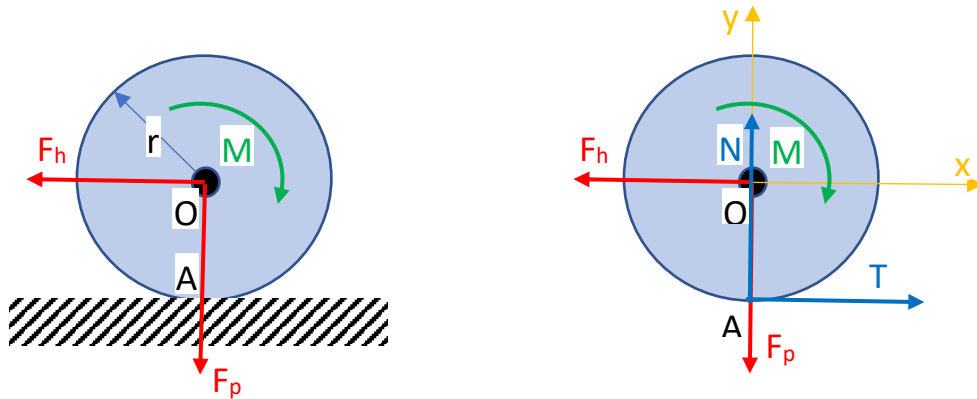


ΚΥΛΙΣΗ ΤΡΟΧΟΥ



Τροχός ακτίνας r , κυλιέται στο επίπεδο E υπό την επενέργεια της κινητήριας ροπής M . Δέχεται (υποβαστάζει) επί πλέον, τις εξωτερικές δυνάμεις F_p (κάθετη στο επίπεδο) και F_h (παράλληλη στο επίπεδο). Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στον τροχό και το επίπεδο είναι μ_s .

Μπορούμε να εξετάσουμε την κίνηση του τροχού, θεωρώντας ένα σύστημα συντεταγμένων xy , προσαρμοσμένο στο κέντρο του O (όπως σχήμα) και κινούμενο μαζί του. Ως προς το σύστημα αυτό, ο τροχός απλώς περιστρέφεται ως προς το O . Δεν εκτελεί δηλαδή καμιά μεταφορική κίνηση.

Στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος του τροχού, εκτός από τις επιβαλλόμενες δυνάμεις και ροπές, έχουν σχεδιασθεί και οι δυνάμεις από την επαφή (στήριξη) με το επίπεδο, η κάθετη δηλαδή αντίδραση N και η τριβή T .

Εξισώσεις ισορροπίας :

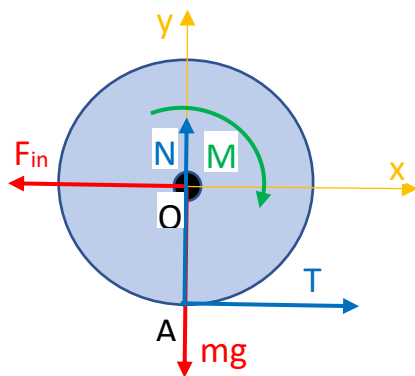
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T - F_h = 0 \Rightarrow T = F_h \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - F_p = 0 \Rightarrow N = F_p \quad (2)$$

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow Tr - M = 0 \Rightarrow T = \frac{M}{r} \quad (3)$$

Παράδειγμα 1

Τροχός υποβαστάζει μάζα m κινούμενος σε οριζόντιο επίπεδο. Να προσδιορισθεί η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να επιτευχθεί κατά την κίνηση. **Η μάζα του τροχού θεωρείται αμελητέα.** Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στον τροχό και το επίπεδο είναι μ_s .



Στην περίπτωση αυτή :

$$F_h = F_{in} = ma$$

είναι η αδρανειακή δύναμη λόγω επιτάχυνσης, και

$$F_p = mg$$

Είναι φανερό, λόγω και της εξίσωσης (1), ότι η μέγιστη επιτάχυνση θα επιτευχθεί, όταν μεγιστοποιηθεί η τριβή. Αυτό όμως συμβαίνει, όταν επίκειται ολίσθηση του τροχού σε σχέση με το οδόστρωμα, λίγο πριν δηλαδή ο τροχός χάσει στην πρόσφυση.

Ισχύει τότε :

$$T_{max} = \mu_s N$$

Οπότε :

$$T_{max} = ma_{max} = \mu_s N = \mu_s (mg) \Rightarrow a_{max} = \mu_s g$$

Η απαιτούμενη ροπή για να επιτευχθεί η μέγιστη αυτή επιτάχυνση, είναι :

$$M_{max} = T_{max} r \Rightarrow M_{max} = \mu_s g m r$$

Αν η επιβαλλόμενη ροπή ξεπεράσει την τιμή αυτή, ο τροχός θα χάσει την πρόσφυση, θα «πατινάρει».

Αριθμητική εφαρμογή 1

$$\mu_s = 0.5, m = 300 \text{ Kgr}, r = 0.2 \text{ m}, g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$a_{max} = \mu_s g = 0.5 * 10 = 5 \text{ m/s}^2$$

$$M_{max} = \mu_s g m r = 0.5 * 10 * 300 * 0.2 = 300 \text{ Nm}$$

Αριθμητική εφαρμογή 2

Έστω ότι είναι επιθυμητό ο τροχός να επιταχύνει (έστω με σταθερή επιτάχυνση) κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η ταχύτητα του Ο (γραμμική ταχύτητα) να μεταβληθεί από 0 .. 100 km/h σε χρόνο $t=10\text{sec}$. Ποιος είναι ο απαραίτητος συντελεστής στατικής τριβής;

Για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ισχύει :

$$v(t) = v_0 + at$$

Για την περίπτωσή μας :

$$v(10) = 0 + a(10) \Rightarrow a = \frac{100 \left(\frac{\text{Km}}{\text{h}} \right)}{10\text{s}} = \frac{100 \left(\frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} \right)}{10\text{s}} \Rightarrow a = 2.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Άρα :

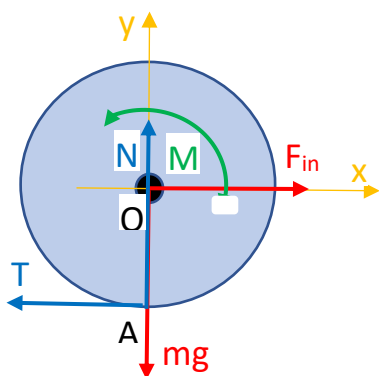
$$\mu_s = \frac{a}{g} = 0.278$$

Η τιμή αυτή του συντελεστή στατικής τριβής είναι εύκολα επιτεύξιμη με τα κοινά ελαστικά.

Υπάρχουν αυτοκίνητα, που μπορούν να επιταχύνουν από 0 .. 100 km/h σε χρόνο $t=2.8\text{sec}$. Αν ξανακάνει κανείς τους υπολογισμούς για τα δεδομένα αυτά θα βρει ότι απαιτείται ο συντελεστής στατικής τριβής να είναι περίπου 1.2. Ένας τόσο μεγάλος συντελεστής στατικής τριβής είναι δύσκολο να επιτευχθεί.

Πως επιτυγχάνουν τα αυτοκίνητα αυτά τις επιταχύνσεις αυτές;

Στην περίπτωση που αναλύσαμε, θεωρήσαμε σιωπηλά ότι η επιτάχυνση είναι θετική. Η ίδια ακριβώς ανάλυση ισχύει και για την περίπτωση που επιχειρήσει κανείς να **επιβραδύνει τον τροχό**. Τότε θα πρέπει να του επιβάλλει ροπή με φορά αυτή του διπλανού σχήματος. Τότε η τριβή αλλάζει επίσης φορά και επιβραδύνει τον τροχό.



Η μέγιστη επιβράδυνση δίνεται και πάλι από τον τύπο :

$$a_{max} = \mu_s g$$

Η δε ροπή πέδησης που απαιτείται για να επιτευχθεί αυτή είναι :

$$M_{max} = \mu_s g m r$$

Οποιαδήποτε ροπή πέδησης μεγαλύτερη από αυτήν, θα οδηγήσει σε ολίσθηση του τροχού, δηλαδή σε απώλεια πρόσφυσης – φρενάρισμα πανικού!

Παράδειγμα 2

Τροχός υποβαστάζει μάζα m και ανέρχεται σε κεκλιμένο επίπεδο. Ποια είναι η μέγιστη γωνία για την οποία μπορεί να ανέλθει κυλιόμενος ο τροχός;

Στην περίπτωση μας :

$$F_h = (mg)\sin\theta$$

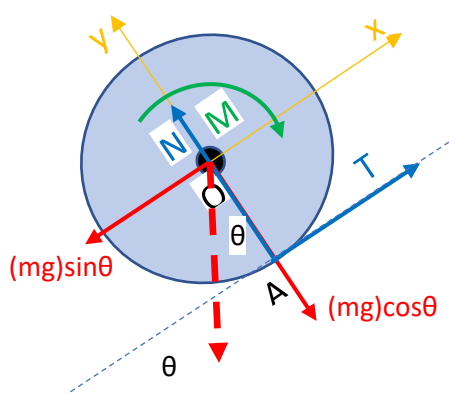
$$F_p = (mg)\cos\theta$$

Όσο μεγαλώνει η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου, τόσο μειώνεται η δύναμη N , άρα και η τριβή. Στην μέγιστη γωνία, επίκειται ολίσθηση του τροχού ως προς το επίπεδο (επίκειται απώλεια πρόσφυσης δηλαδή),

οπότε ισχύει και πάλι η ανάλυση του προηγούμενου παραδείγματος :

$$T_{max} = \mu_s N$$

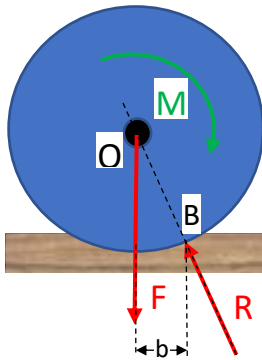
Οπότε :



$$T_{max} = \mu_s N \Rightarrow (mg)\sin\theta = \mu_s(mg\cos\theta) \Rightarrow \tan\theta = \mu_s \Rightarrow \theta = \arctan(\mu_s)$$

Αν η γωνία θ ξεπεράσει την τιμή αυτή, τότε, ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη είναι η επιβαλλόμενη ροπή, ο τροχός δεν ανέρχεται – θα περιστρέφεται απλώς!

Αντίσταση κύλισης τροχού



Σε όλη την προηγούμενη ανάλυσή μας, σιωπηλά υποθέσαμε ότι ο τροχός κατά την επαφή του με την επιφάνεια κύλισης διατηρεί τόσο αυτός όσο και η επιφάνεια το γεωμετρικό τους σχήμα. Η πραγματικότητα είναι, ως συνήθως, πιο πολύπλοκη. Στο διπλανό σχήμα αποτυπώνεται καλύτερα η πραγματική κατάσταση : Το «στιγμιαίο κέντρο περιστροφής» δεν είναι το γεωμετρικό σημείο A των προηγούμενων σχημάτων, αλλά κάποιο σημείο B μετατοπισμένο προς τα εμπρός. Για να μπορέσει να υπάρξει κύλιση, ακόμη και για την περίπτωση που η επιβαλλόμενη στον τροχό δύναμη F είναι

κάθετη στο επίπεδο, απαιτείται να επιβληθεί ροπή M, τουλάχιστον ίση με την ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο αυτό.

$$M \geq Fb$$

Την απόσταση b (παράλληλη προς το επίπεδο μετατόπιση του B ως προς το O), ονομάζουμε **συντελεστή της αντίστασης κύλισης**. Παρατηρείστε ότι ο συντελεστής αυτός δεν είναι αδιάστατος όπως οι συντελεστές τριβής, αλλά έχει διαστάσεις μήκους. Οι τιμές του μπορεί να είναι αρκετά μικρές, μερικά χιλιοστά για χαλύβδινο τροχό επί χαλύβδινης σιδηροτροχιάς μέχρι αρκετά δέκατα. Ο συντελεστής αυτός προσδιορίζεται πειραματικά και μπορεί κανείς να τον αναζητήσει στα φυλλάδια των κατασκευαστών τροχών.

Αριθμητική εφαρμογή

Χαλύβδινος τροχός «υποβαστάζει» βάρος 1000 Kp και κινείται σε οριζόντια χαλύβδινη τροχιά. Πόση ροπή απαιτείται να επιβληθεί στον τροχό προκειμένου να υπερβεί την αντίσταση κύλισης;

Δίδεται : συντελεστής αντίστασης κύλισης τροχού $b=2 \text{ mm}$.

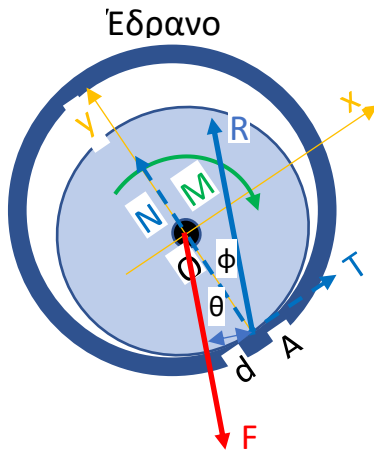
Απάντηση :

$$M = Fb = 1000 * 0.002 \Rightarrow M = 2 \text{ Kpm}$$

Άτρακτος στηριζόμενη σε απλό (plain) έδρανο.

Στο σχήμα φαίνεται ένα κυλινδρικό σώμα να στηρίζεται σε κοίλο κύλινδρο (έδρανο). Το κυλινδρικό αυτό σώμα μπορεί να έχει αρκετά μεγάλο μήκος (σε σχέση με την διάμετρό του) και να καλείται να μεταφέρει κίνηση και ροπή : Ονομάζεται τότε άτρακτος. Οι άτρακτοι, συνηθέστατα καταπονούνται και από δυνάμεις, που περνούν από τον νοητό

άξονά τους και που μπορούμε να τις συνθέσουμε στην δύναμη F - σχήμα. Η εσωτερική διάμετρος του εδράνου είναι σχεδόν ίση με την διάμετρο της ατράκτου.



Αν επιβληθεί ροπή M στην άτρακτο, τότε κατ' αρχήν, όπως και για την περίπτωση του τροχού, θα κυλίσει στο «κεκλιμένο» επίπεδο μέχρι μια ορισμένη γωνία όπου η τριβή γίνεται μέγιστη και στην συνέχεια θα αρχίσει να ολισθαίνει, δηλαδή να περιστρέφεται περί τον άξονά της. Με δεδομένη την F (κατά μέτρο και κατεύθυνση) καθώς και τα r και μ_s μπορεί κανείς, χρησιμοποιώντας τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας καθώς και τον νόμο της τριβής να

υπολογίσει τα T , N , την θέση του σημείου A και κυρίως, την απαιτούμενη ροπή M προκειμένου να υπερνικηθεί η τριβή και να αρχίσει η περιστροφή.

Θα το προσεγγίσουμε εδώ κάπως απλούστερα για να καταλήξουμε σε ένα γενικό και εύχρηστο τύπο για την ροπή αυτή. Ας είναι $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$.

Όταν επίκειται ολίσθηση της ατράκτου επί του εδράνου, ισχύουν :

$$\vec{R} = \vec{F} \Rightarrow R = F \quad (1) \text{ και } \varphi = \theta \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -M + Fd = 0 \Rightarrow M = Fd = F(r \sin \theta) \quad (3)$$

$$T = \mu_s N \Rightarrow \frac{T}{N} = \mu_s \Rightarrow \tan \varphi = \mu_s \quad (4)$$

Επειδή η γωνία φ είναι μικρή, μπορούμε να θέσουμε : $\sin \varphi = \tan \varphi = \mu_s$, οπότε η ζητούμενη ροπή, προκύπτει από την (3) :

$$M \approx Fr\mu_s$$

Που είναι μια πολύ απλή σχέση που μπορούμε να χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την απαιτούμενη ροπή προκειμένου να ξεκινήσει η περιστροφή της ατράκτου.

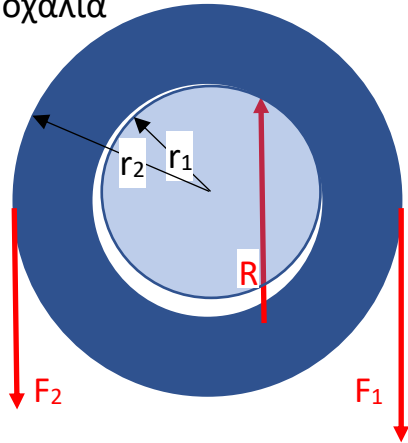
Όταν αρχίσει η περιστροφή, τότε η ροπή που απαιτείται για να υπερνικηθούν οι τριβές, δίνεται από τον ίδιο τύπο αρκεί στην θέση του συντελεστή στατικής να μπει ο συντελεστής κινητικής τριβής, που είναι πάντα λίγο μικρότερος.

$$M \approx Fr\mu_k$$

Τροχαλία στρεφόμενη περί σταθερό άξονα

Η δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι και εδώ ίδιες όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Η απαιτούμενη ροπή για να υπερνικήσει η τροχαλία τις δυνάμεις τριβής και να αρχίσει να κινείται, είναι :

Τροχαλία



$$M \approx F(r_1)\mu_s$$

όπου :

$$F = F_1 + F_2$$

και F_1, F_2 οι δυνάμεις των (συρματο)σχοίνων από στις δύο μεριές τις τροχαλίας.

Η διαφορά των δυνάμεων F_1, F_2 δημιουργεί την απαιτούμενη αυτή ροπή :

$$M = (F_1 - F_2)r_2$$

Από τις παραπάνω σχέσεις :

$$(F_1 - F_2)r_2 \approx (F_1 + F_2)r_1\mu_s$$

Αν γνωρίζει δηλαδή κανείς τις ακτίνες της τροχαλίας και του άξονα, τον συντελεστή τριβής και μια από τις δύο δυνάμεις, τότε μπορεί να βρει την άλλη.

Παράδειγμα

Πόση δύναμη απαιτείται για να ανυψωθεί με την βοήθεια τροχαλίας διαμέτρου 120 mm βάρους 100 Kp. Η τροχαλία περιστρέφεται περί άξονα διαμέτρου 20 mm και ο συντελεστής στατικής τριβής στην μεταξύ τους επαφή είναι 0.15.

Απάντηση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η ζητούμενη δύναμη είναι η F_1 το δε βάρος είναι η F_2 .
Οπότε :

$$(F_1 - F_2)r_2 \approx (F_1 + F_2)r_1\mu_s \Rightarrow (F_1 - 100) * 60 \approx (F_1 + 100) * 10 * 0.15 \\ \Rightarrow \mathbf{F_1 \approx 105 Kp}$$

Πόση δύναμη απαιτείται για να συγκρατηθεί το ίδιο βάρος;

Στην περίπτωση αυτή, η ζητούμενη δύναμη είναι η F_2 το δε βάρος είναι η F_1 . 9

Οπότε :

$$(F_1 - F_2)r_2 \approx (F_1 + F_2)r_1\mu_s \Rightarrow (100 - F_2) * 60 \approx (100 + F_2) * 10 * 0.15 \\ \Rightarrow \mathbf{F_2 \approx 95 Kp}$$