκό και τοποθετούμε τις αντιδράσεις της πάκτωσης –τις δυνάμεις δηλαδή και την ροπή που η πάκτωση εξασκεί στη δοκό. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει οριζόντια συνιστώσα στις φορτίσεις, δεν υπάρχει αντίστοιχη συνιστώσα και στις αντιδράσεις.

Θα σχεδιάσουμε το διάγραμμα από αριστερά, οπότε δεν είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε τη δύναμη και τη ροπή της πάκτωσης : θα προκύψουν από τα διαγράμματα!

2. Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης

Υπενθύμιση : Τέμνουσα δύναμη σε τυχούσα θέση της δοκού είναι το αλγεβρικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων κατά τον άξονα των y , που δρουν στην δοκό αριστερά της θέσης αυτής.

Τμήμα AB : $Q(x) = -3 \text{ KN}$

Τμήμα BC : $Q(x) = -3 \text{ KN} - 5 \text{ KN} = -8 \text{ KN}$

Τμήμα CD : $Q(x) = -3 \text{ KN} - 5 \text{ KN} + 6 \text{ KN} = -2 \text{ KN}$

Τμήμα DE : $Q(x) = -3 \text{ KN} - 5 \text{ KN} + 6 \text{ KN} - 4 \text{ KN} = -6 \text{ KN}$

4. Διάγραμμα καμπτικής ροπής.

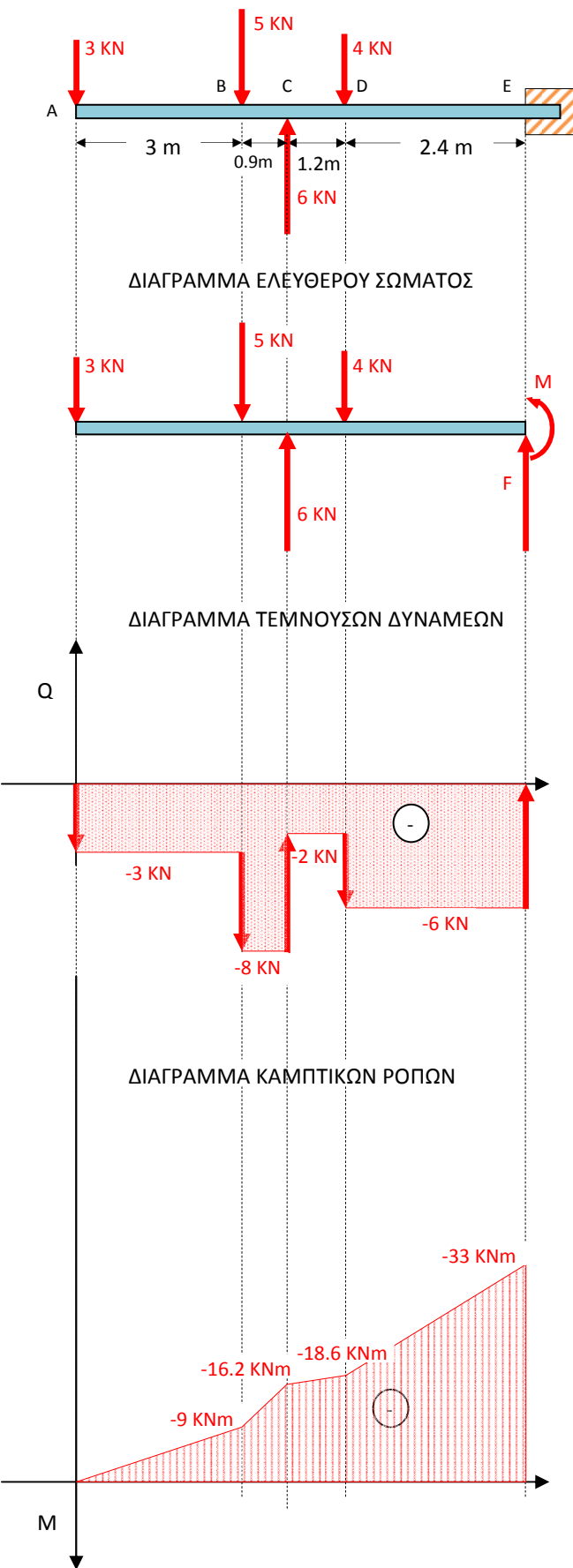
(Δες και παράδειγμα σημειώσεων)

Τμήμα AB : $M(x) = -3 \text{ KN} * x = -3x \text{ (KNm)}$

Τμήμα BC : $M(x) = (-3x) - 5 \text{ KN} * (x-3) = -8x+15 \text{ (KNm)}$

Τμήμα CD : $M(x) = (-8x+15) + 6 \text{ KN} * (x-3.9) = -2x - 8.4 \text{ (KNm)}$

Τμήμα DE : $Q(x) = (-2x - 8.4) - 4 \text{ KN} * (x-5.1) = -6x + 12 \text{ (KNm)}$



Άσκηση 4.17 (Στατική, F.Beer et al)

Το στερεό σώμα ABC αρθρώνεται στο σημείο C και στηρίζεται με κύλιση τη θέση A. Υπολογίστε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις.

ΛΥΣΗ

1. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος.

Την δύναμη A, που είναι κάθετη στο επίπεδο κύλισης, αναλύουμε σε συνιστώσες κατά τον άξονα X και Y. Το ίδιο κάνουμε και για την άγνωστη κατά μέτρο και διεύθυνση δύναμη της άρθρωσης.

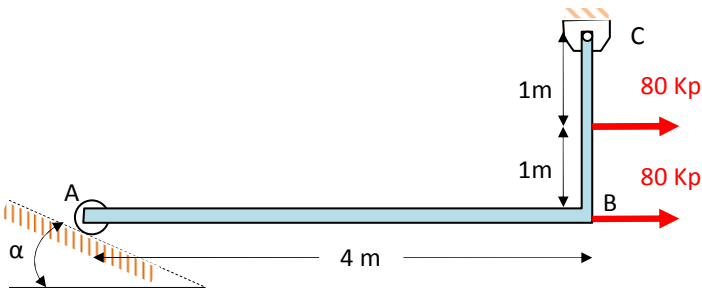
2. Προσδιορισμός των αντιδράσεων

Συνθήκη ισορροπίας ροπών :

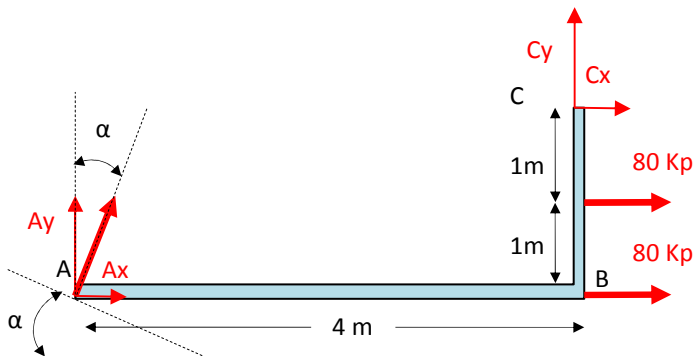
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow A_y \cdot 4 - A_x \cdot 2 - 80 \cdot 2 - 80 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y \cdot 4 - A_x \cdot 2 - 240 = 0 \quad (1)$$

(έχω θεωρήσει θετικές τις ροπές που τείνουν να περιστρέψουν το σώμα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού).



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



Ισχύει όμως επίσης : $\epsilon\phi\alpha = A_x/A_y \quad (2)$

Από τις (1) και (2) προκύπτει : $A_y \cdot 4 - A_y \cdot \epsilon\phi\alpha \cdot 2 - 240 = 0 \Rightarrow$

$$A_y = 240/(4 - 2\epsilon\phi\alpha) \quad (\text{Kp})$$

Και από την (2)

$$A_x = 240\epsilon\phi\alpha/(4 - 2\epsilon\phi\alpha) \quad (\text{Kp})$$

Συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + C_x + 80 + 80 = 0 \Rightarrow$$

$$C_x = -240\epsilon\phi\alpha/(4 - 2\epsilon\phi\alpha) - 160 \quad (\text{Kp})$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y = 0 \Rightarrow$$

$$C_y = -240/(4 - 2\epsilon\phi\alpha) \quad (\text{Kp})$$

Εφαρμογή για διάφορες γωνίες :

$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow \epsilon\phi\alpha = 0 : A_x = 0, \quad A_y = 60 \text{ Kp}, \quad C_x = -160 \text{ Kp}, \quad C_y = -60 \text{ Kp}$$

$$\alpha = 30^\circ \Rightarrow \epsilon\phi\alpha = 0.577 : A_x = 48.7 \text{ Kp}, \quad A_y = 84.4 \text{ Kp}, \quad C_x = -208.7 \text{ Kp}, \quad C_y = -84.4 \text{ Kp}$$

Ερώτηση : Από ποια γωνία «και πάνω» το κεκλιμένο επίπεδο δεν μπορεί να στηρίξει πλέον την στερεό σώμα;

Άσκηση 7.40 (Στατική, F.Beer et al)

Για την αμφιέριστη δοκό του σχήματος να σχεδιάσετε τα διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής.

ΛΥΣΗ

1. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη δοκό και τοποθετούμε τις αντιδράσεις των στηρίξεων. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει οριζόντια συνιστώσα στις φορτίσεις, δεν υπάρχει αντίστοιχη συνιστώσα και στις αντιδράσεις.

2. Για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων, υπολογίζουμε κατ' αρχήν τα ισοδύναμα των κατανεμημένων, συγκεντρωμένα φορτία (δυνάμεις) :

$$F_1 = 2 \text{ KN/m} * 2 \text{ m} = 4 \text{ KN}, F_2 = 4 \text{ KN/m} * 3 \text{ m} = 12 \text{ KN}$$

Τις εν λόγω δυνάμεις θα χρησιμοποιήσουμε μόνο για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων. Χρησιμοποιούμε τις συνθήκες ισορροπίας της δοκού :

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 4 \text{ KN} * 6 \text{ m} - D_y * 4 \text{ m} + 12 \text{ KN} * 1.5 \text{ m} + 22 \text{ KN} * 1 \text{ m} = 0 \Rightarrow D_y = 16 \text{ KN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -4 \text{ KN} + 16 \text{ KN} - 12 \text{ KN} + F_y + 22 \text{ KN} = 0 \Rightarrow F_y = -22 \text{ KN}$$

3. Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης

Υπενθύμιση : Τέμνουσα δύναμη σε τυχούσα θέση της δοκού είναι το αλγεβρικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων κατά τον άξονα των y, που δρουν στην δοκό αριστερά της θέσης αυτής.

$$\text{Τμήμα AC : } Q(x) = -2 \text{ KN/m} * x \text{ και } Q_c = -2 * 2 = -4 \text{ KN}$$

$$\text{Τμήμα CD : } Q(x) = -4 \text{ KN}$$

$$\text{Τμήμα DE : } Q(x) = -4 \text{ KN} + D_y = +12 \text{ KN}$$

$$\text{Τμήμα EF : } Q(x) = +12 \text{ KN} - 4 \text{ KN/m} * (x-4) \text{ m} = -4 * x + 28 \text{ (KN)}$$

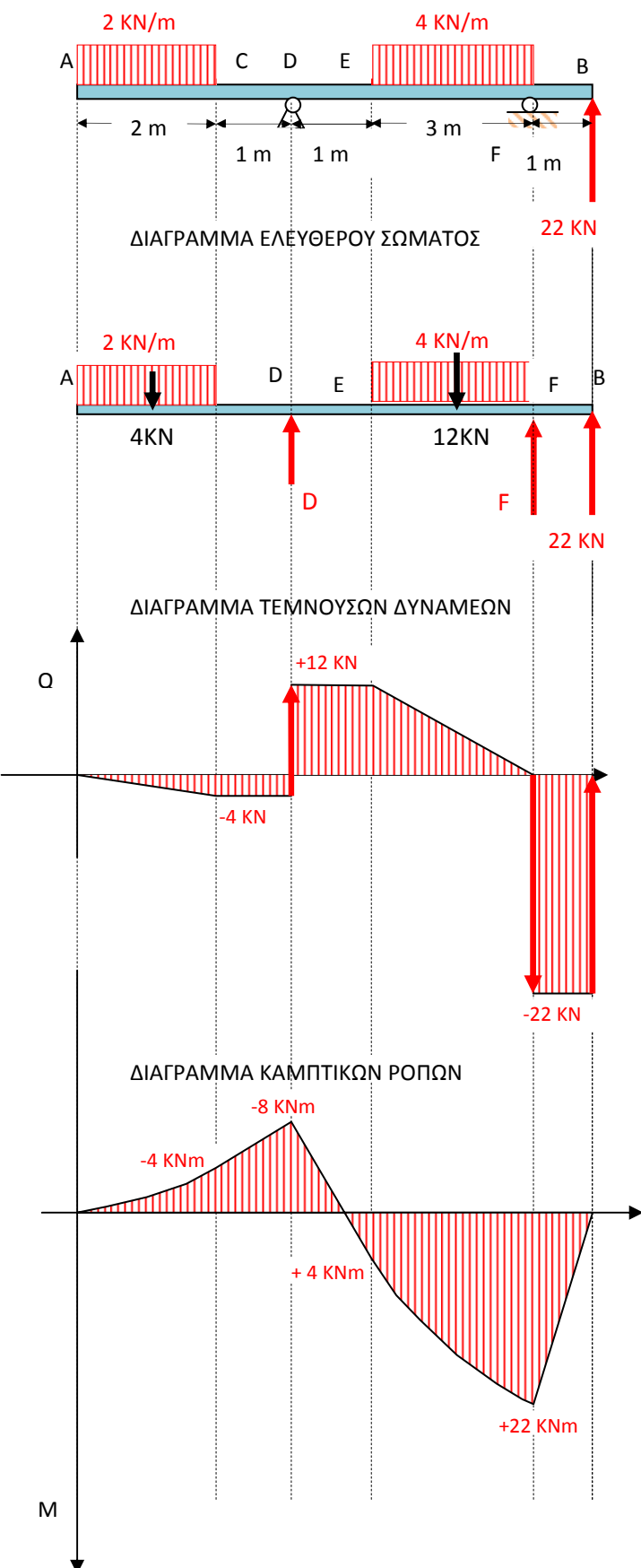
$$\text{Τμήμα FB : } Q(x) = -4 \text{ KN} + 16 \text{ KN} - 12 \text{ KN} - 22 \text{ KN} = -22 \text{ KN}$$

4. Διάγραμμα καμπτικής ροπής.

$$\text{Τμήμα AC : Κατανεμημένο σταθερό φορτίο, άρα παραβολή.} \\ M_c = -4 \text{ KN} * 1 \text{ m} = > M_c = -4 \text{ KN m}$$

$$\text{Τμήμα CD : Χωρίς φορτίο, άρα ευθύγραμμο τμήμα.} \\ M_D = -4 \text{ KN} * 2 \text{ m} = > M_D = -8 \text{ KN m}$$

$$\text{Τμήμα DE : Χωρίς φορτίο, άρα ευθύγραμμο τμήμα.} \\ M_E = -4 \text{ KN} * 3 \text{ m} + 16 \text{ KN} * 1 \text{ m} = > M_E = +4 \text{ KN m}$$



Τμήμα EF : Κατανεμημένο σταθερό φορτίο, άρα παραβολή. $M_F = -4\text{KN} \cdot 6\text{m} + 16\text{KN} \cdot 4\text{m} - 12\text{KN} \cdot 1.5\text{m} = >$

$$M_F = +22 \text{ KN m}$$

Τμήμα FB : Χωρίς φορτίο, άρα ευθύγραμμο τμήμα.

$$M_B = 0$$