

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

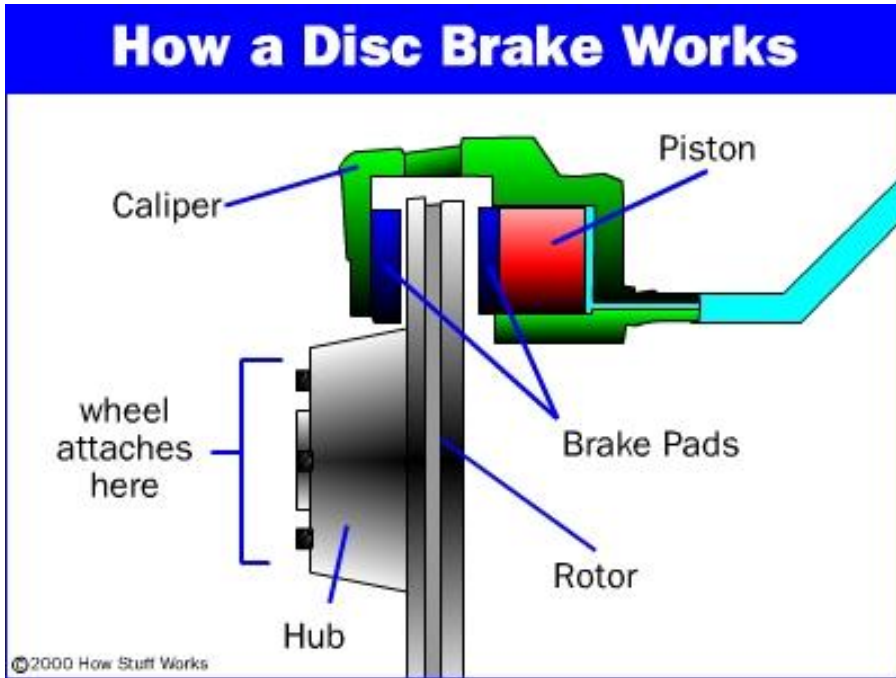
Στατική

Τριβή

Διδάσκων

Δρ Καββουσάνος Μανόλης

Τριβή



Η λειτουργία των φρένων σχετίζεται με δυνάμεις που δρουν εφαπτομενικά σε επιφάνειες που πιέζει η μια την άλλη. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται δυνάμεις τριβής.

Τριβή

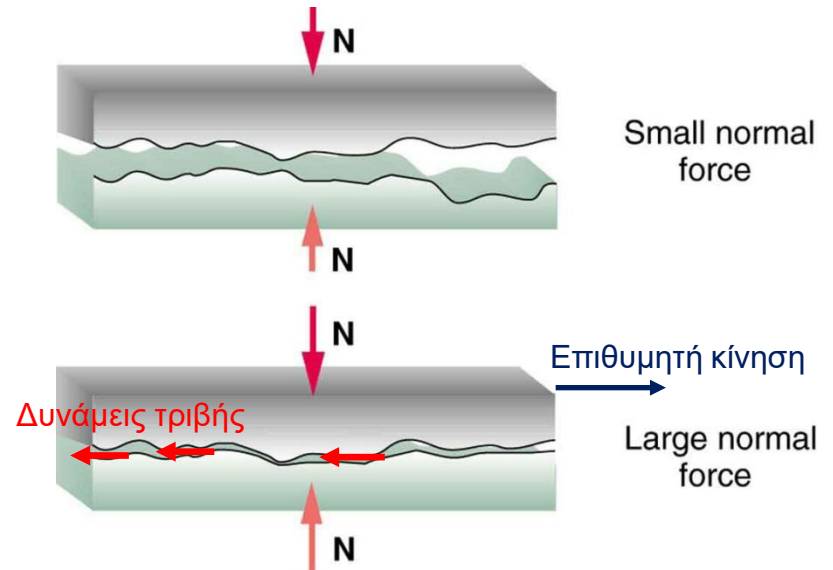
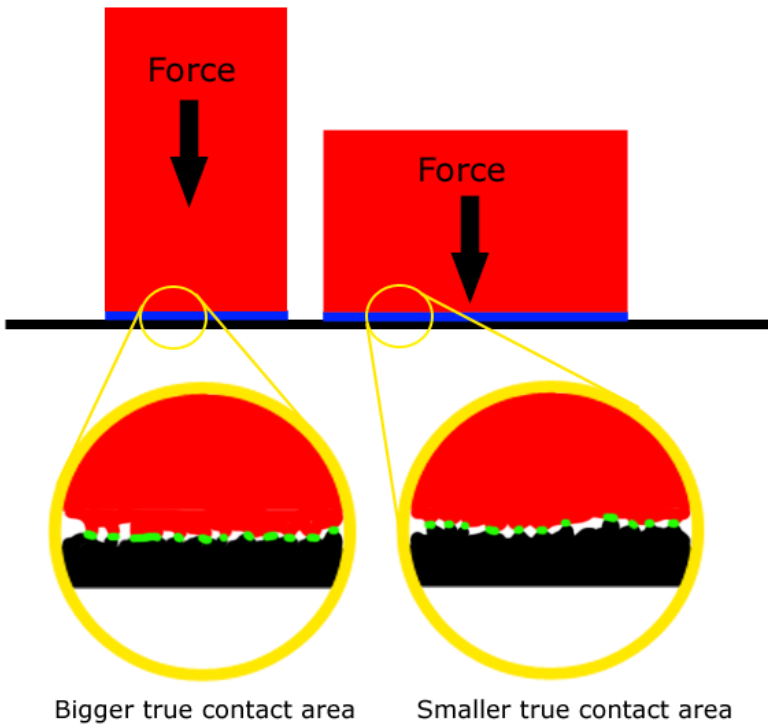
— = Apparent contact area
— = True contact area

More pressure

Same Force/smaller apparent contact area

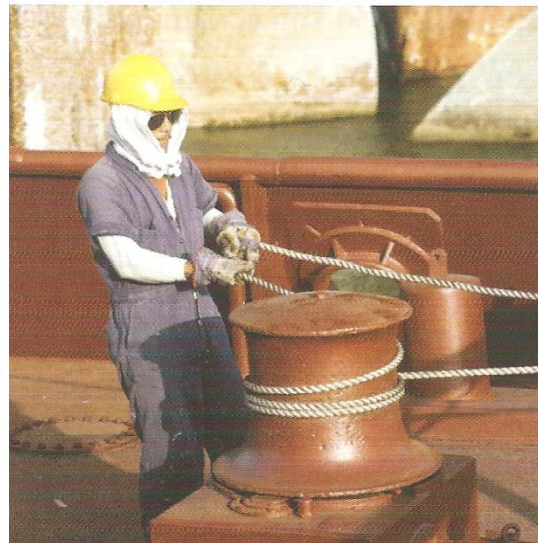
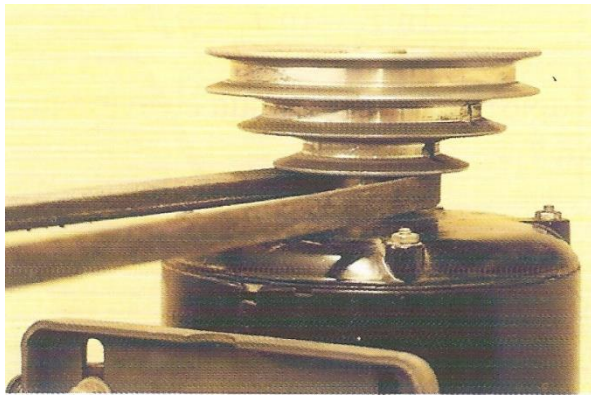
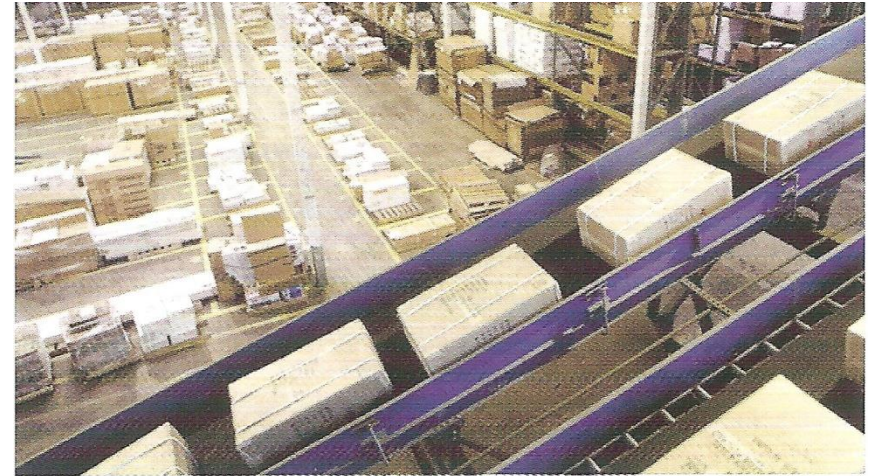
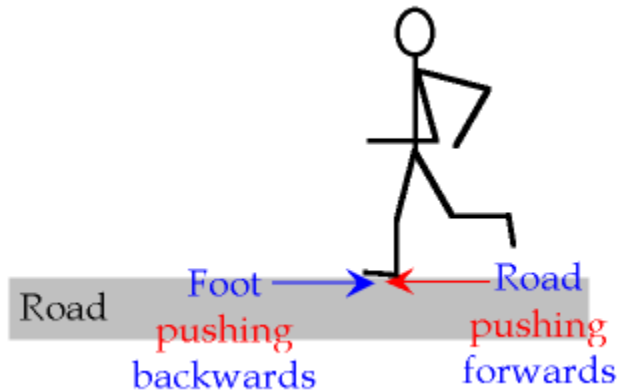
Less pressure

Same Force/greater apparent contact area



Η φύση της τριβής δεν είναι ακριβώς γνωστή. Θεωρείται ότι οφείλεται σε κάποιο βαθμό στις μικρο -ανωμαλίες των επιφανειών και σε κάποιο βαθμό στις μοριακές έλξεις.

Τριβή

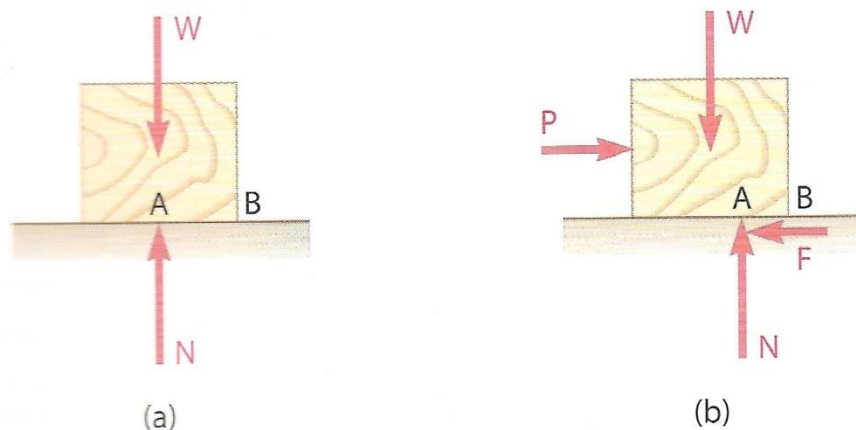


- Βαδίζουμε μόνο γιατί υπάρχει τριβή
- Τα κιβώτια μεταφέρονται στον επικλινή ιμάντα, μόνο γιατί υπάρχει η τριβή
- Η ισχύς του κινητήρα μεταφέρεται μέσω του ιμάντα στο φορτίο μόνο γιατί υπάρχει τριβή.
- Ο εργαζόμενος καταφέρει και συγκρατεί μεγάλο φορτίο με μικρή σχετικά δύναμη μόνο γιατί υπάρχει τριβή ανάμεσα στο σχοινί και το μεταλλικό τύμπανο.

Φαντάζεστε ένα κόσμο χωρίς τριβή;!

Ξηρά τριβή ή τριβή ολισθήσεως ή τριβή Coulomb ή απλώς ΤΡΙΒΗ

Φαινείες επαφής και, ως ένα βαθμό, στις μοριακές ελξεις.

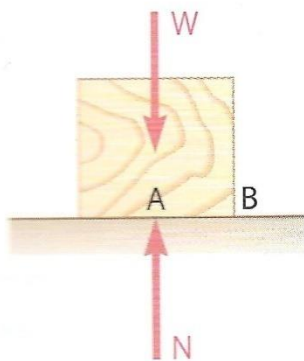


Αν επιχειρήσει να μετακινήσει κανείς το κιβώτιο βάρους W που βρίσκεται τοποθετημένο πάνω σε οριζόντια επιφάνεια, με την βοήθεια της οριζόντιας δύναμης P , θα διαπιστώσει ότι για «μικρή» τιμή της δύναμης, το κιβώτιο δεν μετακινείται. Θα πρέπει συνεπώς να υπάρχει μια οριζόντια δύναμη F που αντιτίθεται στην P .

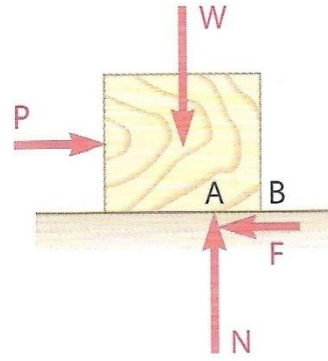
Η δύναμη αυτή δρα πάνω σε ολόκληρη την επιφάνεια επαφής ανάμεσα στο κιβώτιο και το επίπεδο και ονομάζεται **στατική τριβή**.

Νόμοι της ξηράς τριβής - συντελεστής τριβής

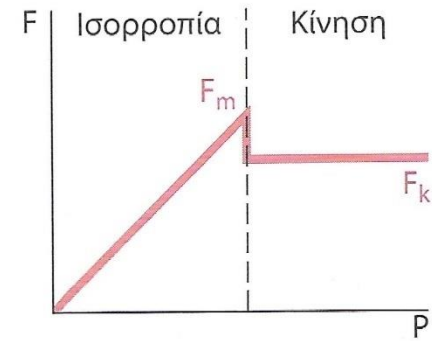
Φανείες επαφής και, ως ένα βαθμό, στις μοριακές ελξεις.



(a)



(b)



(c)

Όσο η δύναμη P αυξάνει τόσο αυξάνει και η στατική τριβή – για να διατηρηθεί η ισορροπία. Για κάποια τιμή πάντως της P , το κιβώτιο αρχίζει να κινείται. Τότε η στατική τριβή αποκτά τη μέγιστη τιμή της F_m . Μόλις αρχίσει η κίνηση, η τριβή θα μειωθεί ελαφρά στην τιμή F_k που ονομάζεται **κινητική τριβή** – που παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια της κίνησης.

Εμπειρικά στοιχεία δείχνουν ότι :

$$F_m = \mu_s * N \quad \text{και} \quad F_k = \mu_k * N$$

Οι συντελεστές μ_s και μ_k δεν εξαρτώνται από το εμβαδόν των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή, αλλά μόνο από τη φύση τους και ονομάζονται συντελεστής στατικής τριβής και συντελεστής κινητικής τριβής αντίστοιχα.

Συντελεστές τριβής

Τιμές συντελεστών στατικής τριβής (κατά προσέγγιση) για ξηρές επιφάνειες

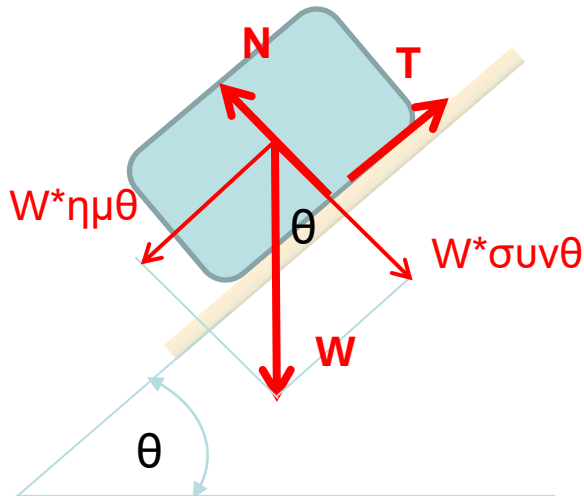
Μέταλλο σε μέταλλο	0.15 – 0.60
Μέταλλο σε ξύλο	0.20 – 0.60
Μέταλλο σε πέτρα	0.30 – 0.70
Μέταλλο σε δέρμα	0.30 – 0.60
Ξύλο σε ξύλο	0.25 – 0.50
Ξύλο σε δέρμα	0.25 – 0.50
Πέτρα σε πέτρα	0.40 – 0.70
Έδαφος σε έδαφος	0.20 – 1.00
Λάστιχο σε σκυρόδεμα	0.60 – 0.90

Εφόσον η τριβή εξαρτάται από την «κατάσταση» των τριβομένων επιφανειών, οι τιμές των συντελεστών τριβής είναι σπάνια γνωστές με ακρίβεια καλύτερη του 5%. Στον πίνακα φαίνονται μερικές ενδεικτικές τιμές συντελεστών στατικής τριβής. Οι τιμές των αντίστοιχων συντελεστών κινητικής τριβής είναι περίπου 25% μικρότερες.

Σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο

Γωνία τριβής

Έστω σώμα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, κλίσης θ . Αναλύουμε το βάρος W σε μια συνιστώσα $W*\sigma\upsilon\nu\theta$ κάθετη στην επιφάνεια και μια άλλη $W*\eta\mu\theta$ παράλληλη στην επιφάνεια.



Είναι φανερό ότι όταν $\theta = 0$, το σώμα παραμένει ακίνητο. Αν η γωνία θ αρχίσει να μεγαλώνει, για κάποια τιμή της, είναι πάλι φανερό ότι το σώμα θα αρχίσει να ολισθαίνει.

Ας εξετάσουμε την ισορροπία του σώματος ακριβώς πριν την ολίσθηση :

$$T = W * \eta\mu\theta \quad \text{και} \quad N = W * \sigma\upsilon\nu\theta$$

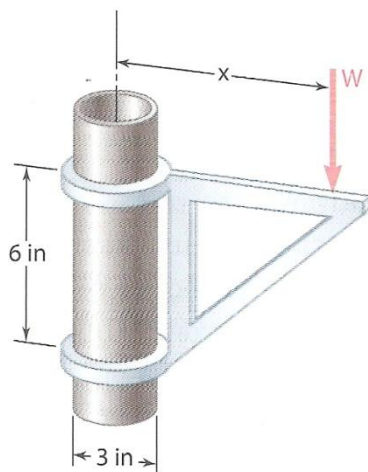
$$\text{Οπότε : } T/N = W * \eta\mu\theta / W * \sigma\upsilon\nu\theta = \epsilon\varphi\theta$$

$$\text{Ισχύει όμως επίσης} \quad T = \mu s * N$$

$$\text{Οπότε : } \underline{\epsilon\varphi\theta = \mu s}$$

Η γωνία θ ονομάζεται και γωνία τριβής

Παράδειγμα (8.3 Beer et al)

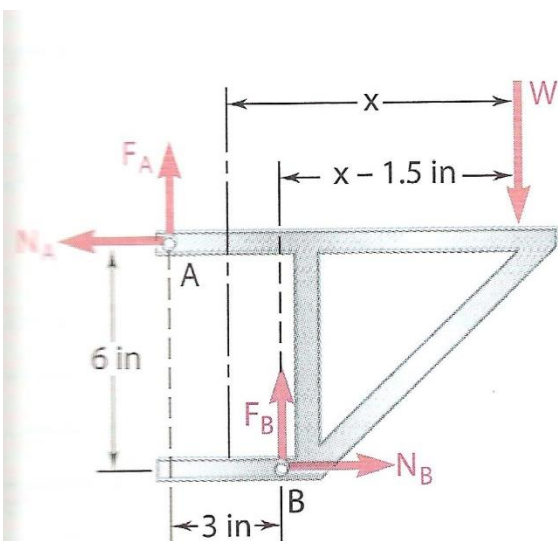


Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση x στην οποία μπορεί να στηριχθεί το βάρος W στο βραχίονα του σήματος – που ας θεωρηθεί αβαρής. Συντελεστής στατικής τριβής σωλήνα – βραχίονα 0.25.

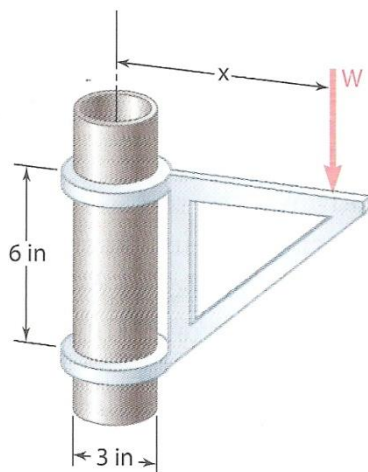
Ας ονομάσουμε x την οριακή εκείνη απόσταση για την οποία η τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στο βραχίονα και τον σωλήνα, μόλις συγκρατεί το βάρος – ο βραχίονας δηλαδή ισορροπεί.

Στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος του βραχίονα (σχήμα) φαίνονται όλες οι εξωτερικές δυνάμεις : Για τις δυνάμεις τριβής στα σημεία A και B, ισχύει:

$$F_A = \mu_s * N_A \quad \text{και} \quad F_B = \mu_s * N_B \quad (1)$$



Παράδειγμα (8.3 Beer et al)



Συνθήκες ισορροπίας :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_A = N_B$$

και λόγω των (1) $F_A = F_B = 0.25 * N_A$ (2)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B - W = 0$$

και λόγω των (2) $N_A = 2 W$ (3)

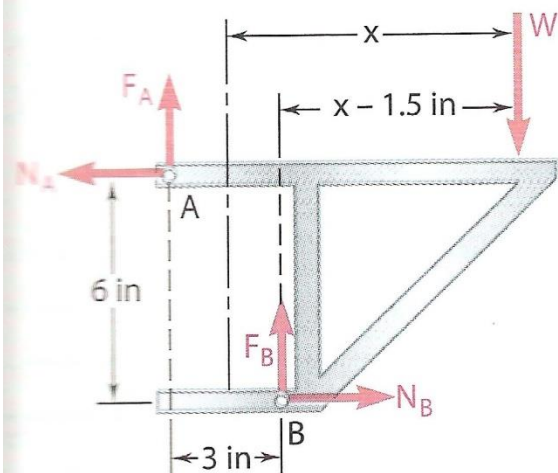
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow$$

$$N_A * (6 \text{ in}) - F_A * (3 \text{ in}) - W * (x - 1.5 \text{ in}) = 0$$

Και λόγω των (2) και (3)

$$2W * (6 \text{ in}) - 0.25 * (2W) * (3 \text{ in}) - W * (x - 1.5 \text{ in}) = 0$$

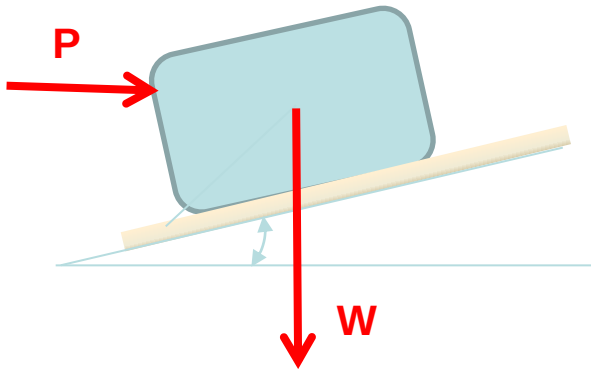
$$\Rightarrow \mathbf{x = 12 \text{ in}}$$



Παράδειγμα

Έστω σώμα βάρους $W=300 \text{ Kp}$ πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, κλίσης θ° . Συντελεστής στατικής τριβής μ_s .

1. Ισορροπεί το σώμα αν δεν επενεργούν εξωτερικές δυνάμεις;
2. Πόση οριζόντια δύναμη P απαιτείται για να κινηθεί το σώμα προς τα πάνω;
3. Πόση οριζόντια δύναμη P απαιτείται για να αρχίσει να κατεβαίνει το σώμα;



Απαντήσεις

1. Σύμφωνα με προηγούμενο παράδειγμα, για να συγγραφηθεί το σώμα, πρέπει η γωνία θ να είναι μικρότερη ή ίση της γωνίας τριβής :

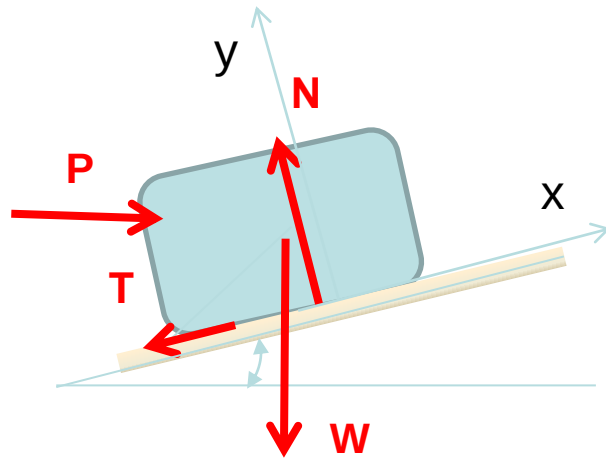
$$\theta \leq \text{τοξεφ}(\mu_s) = \text{atan}(\mu_s)$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

2. Την στιγμή που αρχίζει η κίνηση προς τα πάνω υπό την επενέργεια της οριζόντιας δύναμης, η τριβή είναι :

$$T = \mu_s N \quad (\text{εξ ορισμού}) \quad (1)$$

και αντίθετης φοράς προς την κατεύθυνση της κίνησης. Στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος (σχήμα), φαίνονται όλες οι εξωτερικές δυνάμεις.



Συνθήκες στατικής ισορροπίας :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$P \cos(\theta) - W \sin(\theta) - T = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-P \sin(\theta) - W \cos(\theta) + N = 0 \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3), μετά από απαλειφή των N και T , προκύπτει :

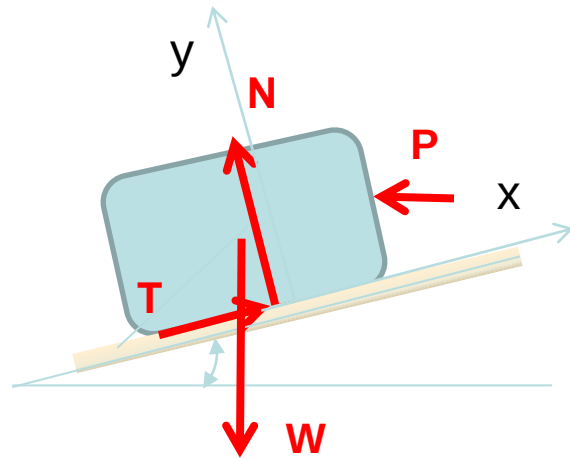
$$P = \left(\frac{\mu_s + \tan(\theta)}{1 - \mu_s \tan(\theta)} \right) W$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

3. Την στιγμή που αρχίζει η κίνηση προς τα πάνω υπό την επενέργεια της οριζόντιας δύναμης, η τριβή είναι :

$$T = \mu_s * N \quad (\text{εξ ορισμού}) \quad (1)$$

και αντίθετης φοράς προς την κατεύθυνση της κίνησης. Στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος, φαίνονται τότε όλες οι εξωτερικές δυνάμεις.



Συνθήκες στατικής ισορροπίας :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -P \cos(\theta) - W \sin(\theta) + T = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +P \sin(\theta) - W \cos(\theta) + N = 0 \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3), μετά από απαλειφή των N και T , προκύπτει :

$$P = \left(\frac{\mu_s - \tan(\theta)}{1 + \mu_s \tan(\theta)} \right) W$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αριθμητική εφαρμογή

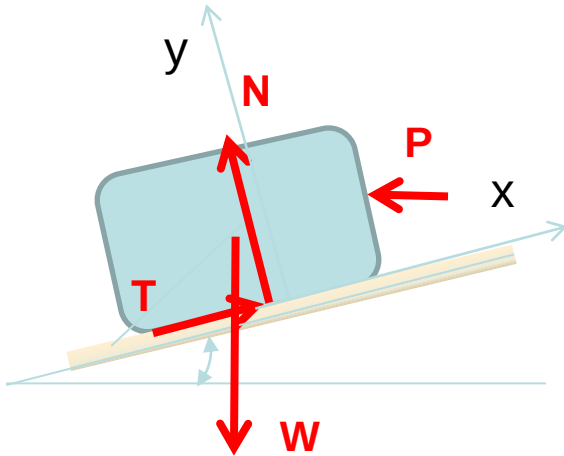
$$\theta = 7^\circ, \mu_s = 0.2, W = 1000 \text{ Kp}$$

Απαιτούμενη δύναμη για ανύψωση :

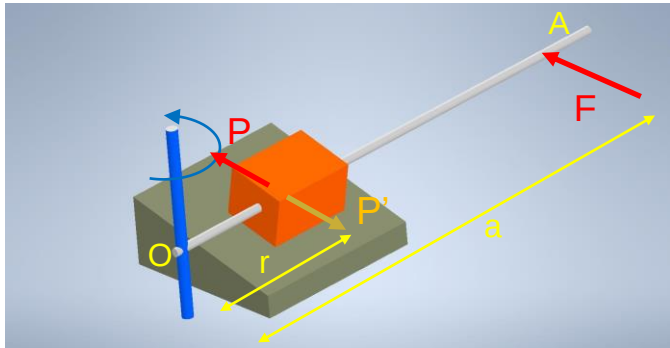
$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\mu_s + \tan(\theta)}{1 - \mu_s \tan(\theta)} \right) W = \left(\frac{0.2 + \tan(7^\circ)}{1 - 0.2 \tan(7^\circ)} \right) 1000 \\ &= \left(\frac{0.2 + 0.123}{1 - 0.2 * 0.123} \right) 1000 \Rightarrow P = 334 \text{ Kp} \end{aligned}$$

Απαιτούμενη δύναμη για κατέβασμα :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\mu_s - \tan(\theta)}{1 + \mu_s \tan(\theta)} \right) W = \left(\frac{0.2 - \tan(7^\circ)}{1 + 0.2 \tan(7^\circ)} \right) 1000 \\ &= \left(\frac{0.2 - 0.123}{1 + 0.2 * 0.123} \right) 1000 \Rightarrow P = 75 \text{ Kp} \end{aligned}$$



Κοχλίες με τετράγωνο σπείρωμα



Ας εξετάσουμε τώρα μια ελαφρώς διαφορετική μέθοδο για να κινηθεί το σώμα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο : Το σώμα είναι «πακτωμένο» πάνω στον «μοχλό» ΟΑ, που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο στύλο, και στον οποίο μοχλό εξασκείται δύναμη F.

Αναγκαία συνθήκη ισορροπίας του μοχλού αυτού :

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow Fa = P'r \Rightarrow P' = \left(\frac{a}{r}\right) F$$

Η δύναμη P' είναι αυτή που δέχεται ο μοχλός από το σώμα, άρα το σώμα δέχεται από το μοχλό δύναμη P ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς.

Αν επιχειρήσουμε δηλαδή να κινήσουμε το σώμα με τον τρόπο αυτό, χρειαζόμαστε δύναμη F :

$$F = \left(\frac{r}{a}\right) P$$

Ή ισοδύναμα, ροπή περί το O :

$$M_o = Fa = rP$$

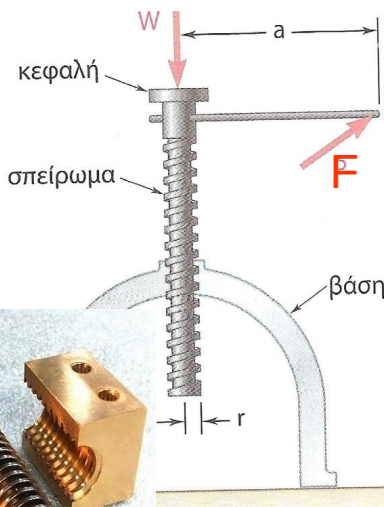
Όπου P η δύναμη που είχαμε υπολογίσει στο προηγούμενο παράδειγμα.

Για ανύψωση συνεπώς :

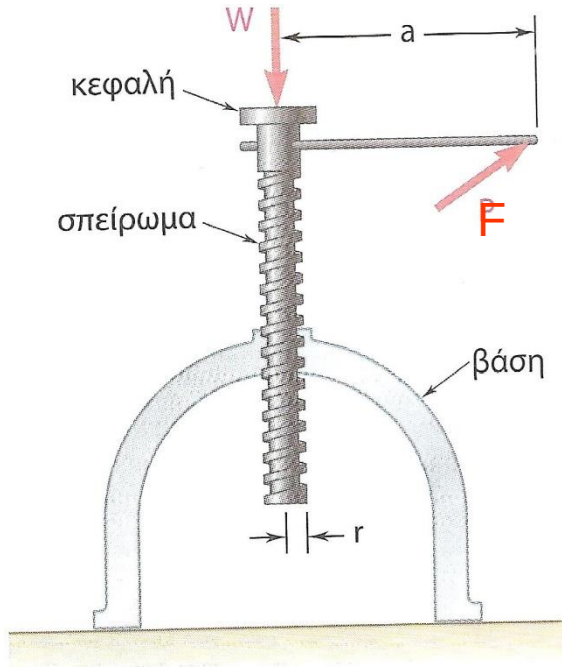
$$F = \left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{\mu_s + \tan(\theta)}{1 - \mu_s \tan(\theta)}\right) W$$

Και για κατέβασμα :

$$F = \left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{\mu_s - \tan(\theta)}{1 + \mu_s \tan(\theta)}\right) W$$



Κοχλίες με τετράγωνο σπείρωμα



Οι κοχλίες με τετράγωνο σπείρωμα χρησιμοποιούνται για την ανύψωση (την μετακίνηση γενικότερα) φορτίων. Η ανάλυση της λειτουργίας τους είναι ακριβώς ίδια με την ανάλυση της κίνησης σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση δύναμης.

Τα κεκλιμένο επίπεδο εν προκειμένω είναι το σπείρωμα - το βλέπουμε «σε ανάπτυγμα» στο σχήμα. Αν για μια περιστροφή, και για την περίπτωση κοχλία με μονό σπείρωμα, ο κοχλίας προωθείται κατά L (βήμα), η δε ακτίνα του είναι r , τότε για την γωνία του σπειρώματος ισχύει :

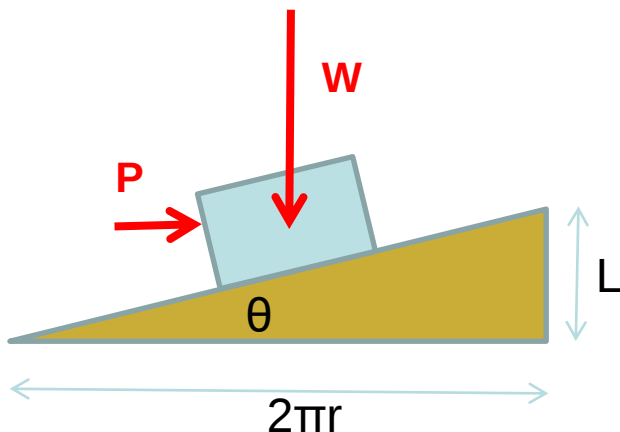
$$\tan(\theta) = L/2\pi r$$

Για την ανύψωση εξασκούμε την δύναμη F στον μοχλό. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση του κεκλιμένου επιπέδου, θεωρούμε την δύναμη F για την οποία ισχύει :

$$F \cdot a = P \cdot r$$

Ισοδύναμα, αν στον κοχλία «επιβάλλεται» ροπή M , τότε

$$P = M/r$$



Κοχλίες με τετράγωνο σπείρωμα

Παράδειγμα

Ο ανυψωτικός κοχλίας του σχήματος έχει (μόνο σπείρωμα) με διάμετρο $2r=40$ mm και βήμα $L=10$ mm. Η απόσταση a είναι 300 mm και $\mu_s=0.2$. Υπολογίστε την απαραίτητη δύναμη F για ανύψωση και κατέβασμα βάρους 1000 Kp.

Για την γωνία σπειρώματος ισχύει :

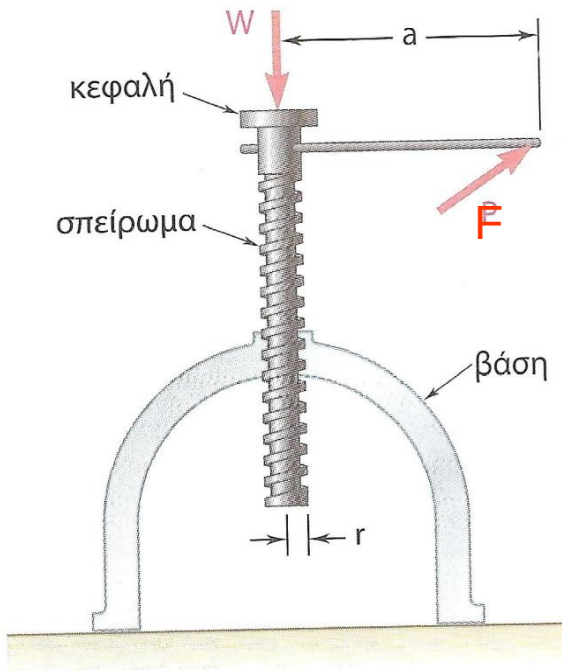
$$\tan(\theta) = L/2\pi r \Rightarrow \tan(\theta) = 0.079$$

Απαιτούμενη δύναμη για ανύψωση :

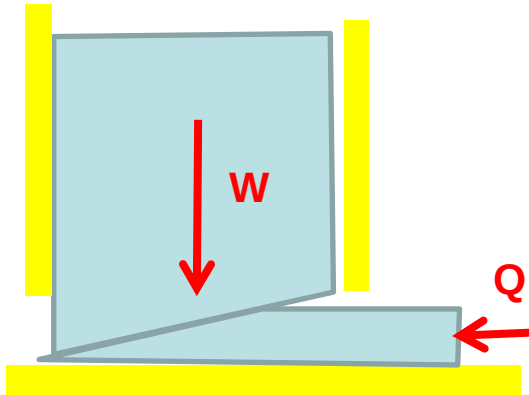
$$F = \left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{\mu_s + \tan(\theta)}{1 - \mu_s \tan(\theta)}\right) W = \left(\frac{20}{300}\right) \left(\frac{0.2 + 0.079}{1 - 0.2 * 0.079}\right) 1000$$
$$\Rightarrow F = 19 \text{ Kp}$$

Απαιτούμενη δύναμη για κατέβασμα :

$$F = \left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{\mu_s - \tan(\theta)}{1 + \mu_s \tan(\theta)}\right) W = \left(\frac{20}{300}\right) \left(\frac{0.2 - 0.079}{1 + 0.2 * 0.079}\right) 1000$$
$$\Rightarrow F = 8 \text{ Kp}$$



Σφήνες

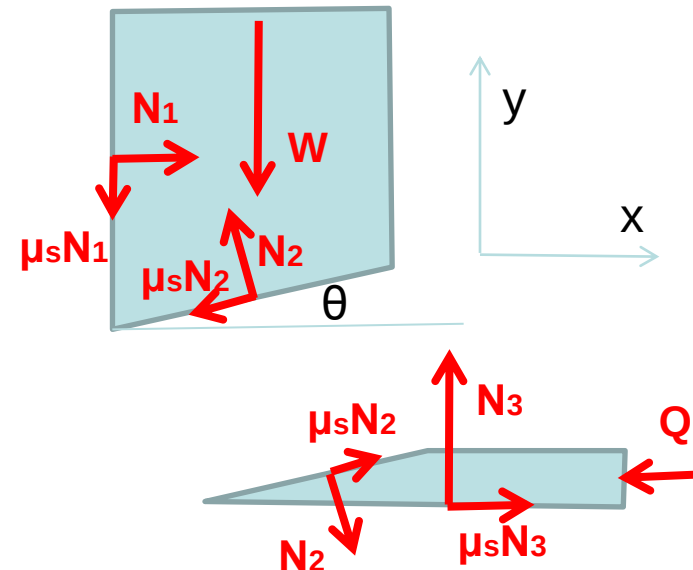


Οι σφήνες είναι αιχμηρά αντικείμενα με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να εξασκήσουμε μεγάλες «πλευρικές» δυνάμεις. Χρησιμοποιούνται για την ανύψωση μεγάλων φορτίων (σχήμα) , για «σχίσσιμο» κορμών δένδρων και αλλού.

Για την περίπτωση του σχήματος, ας υποθέσουμε ότι $\theta = 6^\circ$ και $W = 1000 \text{ Κρ}$. Θα υπολογίσουμε την ελάχιστη οριζόντια δύναμη Q που απαιτείται για να ανυψωθεί το φορτίο. Θεωρούμε τον συντελεστή στατικής τριβής ίδιο για όλες τις επιφάνειες και $\mu_s = 0.3$.

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος τόσο του φορτίου όσο και της σφήνας. Άγνωστα μεγέθη είναι οι τρεις αντιδράσεις N_1 , N_2 , N_3 καθώς και η άγνωστη δύναμη Q την στιγμή της έναρξης της κίνησης. Θα χρησιμοποιήσουμε τις δύο συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων για κάθε σώμα και θα προσδιορίσουμε τους αγνώστους.

Γιατί δεν χρησιμοποιούμε την ισορροπία ροπών;



Σφήνες

$$\eta\mu(6^\circ) = 0.105 \quad \sigma\upsilon\nu(6^\circ) = 0.995$$

Σώμα Α

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 - (\mu_s N_2) \sigma\upsilon\nu(6^\circ) - N_2 \eta\mu(6^\circ) = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 - 0.403 N_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\mu_s N_1 - W - (\mu_s N_2) \eta\mu(6^\circ) + N_2 \sigma\upsilon\nu(6^\circ) = 0 \Rightarrow$$

$$-0.3 N_1 - 1000 + 0.966 N_2 = 0 \quad (2)$$

Από το σύστημα των (2) και (3) προκύπτει :

$$N_1 = 476,87 \text{ Kp} \quad N_2 = 1183,29 \text{ Kp}$$

Σώμα Β

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow (\mu_s N_2) \sigma\upsilon\nu(6^\circ) + N_2 \eta\mu(6^\circ) + \mu_s N_3 - Q = 0 \Rightarrow$$

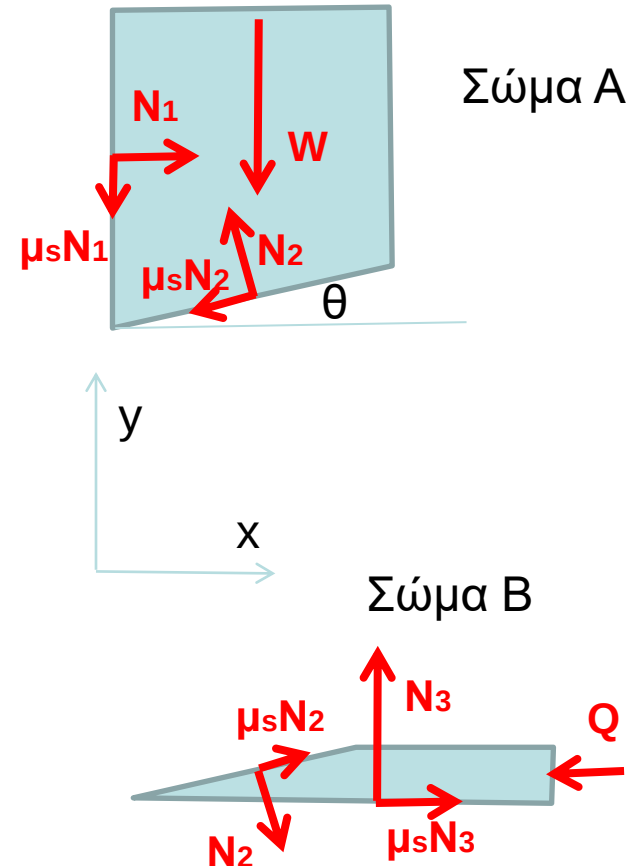
$$477,46 + 0.3 N_3 - Q = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow (\mu_s N_2) \eta\mu(6^\circ) - N_2 \sigma\upsilon\nu(6^\circ) + N_3 = 0 \Rightarrow$$

$$-1140.1 + N_3 = 0 \quad (4)$$

Από το σύστημα των (3) και (4) προκύπτει :

$$Q = 819.9 \text{ Kp} \quad N_3 = 1140.1 \text{ Kp}$$



Τριβή δίσκου

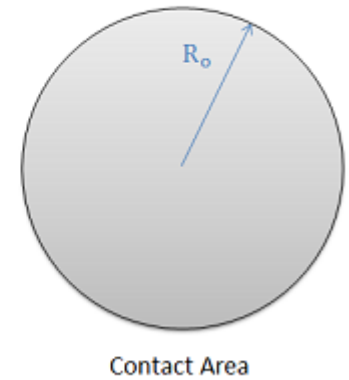
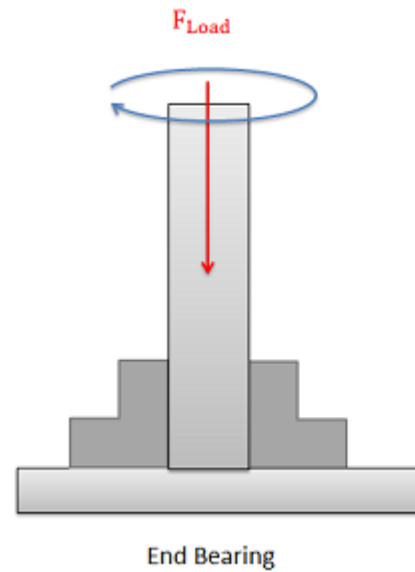
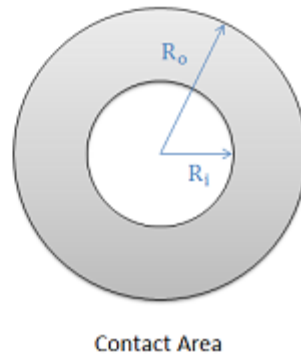
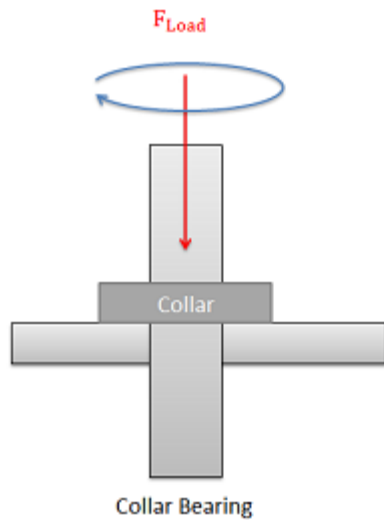
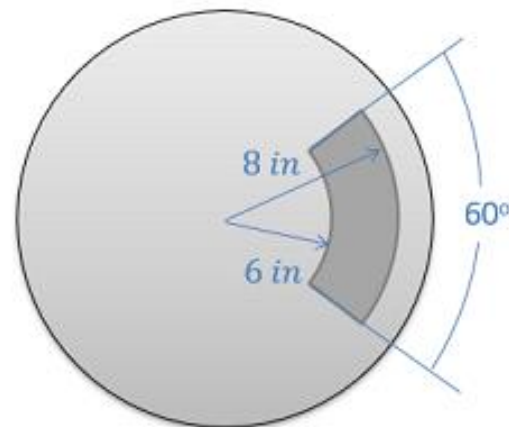
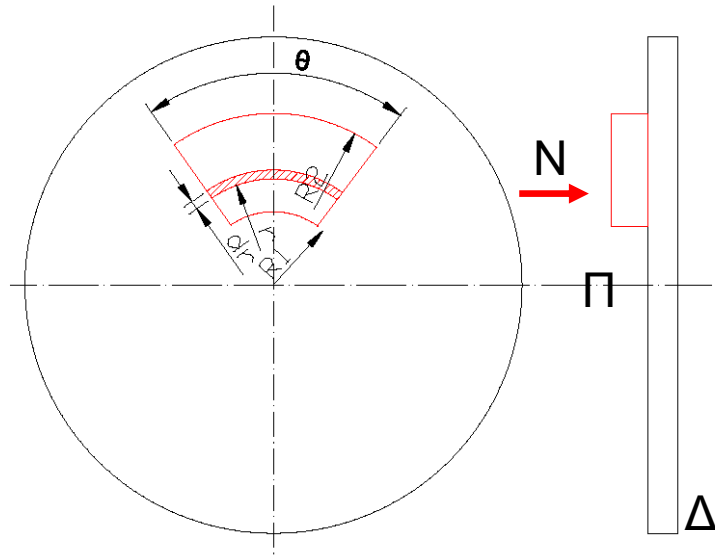


Image by David Monniaux CC-BY-SA 3.0



Τριβή δίσκου



Έστω κυκλικός δίσκος Δ ο οποίος πιέζεται από το «πέλμα –τακάκι» Π , σχήματος κυκλικού τομέα, με δύναμη N . Ποια είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να εξασκήσει το πέλμα στον δίσκο;

Για το εμβαδόν του πέλματος ισχύει :

$$E = \frac{\theta}{2} (R_2^2 - R_1^2) \quad \text{η γωνία } \theta \text{ σε ακτίνια.}$$

Η πίεση του πέλματος επί του δίσκου είναι : $p = \frac{N}{E} = \frac{2N}{\theta(R_2^2 - R_1^2)}$

Ας θεωρήσουμε κυκλικό τομέα – δακτύλιο στοιχειώδους πάχους dr και ακτίνας r . Το εμβαδόν του θα είναι : $dE = \theta * r * dr$...

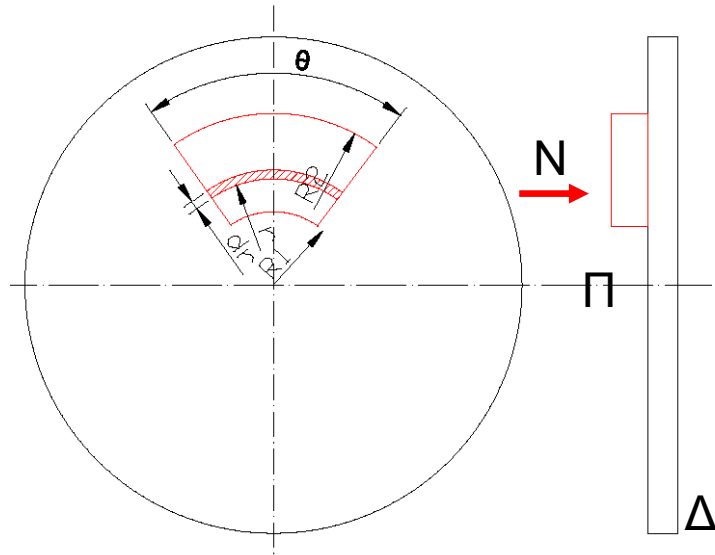
...και θα εξασκεί κάθετη δύναμη $dN = p * dE$

Η δε κινητική τριβή από το στοιχειώδη δακτύλιο στο δίσκο θα είναι : $dT = \mu_k * dN$

Η ροπή της δύναμης αυτής ως προς τον άξονα περιστροφής θα είναι :

$$dM = dT * r = \left(\frac{2\mu_s N}{R_2^2 - R_1^2} \right) r^2 dr = k * r^2 dr$$

Τριβή δίσκου



Έστω κυκλικός δίσκος Δ ο οποίος πιέζεται από το «πέλμα –τακάκι» Π , σχήματος κυκλικού τομέα, με δύναμη N . Ποια είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να εξασκήσει το πέλμα στον δίσκο;

Για το εμβαδόν του πέλματος ισχύει :

$$E = \frac{\theta}{2} (R_2^2 - R_1^2) \quad \text{η γωνία } \theta \text{ σε ακτίνια.}$$

Η πίεση του πέλματος επί του δίσκου είναι : $p = \frac{N}{E} = \frac{2N}{\theta(R_2^2 - R_1^2)}$

Ας θεωρήσουμε κυκλικό τομέα – δακτύλιο στοιχειώδους πάχους dr και ακτίνας r . Το εμβαδόν του θα είναι : $dE = \theta * r * dr$...

...και θα εξασκεί κάθετη δύναμη $dN = p * dE$

Η δε κινητική τριβή από το στοιχειώδη δακτύλιο στο δίσκο θα είναι : $dT = \mu_k * dN$

Η ροπή της δύναμης αυτής ως προς τον άξονα περιστροφής θα είναι :

$$dM = dT * r = \left(\frac{2\mu_s N}{R_2^2 - R_1^2} \right) r^2 dr = k * r^2 dr$$

Τριβή δίσκου

Η ροπή της δύναμης αυτής ως προς τον άξονα περιστροφής θα είναι :

$$dM = dT * r = \left(\frac{2\mu_{\kappa} N}{R_2^2 - R_1^2} \right) r^2 dr = k * r^2 dr$$

Η συνολική ροπή του πέλματος είναι το «άθροισμα» των ροπών των στοιχειωδών δακτυλίων, είναι δηλαδή το ορισμένο ολοκλήρωμα της στοιχειώδους αυτής ροπής dM από την εσωτερική ως την εξωτερική ακτίνα :

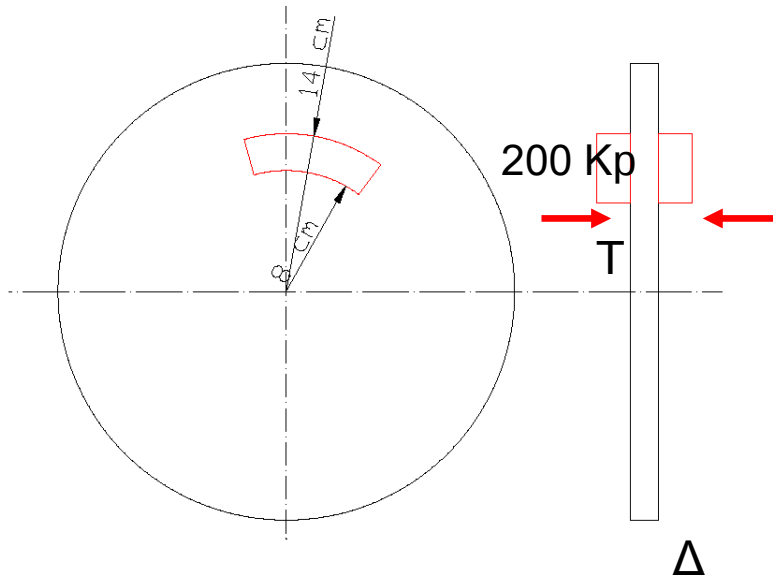
$$M = \int_{R_1}^{R_2} dM = k \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr = k \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \right) \Rightarrow M = \frac{2}{3} \mu_{\kappa} N \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \right)$$

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, **η ροπή αυτή είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ .**

Για την απλή περίπτωση δύο δίσκων ακτίνων R , από την παραπάνω σχέση προκύπτει :

$$M = \frac{2}{3} \mu_{\kappa} N R$$

Τριβή δίσκου - Εφαρμογή



Δυό όμοια τακάκια διαστάσεων όπως στο σχήμα πιέζουν τον δίσκο του φρένου με δύναμη 200 Kp. Ποια είναι η ροπή πέδησης που εξασκείται στον δίσκο, αν ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι $\mu_k = 0.4$;

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, η ροπή που εξασκεί το ένα τακάκι στο δίσκο προκύπτει από τον τύπο :

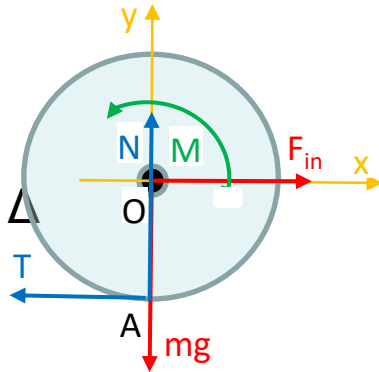
$$M = \frac{2}{3} \mu_k N \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \right)$$

Για την περίπτωση μας :

$$M = \frac{2}{3} \mu_k N \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \right) = \frac{2}{3} * 0,4 * 200 * \left(\frac{14^3 - 8^3}{14^2 - 8^2} \right) = 810,64 \text{ Kp cm}$$

Άρα η ροπή πέδησης και από τα δύο τακάκια είναι $M_t = 2 * 810,64 \text{ Kp cm} = 162,13 \text{ Nm}$

Τριβή δίσκου - Εφαρμογή



Αν υποθέσουμε ότι ο τροχός στον οποίο επιβάλλεται η ροπή αυτή πέδησης έχει ακτίνα $r=0.3 \text{ m}$, τότε η τριβή που θα «αναπτυχθεί» είναι :

$$T=M/r=540 \text{ N}$$

Αν υποθέσουμε ακόμη ότι ο τροχός «μεταφέρει» μάζα 100 kg , τότε η επιβράδυνση του τροχού και συνεπώς του «οχήματος», θα είναι :

$$a=T/m = 5.4 \text{ m/s}^2$$

Τι σημαίνει πρακτικά μια τέτοια δυνατότητα επιβράδυνσης;

Ας υποθέσουμε ότι το όχημα κινείται με ταχύτητα $v=30\text{m/s}$ (περίπου 110 Km/h). Τότε ο χρόνος που χρειάζεται για να σταματήσει υπό την επενέργεια της συγκεκριμένης ροπής πέδησης, είναι :

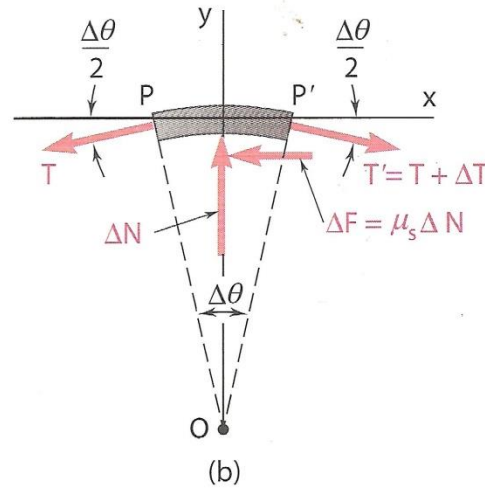
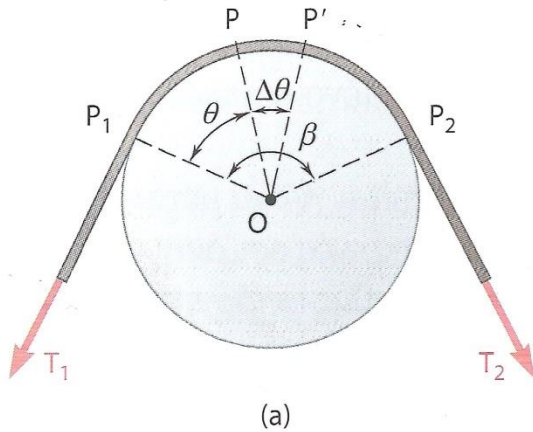
$$t=v/a=5.6 \text{ sec}$$

... αυτό δε υπό την προϋπόθεση, ότι ο συντελεστής στατικής τριβής είναι τέτοιος, που :

$$a = 5.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \leq a_{\text{max}} = \mu_s g \Rightarrow \mu_s \geq \frac{5.6}{g} \Rightarrow \mu_s \geq \mathbf{0.56}$$

...που μπορεί να επιτευχθεί υπό κανονικές συνθήκες

Τριβή ιμάντα

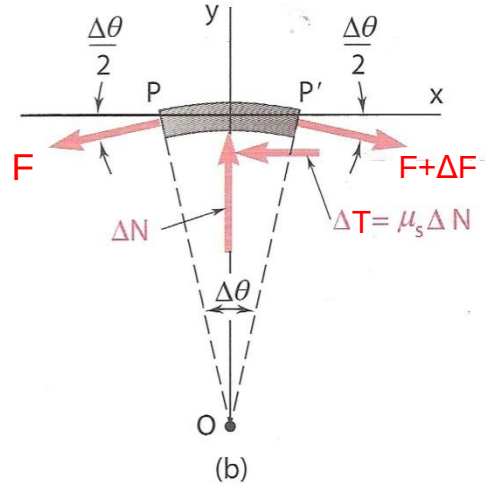
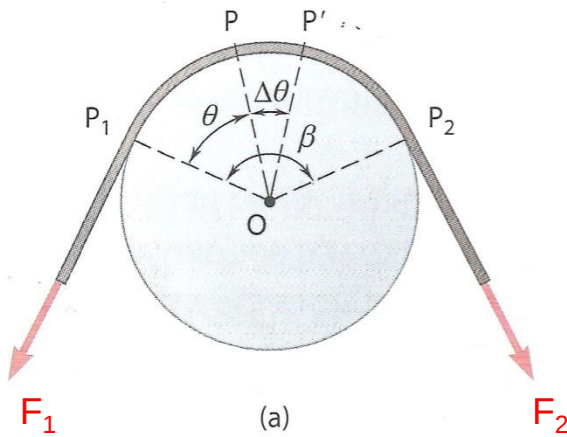


Οι ιμάντες (λουριά) χρησιμοποιούνται στις μηχανές για να «μεταβιβάσουν» ισχύ από ένα περιστρεφόμενο κυλινδρικό σώμα σε ένα άλλο. Στο σχήμα φαίνεται ένα τέτοιο σώμα - που είναι συνήθως μια τροχαλία – και ο επίπεδος ιμάντας που το τυλίγει με γωνία β .

Η τροχαλία παρασύρεται σε περιστροφή μόνο γιατί υπάρχει τριβή ανάμεσα σ' αυτήν και τον ιμάντα. Μπορεί επίσης εύκολα κανείς να καταλάβει ότι για να αναπτυχθεί αυτή η τριβή πρέπει ο ιμάντας να μην είναι «χαλαρός», πρέπει δηλαδή να «τραβά» την τροχαλία και από τις δυο μεριές. Αν η δύναμη T_2 από την μια μεριά του ιμάντα είναι μεγαλύτερη από την T_1 και εφόσον δεν υπάρχει ολίσθηση, η τροχαλία παρασύρεται σε περιστροφή.

Μας ενδιαφέρει να βρούμε πως σχετίζονται οι δυνάμεις αυτές με την γωνία τύλιξης και τον συντελεστή τριβής προκειμένου να είμαστε σίγουροι ότι θα μεταφερθεί η ισχύς που επιθυμούμε χωρίς να ολισθήσει ο ιμάντας.

Τριβή ιμάντα



Ας «απομονώσουμε» ένα «στοιχειώδες» τμήμα του ιμάντα επίκεντρης γωνίας $\Delta\theta$. Στο σχήμα (b) φαίνεται το διάγραμμα του ελεύθερου αυτού σώματος με τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό για περιστροφή κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού. Ας εξετάσουμε την ισορροπία, όταν «επίκειται» (λίγο πριν δηλαδή την) ολίσθηση του ιμάντα.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) - \Delta T + (F + \Delta F) \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +\Delta N - F \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) - (F + \Delta F) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

Ισχύει βεβαίως ακόμη, ο νόμος της στατικής τριβής :

$$\Delta T = \mu_s \Delta N \quad (3)$$

Τριβή ιμάντα

Αν από το σύστημα των τριών αυτών εξισώσεων απαλείψουμε τα ΔN και ΔT , προκύπτει η παρακάτω εξίσωση (εξίσωση διαφορών) :

$$2\mu_s F \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + \mu_s \Delta F \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \Delta F \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \quad (4)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα κάποιες γνώσεις από τον Απειροστικό Λογισμό για να προχωρήσουμε :

Όταν το τμήμα αυτό του ιμάντα γίνεται πολύ μικρό, τότε το $\Delta\theta$ και το ΔF είναι τα $d\theta$ και dF αντίστοιχα.

Επίσης (θ σε ακτίνια) :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \Rightarrow \sin \theta \cong \theta$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1 \Rightarrow \cos \theta \cong 1$$

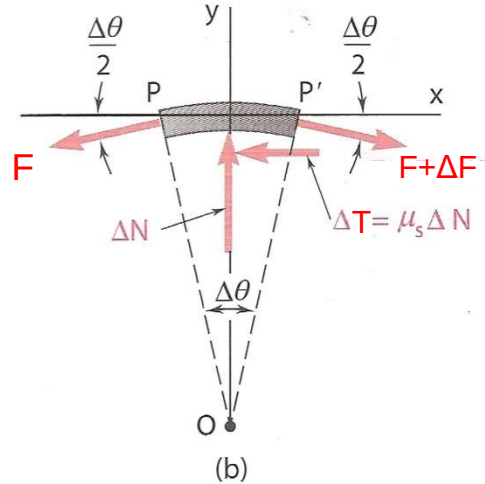
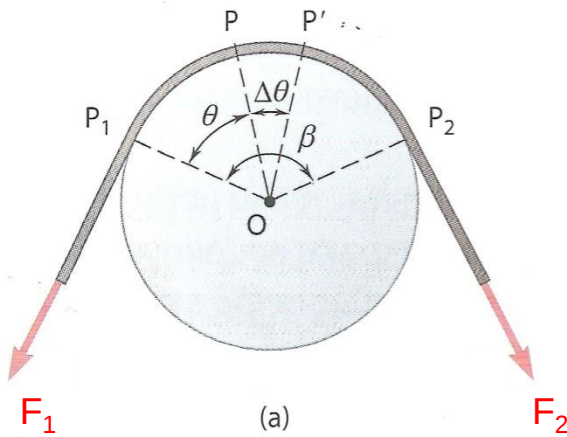
Οπότε η (4) γίνεται :

$$2\mu_s F \left(\frac{d\theta}{2}\right) + \mu_s dF \left(\frac{d\theta}{2}\right) = dF \quad (5)$$

Στην διαφορική αυτή εξίσωση, ο όρος $df \cdot d\theta$ είναι γινόμενο διαφορικών, είναι όπως λέμε «διαφορικό ανωτέρας τάξης», και μπορεί να παραληφθεί. Οπότε η (5) γίνεται :

$$\mu_s F d\theta + 0 = dF \Rightarrow \frac{dF}{F} = \mu_s d\theta \quad (6)$$

Τριβή ιμάντα



Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dF}{F} = \mu_s d\theta$$

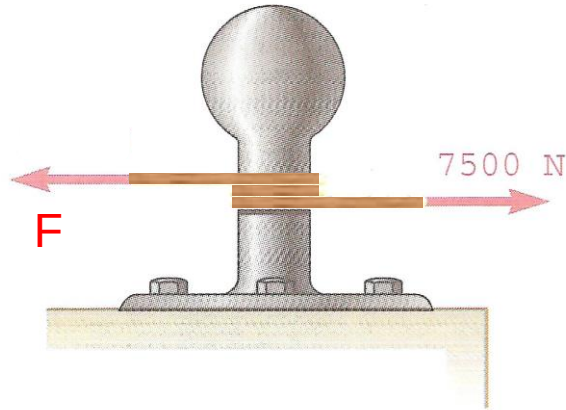
που βρήκαμε συσχετίζει την στοιχειώδη αύξηση της δύναμης (dF) κατά μήκος του ιμάντα με την στοιχειώδη αύξηση της γωνίας ($d\theta$). Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε κατά μέλη την παραπάνω εξίσωση για να βρούμε την συνολική αύξηση της δύναμης σε όλη τη γωνία τύλιξης:

$$\int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = \int_0^{\beta} \mu_s d\theta \Rightarrow \ln F_2 - \ln F_1 = \mu_s \beta \Rightarrow \ln \frac{F_2}{F_1} = \mu_s \beta$$

Την τελευταία αυτή εξίσωση μπορούμε να την γράψουμε και ως εξής (υψώνουμε και τα δύο μέλη εις την e) :

$$F_2 = F_1 e^{\mu_s \beta}$$

Τριβή ιμάντα - παράδειγμα



Καραβόσχοινο τυλίγεται γύρω από τον κάβο του σχήματος και προσπαθεί με την βοήθεια δύναμης F να συγκρατήσει δύναμη 7500 N .

A. Πόση δύναμη F απαιτείται για την συγκράτηση, όταν το καραβόσχοινο τυλίγεται μια φορά γύρω από τον κάβο;

B. Πόσες στροφές πρέπει να κάνει το καραβόσχοινο γύρω από τον κάβο, ώστε ο εργάτης να μπορέσει να συγκρατήσει τα 7500 N με δύναμη $F=200\text{ N}$;

Συντελεστής στατικής τριβής $\mu_s = 0.3$

A. Όταν το καραβόσχοινο τυλίγεται μια φορά, τότε η γωνία τύλιξης είναι :

$$\beta = 360^\circ = 2\pi\text{ rad}$$

Ισχύει τότε :

$$7500 = Fe^{(0.3 \cdot 2\pi)} \Rightarrow F = \frac{7500}{6.586} \Rightarrow F = 1139\text{ N}$$

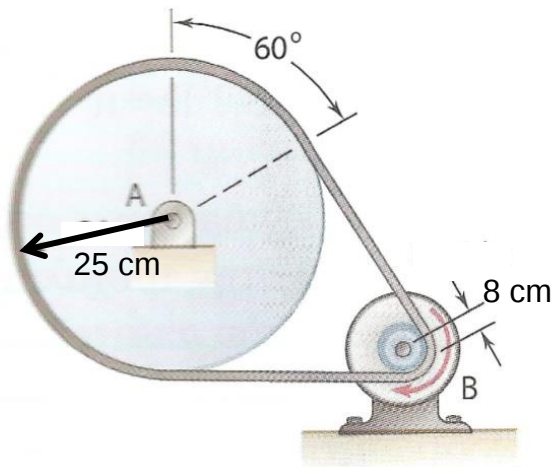
B. Έστω β η απαιτούμενη γωνία τύλιξης. Ισχύει :

$$\ln \frac{F_2}{F_1} = \mu_s \beta \Rightarrow \ln \left(\frac{7500}{200} \right) = 0.3 \beta \Rightarrow \beta = 12.081\text{ rad} \leq 2(2\pi)\text{ rad}$$

... δηλαδή 2 στροφές αρκούν!

Ποιος συγκρατεί εν τέλει τη μεγάλη αυτή δύναμη; Ποια είναι η δουλειά και η ευθύνη του Μηχανολόγου εδώ;

Τριβή ιμάντα - παράδειγμα

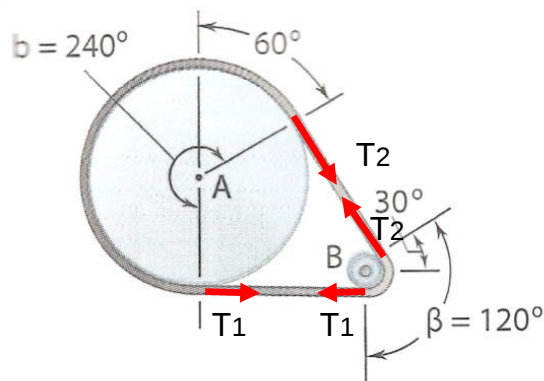


Ηλεκτρικός κινητήρας περιστρέφει τροχαλία B η οποία με την σειρά της παρασύρει σε περιστροφή τροχαλία A με την βοήθεια επίπεδου ιμάντα – σχήμα. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ιμάντα και τροχαλίας είναι 0.25 και η επιτρεπόμενη δύναμη στον ιμάντα είναι 300 kP βρείτε την μέγιστη ροπή που μπορεί να εξασκηθεί στην τροχαλία A.

Η μέγιστη ροπή θα μεταβιβασθεί όταν η τάση T_2 στον ιμάντα πάρει την μέγιστη τιμή και επίκειται ολίσθηση στην κινητήρια τροχαλία . Ισχύει τότε :

$$\ln(T_2/T_1) = \mu_s \cdot \beta, \quad \beta = 120 \cdot (2\pi/360) = 2.09 \Rightarrow$$

$$T_2/T_1 = e^{\mu_s \cdot \beta} \Rightarrow 300/T_1 = e^{0.25 \cdot 2.09} \Rightarrow T_1 = 177.91 \text{ Kp}$$



Η τροχαλία A για να μπορέσει να περιστραφεί με τις συγκεκριμένες τάσεις ιμάντα, χωρίς ολίσθηση, απαιτεί γωνία τύλιξης που προκύπτει από την ίδια σχέση, άρα απαιτεί τουλάχιστον 120° . Έχει όμως 240° , που σημαίνει ότι θα περιστραφεί σίγουρα. Η ροπή που θα μεταβιβασθεί σ' αυτήν, είναι :

$$M = T_2 \cdot 25 - T_1 \cdot 25 \Rightarrow M = 3052.2 \text{ Kp cm}$$