6.3Α Ανάλυση Πλαισιακού Αρθρωτού Φορέα

Στο πρώτο παράδειγμα ανάλυσης ενός πλαισιακού αρθρωτού φορέα, θα μελετήσουμε τον γερανό που περιγράψαμε στην Ενότ. 6.1, ο οποίος φέρει ένα δεδομένο φορτίο W (Σχ. 6.19*a*). Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα φαίνεται στο Σχ. 6.19*b*. Μπορούμε να προσδιορίσουμε αυτό το διάγραμμα για τον προσδιορισμό των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στον αρθρωτό φορέα. Αθροίζοντας τις ροπές ως προς το σημείο A, προσδιορίζουμε πρώτα τη δύναμη $\mathbf{T}$ η οποία ασκείται από το καλώδιο, ενώ αθροίζοντας τις συνιστώσες των δυνάμεων κατά x και y, προσδιορίζουμε στη συνέχεια τις συνιστώσες $\mathbf{A}_x$ και $\mathbf{A}_y$ της αντίδρασης στην άρθρωση A.

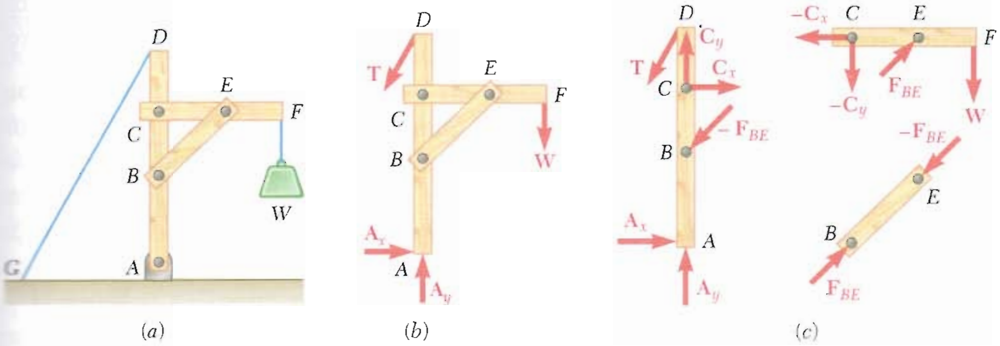
Για να προσδιορίσουμε τις εσωτερικές δυνάμεις που συγκρατούν ενωμένα τα διάφορα μέρη ενός αρθρωτού φορέα, πρέπει να τον αποσυναρμολογήσουμε και να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα ελευθέρου σώματος για καθένα από τα επιμέρους τμήματά του (Σχ. 6.19*c*). Αρχικά, εξετάζουμε τα μέλη δύο δυνάμεων. Στον συγκεκριμένο αρθρωτό φορέα, το μέλος BE είναι το μόνο μέλος δύο δυνάμεων. Οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε άκρο του πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος και την ίδια γραμμή ενέργειας αλλά αντίθετη φορά (Ενότ. 4.2Α). Επομένως, αυτές οι δυνάμεις κατευθύνονται κατά μήκος του BE και συμβολίζονται με $\mathbf{F}_{BE}$ και $-\mathbf{F}_{BE}$, αντίστοιχα. Επιλέγουμε αυθαίρετα τη φορά τους όπως φαίνεται στο Σχ. 6.19*c*. Το πρόσημο το οποίο θα προκύψει για το κοινό μέτρο F_{BE} των δύο δυνάμεων θα επιβεβαιώσει ή όχι αυτή την επιλογή.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε μέλη πολλών δυνάμεων, δηλαδή μέλη στα οποία δρουν τρεις ή περισσότερες δυνάμεις. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκείται στο σημείο B του μέλους AD από το μέλος BE πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη $\mathbf{F}_{BE}$ που ασκείται από το AD στο BE. Ομοίως, η δύναμη που ασκείται στο σημείο E του μέλους CF από το μέλος BE πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη $-\mathbf{F}_{BE}$ που ασκείται από το CF στο BE. Έτσι, οι δυνάμεις τις οποίες ασκεί το μέλος δύο δυνάμεων BE στα μέλη AD και CF είναι ίσες με τις $-\mathbf{F}_{BE}$ και $\mathbf{F}_{BE}$, αντίστοιχα, και έχουν το ίδιο μέγεθος F_{BE}, αντίθετη φορά και κατεύθυνση όπως φαίνεται στο Σχ. 6.19*c*.

Ο κόμβος C συνδέει δύο μέλη πολλών δυνάμεων. Αφού ούτε η κατεύθυνση ούτε το μέγεθος των δυνάμεων που δρουν στο σημείο C είναι γνωστά, παριστάνουμε τις δυνάμεις αυτές με τις συνιστώσες τους κατά x και y. Οι συνιστώσες $\mathbf{C}_x$ και $\mathbf{C}_y$ της δύναμης που δρα στο μέλος AD κατευθύνονται αυθαίρετα προς τα δεξιά και προς τα πάνω. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, αφού οι δυνάμεις που ασκούνται από το μέλος CF στο AD και από το μέλος AD στο CF είναι ίσες και αντίθετες, οι συνιστώσες της δύναμης που δρα πάνω στο μέλος CF *πρέπει* να κατευθύνονται προς τα αριστερά και προς τα κάτω. Τις συμβολίζουμε με $-\mathbf{C}_x$ και $-\mathbf{C}_y$, αντίστοιχα. Το εάν η δύναμη $\mathbf{C}_x$ κατευθύνεται στην πραγματικότητα προς τα δεξιά και η δύναμη $-\mathbf{C}_x$ προς τα αριστερά θα προσδιοριστεί αργότερα από το πρόσημο του κοινού τους μέτρου C_x. Το θετικό πρόσημο υποδεικνύει ότι η υπόθεση που κάναμε ήταν σωστή, ενώ το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι ήταν λανθασμένη. Ολοκληρώνουμε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των μελών πολλών δυνάμεων παρουσιάζοντας τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στα σημεία A, D και F.[2]

Μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε τις εσωτερικές δυνάμεις εξετάζοντας το διάγραμμα ελευθέρου σώματος οποιουδήποτε από τα δύο μέλη πολλών δυνάμεων. Για παράδειγμα, επιλέγοντας το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του μέλους CF, διατυπώνουμε τις εξισώσεις $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma M_E = 0$ και $\Sigma F_x = 0$, οι οποίες δίνουν τις τιμές των μεγεθών F_{BE}, C_y και C_x, αντίστοιχα. Μπορούμε να ελέγξουμε αυτές τις τιμές επαληθεύοντας ότι το μέλος AD βρίσκεται επίσης σε ισορροπία.

Παρατηρήστε ότι υποθέτουμε ότι οι αρθρώσεις στο Σχ. 6.19 αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του ενός από τα δύο μέλη τα οποία συνδέουν, οπότε δεν είναι απαραίτητο να δείξουμε τα διαγράμματα των ελεύθερων σωμάτων τους. Μπορούμε πάντα να διατυπώνουμε αυτήν την υπόθεση για να απλοποιούμε την ανάλυση των πλαισιακών αρθρωτών φορέων και των μηχανημάτων. Ωστόσο, όταν μια άρθρωση συνδέει τρία ή περισσότερα μέλη μεταξύ τους, ή όταν μια άρθρωση συνδέει μια στήριξη με δύο ή περισσότερα μέλη, ή όταν ένα φορτίο εφαρμόζεται σε μια άρθρωση, τότε πρέπει να λάβουμε μια σαφή απόφαση όσον αφορά την επιλογή του μέλους στο οποίο θα υποθέσουμε ότι ανήκει η άρθρωση. (Εάν εμπλέκονται μέλη πολλών δυνάμεων, η άρθρωση θα πρέπει να προσαρτηθεί σε ένα από αυτά τα μέλη). Στη συνέχεια, θα χρειαστεί να αναγνωρίσουμε με προσοχή τις διάφορες δυνάμεις που ασκούνται στην άρθρωση. Αυτό επεξηγείται στο Παράδ. 6.6.



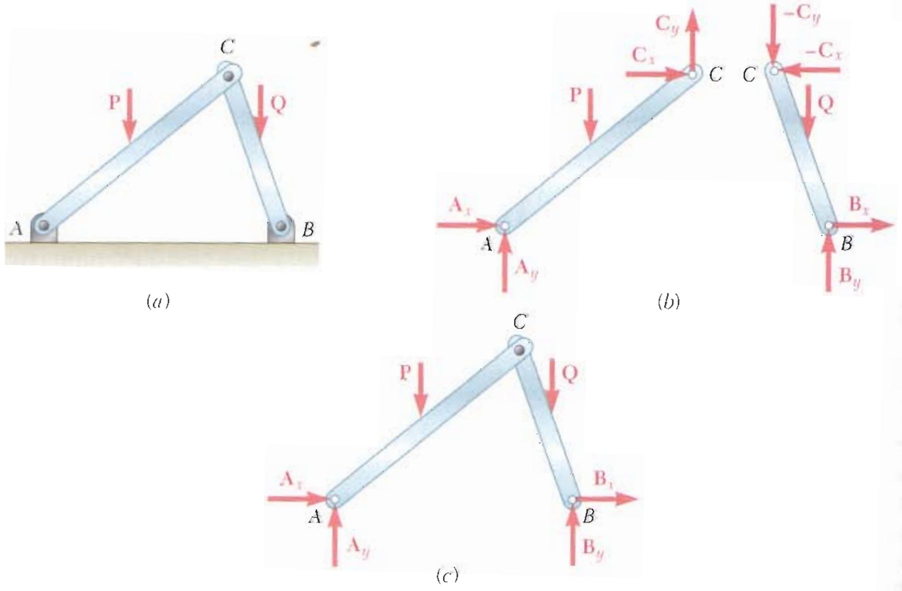
Σχήμα 6.19: Ένας πλαισιακός αρθρωτός φορέας σε κατάσταση ισορροπίας. (a) Το διάγραμμα ενός γερανού που φέρει ένα φορτίο. (b) Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του γερανού. (c) Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των επιμέρους τμημάτων του γερανού.

[2] Δεν είναι αυστηρώς απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε αρνητικό πρόσημο για να διακρίνουμε τη δύναμη που ασκείται από ένα μέλος σε ένα άλλο από την ίση και αντίθετη δύναμη που ασκείται από το δεύτερο μέλος στο πρώτο, αφού οι δύο δυνάμεις ανήκουν σε διαφορετικά διαγράμματα ελευθέρου σώματος και έτσι δεν συγχέονται εύκολα. Στα Παραδείγματα, χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για να παραστήσουμε τις ίσες και αντίθετες δυνάμεις οι οποίες εφαρμόζονται σε διαφορετικά ελεύθερα σώματα. Σημειώνεται ότι, υπό αυτές τις συνθήκες, το πρόσημο που προκύπτει για μια δεδομένη συνιστώσα δύναμης δεν σχετίζει άμεσα τη φορά αυτής της συνιστώσας με τη φορά του αντίστοιχου άξονα συντεταγμένων. Το θετικό πρόσημο υποδεικνύει ότι *η φορά που υποθέσαμε για αυτήν τη συνιστώσα στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος* είναι σωστή, ενώ το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι είναι λανθασμένη.

6.3B Ανάλυση Τριαρθρωτών Φορέων

Ο γερανός τον οποίο μόλις αναλύσαμε ήταν κατασκευασμένος με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να διατηρήσει το ίδιο σχήμα χωρίς τη βοήθεια των στηρίξεων του. Γι' αυτό, τον θεωρήσαμε ως στερεό σώμα. Ωστόσο, πολλοί πλαισιακοί αρθρωτοί φορείς καταρρέουν, εάν τους αποσπάσουμε από τις στηρίξεις τους. Τέτοιοι φορείς δεν θεωρούνται στερεά σώματα. Εξετάστε, για παράδειγμα, τον τριαρθρωτό φορέα που φαίνεται στο Σχ. 6.20*a*, ο οποίος αποτελείται από δύο μέλη AC και CB που φέρουν τα φορτία **P** και **Q** στο μέσο τους. Τα μέλη στηρίζονται με αρθρώσεις στα σημεία A και B και συνδέονται με μια άρθρωση στο σημείο C διαμορφώνοντας έναν ισοστατικό φορέα τύπου τριαρθρωτού τόξου. Εάν αποσπάσουμε τον φορέα από τις στηρίξεις του, αυτός δεν θα διατηρήσει το σχήμα του. Επομένως, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι είναι κατασκευασμένος από *δύο ξεχωριστά στερεά μέρη* AC και CB.

Οι εξισώσεις $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$ (ως προς ένα οποιοδήποτε δεδομένο σημείο) εκφράζουν τις συνθήκες που απαιτούνται για *την ισορροπία ενός στερεού σώματος* (Κεφ. 4). Επομένως, θα πρέπει να τις χρησιμοποιούμε σε σχέση με τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των στερεών σωμάτων, δηλαδή τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των μελών AC και CB (Σχ. 6.20*b*). Αφού αυτά τα μέλη είναι πολλών δυνάμεων και αφού χρησιμοποιούνται αρθρώσεις στις στηρίξεις και στη σύνδεση, παριστάνουμε τις αντιδράσεις στα σημεία A και B και τις δυνάμεις στο σημείο C με τις δύο συνιστώσες τους. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, παριστάνουμε γραφικά τις συνιστώσες της δύναμης που ασκούνται από το μέλος CB στο AC και τις συνιστώσες της δύναμης που ασκούνται από το μέλος AC στο CB με διανύσματα



Σχήμα 6.20: *(a)* Ένας πλαισιακός αρθρωτός φορέας δύο μελών στηρίζεται με δύο αρθρώσεις, ενώ τα μέλη του συνδέονται μεταξύ τους με μια τρίτη άρθρωση. Χωρίς τις στηρίξεις, ο φορέας θα κατέρρεε και, γι' αυτόν τον λόγο, δεν αποτελεί ένα στερεό σώμα. *(b)* Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των δύο μελών. *(c)* Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του φορέα.

ίδιου μεγέθους και αντίθετης φοράς. Έτσι, εάν το πρώτο ζευγάρι συνιστωσών αποτελείται από τις $\mathbf{C}_x$ και $\mathbf{C}_y$, το δεύτερο ζευγάρι παριστάνεται γραφικά με τις $-\mathbf{C}_x$ και $-\mathbf{C}_y$.

Σημειώνουμε εδώ ότι τέσσερις άγνωστες συνιστώσες δυνάμεων δρουν στο ελεύθερο σώμα AC, ενώ χρειαζόμαστε μόνο τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις για να εκφράσουμε ότι το σώμα ισορροπεί. Ομοίως, υπάρχουν τέσσερις άγνωστοι αλλά μόνο τρεις εξισώσεις για το μέλος CB. Ωστόσο, μόνο έξι διαφορετικοί άγνωστοι εμπλέκονται στην ανάλυση των δύο μελών, ενώ συνολικά διατίθενται έξι εξισώσεις για να εκφράσουμε ότι τα μέλη αυτά βρίσκονται σε ισορροπία. Θέτοντας $\Sigma M_A = 0$ για το ελεύθερο σώμα AC και $\Sigma M_B = 0$ για το CB, βρίσκουμε δύο ταυτόχρονες εξισώσεις τις οποίες μπορούμε να λύσουμε ως προς το κοινό μέγεθος C_x των συνιστωσών $\mathbf{C}_x$ και $-\mathbf{C}_x$ και ως προς το κοινό μέγεθος C_y των συνιστωσών $\mathbf{C}_y$ και $-\mathbf{C}_y$. Στη συνέχεια, γράφουμε $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$ για καθένα από τα δύο ελεύθερα σώματα και βρίσκουμε διαδοχικά τα μεγέθη A_x, A_y, B_x και B_y.

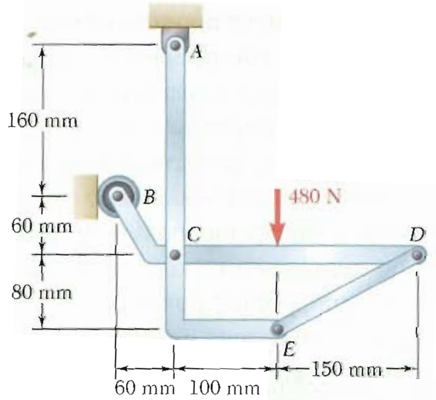
Παρατηρούμε ότι αφού οι εξισώσεις ισορροπίας $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ και $\Sigma M = 0$ (ως προς ένα οποιοδήποτε δεδομένο σημείο) ικανοποιούνται τόσο από τις δυνάμεις που δρουν στο ελεύθερο σώμα AC όσο και από τις δυνάμεις που δρουν στο ελεύθερο σώμα CB, θα πρέπει να ικανοποιούνται επίσης και όταν μελετάμε ταυτόχρονα τις δυνάμεις που δρουν στα δύο ελεύθερα σώματα. Αφού οι εσωτερικές δυνάμεις στο σημείο C αναιρούν η μία την άλλη, βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις ισορροπίας πρέπει να ικανοποιούνται από τις εξωτερικές δυνάμεις που φαίνονται στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος του ίδιου του αρθρωτού φορέα ACB (Σχ. 6.20*c*), παρόλο που ο φορέας δεν είναι στερεό σώμα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις εξισώσεις για τον προσδιορισμό μερικών από τις συνιστώσες των αντιδράσεων στα σημεία A και B. Ωστόσο, θα διαπιστώσουμε ότι **οι αντιδράσεις δεν μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα**. Έτσι, είναι απαραίτητο να αποσυναρμολογήσουμε τον αρθρωτό φορέα και να μελετήσουμε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των επιμέρους τμημάτων του (Σχ. 6.20*b*), ακόμα και όταν μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε μόνο τις εξωτερικές δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει γιατί οι εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν για το ελεύθερο σώμα ACB *αποτελούν αναγκαίες όχι όμως και ικανές, συνθήκες* για την ισορροπία μιας μη στερεής κατασκευής.

Η μέθοδος επίλυσης που περιγράφτηκε εδώ περιλαμβάνει ταυτόχρονες εξισώσεις (συστήματα εξισώσεων) ισορροπίας ροπών για την εύρεση των εσωτερικών δυνάμεων στο C. Τώρα θα παρουσιάσουμε μια πιο αποτελεσματική μέθοδο, η οποία χρησιμοποιεί τόσο το ελεύθερο σώμα ACB όσο και τα ελεύθερα σώματα AC και CB. Γράφοντας $\Sigma M_A = 0$ και $\Sigma M_B = 0$ για το ελεύθερο σώμα ACB, βρίσκουμε τις B_y και A_y. Γράφοντας $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$ για το ελεύθερο σώμα AC, βρίσκουμε διαδοχικά τις A_x, C_x και C_y. Τέλος, θέτοντας $\Sigma F_x = 0$ για το ACB, βρίσκουμε τη B_x.

Σημειώσαμε προηγουμένως ότι η ανάλυση του πλαισιακού αρθρωτού φορέα του Σχ. 6.20 περιλαμβάνει έξι άγνωστες συνιστώσες δυνάμεων και έξι ανεξάρτητες εξισώσεις ισορροπίας. (Οι εξισώσεις ισορροπίας για ολόκληρο τον αρθρωτό φορέα προέκυψαν από τις έξι αρχικές εξισώσεις και, επομένως, δεν είναι ανεξάρτητες). Επιπλέον, διαπιστώσαμε ότι όλοι οι άγνωστοι μπορούσαν στην πραγματικότητα να προσδιοριστούν και ότι όλες οι εξισώσεις μπορούσαν να ικανοποιηθούν. Αυτός ο αρθρωτός φορέας είναι **στατικά ορισμένος (ή ισοστατικός) και στερεός**. (Χρησιμοποιούμε τον όρο «στερεός» εδώ για να δείξουμε ότι ο φορέας διατηρεί το σχήμα του όσο παραμένει συνδεδεμένος στις στηρίξεις.) Γενικά, για να προσδιορίσουμε εάν μια κατασκευή είναι στατικά ορισμένη και στερεή, θα πρέπει να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα ελευθέρου σώματος για καθένα από τα επιμέρους τμήματά της και να υπολογίσουμε τις σχετικές αντιδράσεις και εσωτερικές δυνάμεις. Θα πρέπει, στη συνέχεια, να προσδιορίσουμε τον αριθμό των ανεξάρτητων εξισώσεων ισορροπίας (αποκλείοντας τις εξισώσεις που εκφράζουν την ισορροπία ολόκληρης της κατασκευής ή την ισορροπία ομάδων από επιμέρους τμήματα οι οποίες έχουν ήδη αναλυθεί). Εάν έχουμε περισσότερους αγνώστους από ό,τι εξισώσεις, η κατασκευή είναι *στατικά αόριστη*. Εάν έχουμε λιγότερους αγνώστους από ό,τι εξισώσεις, η κατασκευή είναι *μη στερεή*. Εάν έχουμε τόσους αγνώστους όσες και εξισώσεις και, επίσης, *εάν όλοι οι άγνωστοι μπορούν να προσδιοριστούν και όλες οι εξισώσεις μπορούν να ικανοποιηθούν* υπό γενικές συνθήκες φόρτισης, η κατασκευή είναι *στατικά ορισμένη και στερεή*. Ωστόσο, εάν δεν μπορούν να προσδιοριστούν όλοι οι άγνωστοι ούτε να ικανοποιηθούν όλες οι εξισώσεις εξαιτίας μιας *ακατάλληλης διάταξης* μελών και στηρίξεων, η κατασκευή είναι **στατικά αόριστη και μη στερεή**.

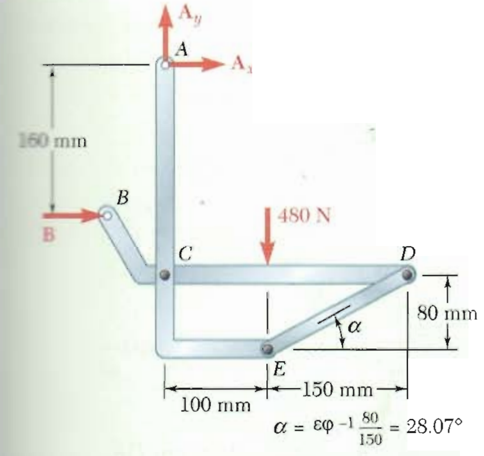
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4

Στον πλαισιακό αρθρωτό φορέα που φαίνεται στο σχήμα, τα μέλη ACE και BCD συνδέονται με μια άρθρωση στο σημείο C και με τον σύνδεσμο DE. Για τη φόρτιση του σχήματος, να προσδιορίσετε τη δύναμη στον σύνδεσμο DE και τις συνιστώσες της δύναμης που ασκείται στο σημείο C του μέλους BCD.

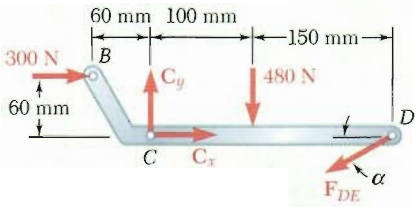


ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ: Ακολουθούμε τη γενική διαδικασία που συζητήθηκε σε αυτήν την ενότητα. Αρχικά, θεωρούμε ολόκληρο τον αρθρωτό φορέα ως ελεύθερο σώμα, γεγονός που θα μας επιτρέψει να βρούμε τις αντιδράσεις στα σημεία A και B. Στη συνέχεια, αποσυναρμολογούμε τον φορέα και αντιμετωπίζουμε κάθε μέλος ως ελεύθερο σώμα. Με αυτόν τον τρόπο, θα εξασφαλίσουμε τις εξισώσεις που χρειάζονται για να βρούμε τη δύναμη στο σημείο C.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ και ΛΥΣΗ: Αφού οι εξωτερικές αντιδράσεις περιλαμβάνουν μόνο τρεις αγνώστους, υπολογίζουμε τις αντιδράσεις εξετάζοντας το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα.



Σχήμα 1: Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα.



Σχήμα 2: Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του μέλους *BCD*.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 480\text{ N} = 0 \qquad A_y = +480\text{ N} \qquad \mathbf{A}_y = 480\text{ N}\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -(480\text{ N})(100\text{ mm}) + B(160\text{ mm}) = 0 \qquad B = +300\text{ N} \qquad \mathbf{B} = 300\text{ N}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad B + A_x = 0 \qquad 300\text{ N} + A_x = 0 \qquad A_x = -300\text{ N} \qquad \mathbf{A}_x = 300\text{ N}\leftarrow$$

Τώρα αποσυναρμολογούμε τον αρθρωτό φορέα (Σχ. 2 και Σχ. 3). Αφού μόνο δύο μέλη συνδέονται στο σημείο *C*, οι συνιστώσες των άγνωστων δυνάμεων που δρουν στα μέλη *ACE* και *BCD* είναι, αντίστοιχα, ίσες και αντίθετες. Υποθέτουμε ότι ο σύνδεσμος *DE* βρίσκεται σε κατάσταση εφελκυσμού (Σχ. 3) και ασκεί ίσες και αντίθετες δυνάμεις στα σημεία *D* και *E*, οι οποίες κατευθύνονται όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ελεύθερο Σώμα του Μέλους *BCD*. Χρησιμοποιώντας το ελεύθερο σώμα *BCD* (Σχ. 2), μπορούμε να διατυπώσουμε και να λύσουμε τρεις εξισώσεις ισορροπίας:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad -(F_{DE}\,\eta\mu\, a)(250\text{ mm}) + (300\text{ N})(80\text{ mm}) + (480\text{ N})(100\text{ mm}) = 0$$

$$F_{DE} = -561\text{ N} \qquad F_{DE} = 561\text{ N} \ \ (\theta\lambda\acute{\iota}\psi\eta)$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad C_x - F_{DE}\,\sigma\upsilon\nu\, a + 300\text{ N} = 0$$

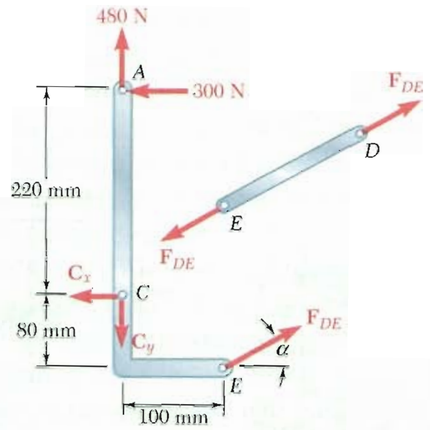
$$C_x - (-561\text{ N})\,\sigma\upsilon\nu 28.07° + 300\text{ N} = 0 \qquad C_x = -795\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - F_{DE}\,\eta\mu\, a - 480\text{ N} = 0$$

$$C_y - (-561\text{ N})\,\eta\mu 28.07° - 480\text{ N} = 0 \qquad C_y = +216\text{ N}$$

Από τα πρόσημα που προέκυψαν για τις C_x και C_y, συμπεραίνουμε ότι οι συνιστώσες $\mathbf{C}_x$ και $\mathbf{C}_y$ που ασκούνται στο μέλος *BCD* κατευθύνονται προς τα αριστερά και προς τα πάνω, αντίστοιχα. Επομένως, έχουμε

$$\mathbf{C}_x = 795\text{ N}\leftarrow \qquad \mathbf{C}_y = 216\text{ N}\uparrow$$



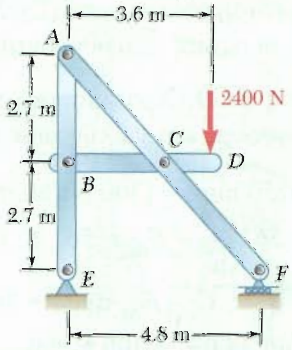
Σχήμα 3: Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των μελών *ACE* και *DE*.

ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ: Ελέγχουμε τους υπολογισμούς εξετάζοντας το ελεύθερο σώμα *ACE* (Σχ. 3). Για παράδειγμα,

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = (F_{DE}\,\text{συν}\,a)(300\text{ mm}) + (F_{DE}\,\text{ημ}\,a)(100\text{ mm}) - C_x(220\text{ mm})$$
$$= (-561\,\text{συν}\,a)(300) + (-561\,\text{ημ}\,a)(100) - (-795)(220) = 0$$

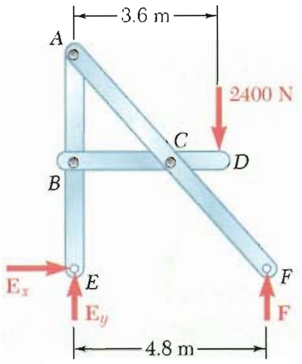
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5

Να προσδιορίσετε τις συνιστώσες των δυνάμεων που δρουν σε κάθε μέλος του πλαισιακού αρθρωτού φορέα που φαίνεται στο σχήμα.

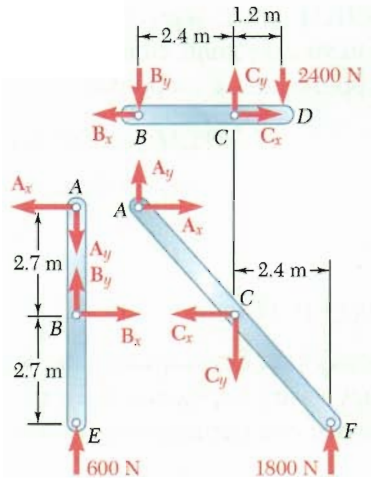


ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ: Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε για αυτήν την ανάλυση είναι να θεωρήσουμε ολόκληρο τον αρθρωτό φορέα ως ένα ελεύθερο σώμα για να προσδιορίσουμε τις αντιδράσεις και ύστερα να εξετάσουμε τα ξεχωριστά μέλη του αρθρωτού φορέα. Όμως, σε αυτήν την περίπτωση, δεν θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις σε ένα μέλος, χωρίς να αναλύσουμε ένα δεύτερο μέλος την ίδια στιγμή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ και ΛΥΣΗ: Οι εξωτερικές αντιδράσεις περιλαμβάνουν μόνο τρεις αγνώστους, οπότε υπολογίζουμε τις αντιδράσεις εξετάζοντας το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα (Σχ. 1).



Σχήμα 1: Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα.



Σχήμα 2: Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των μεμονωμένων μελών.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(2400\ \text{N})(3.6\ \text{m}) + F(4.8\ \text{m}) = 0 \qquad F = +1800\ \text{N} \qquad \mathbf{F} = 1800\ \text{N}\uparrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -2400\ \text{N} + 1800\ \text{N} + E_y = 0 \qquad E_y = +600\ \text{N} \qquad \mathbf{E}_y = 600\ \text{N}\uparrow$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad \mathbf{E}_x = 0$$

Τώρα αποσυναρμολογούμε τον αρθρωτό φορέα. Αφού μόνο δύο μέλη συνδέονται σε κάθε κόμβο, οι συνιστώσες των δυνάμεων για κάθε μέλος είναι ίσες και αντίθετες σε κάθε κόμβο (Σχ. 2).

Ελεύθερο Σώμα του Μέλους *BCD*.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -(2400\ \text{N})(3.6\ \text{m}) + C_y(2.4\ \text{m}) = 0 \qquad C_y = +3600\ \text{N}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad -(2400\ \text{N})(1.2\ \text{m}) + B_y(2.4\ \text{m}) = 0 \qquad B_y = +1200\ \text{N}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad -B_x + C_x = 0$$

Ούτε η B_x ούτε η C_x μπορούν να βρεθούν εξετάζοντας αποκλειστικά το μέλος *BCD*. Χρειάζεται να εξετάσουμε το μέλος *ABE*. Οι θετικές τιμές που προέκυψαν για τις B_y και C_y υποδεικνύουν ότι οι συνιστώσες $\mathbf{B}_y$ και $\mathbf{C}_y$ έχουν την κατεύθυνση που υποθέσαμε.

Ελεύθερο Σώμα του Μέλους *ABE*.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B_x(2.7\ \text{m}) = 0 \qquad B_x = 0$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad +B_x - A_x = 0 \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -A_y + B_y + 600\ \text{N} = 0 \qquad -A_y + 1200\ \text{N} + 600\ \text{N} = 0 \qquad A_y = +1800\ \text{N}$$

Ελεύθερο Σώμα του Μέλους *BCD*. Επιστρέφοντας τώρα στο μέλος *BCD*, έχουμε

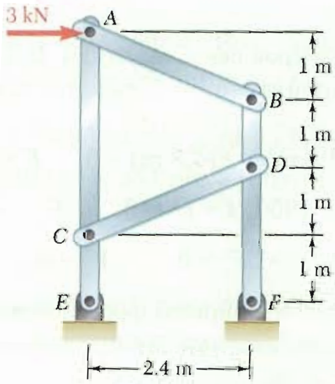
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0 \qquad 0 + C_x = 0 \qquad C_x = 0$$

ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ: Όλες οι άγνωστες συνιστώσες έχουν πλέον βρε-θεί. Για να ελέγξουμε τα αποτελέσματα, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το μέλος *ACF* βρίσκεται σε ισορροπία.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = (1800\text{ N})(2.4\text{ m}) - A_y(2.4\text{ m}) - A_x(2.7\text{ m})$$
$$= (1800\text{ N})(2.4\text{ m}) - (1800\text{ N})(2.4\text{ m}) - 0 = 0$$
$$(\textit{επαλήθευση})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.6

Μια οριζόντια δύναμη μεγέθους 3 kN εφαρμόζεται στην άρθρωση *A* του πλαισια-κού αρθρωτού φορέα που φαίνεται στο σχήμα. Να προσδιορίσετε τις δυνάμεις που δρουν στα δύο κατακόρυφα μέλη του πλαισιακού αρθρωτού φορέα.

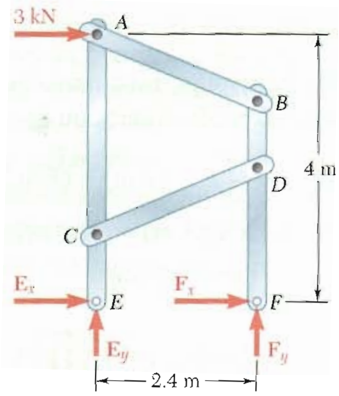


ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ: Ξεκινάμε, όπως συνήθως, με ένα διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα, αλλά αυτή τη φορά δεν θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε όλες τις αντιδράσεις. Θα χρειαστεί να αναλύσουμε ένα ξεχωριστό μέλος και ύστερα να επιστρέψουμε στην ανάλυση ολόκληρου του αρθρωτού φορέα, προκειμένου να προσδιορίσουμε τις απομένουσες δυνάμεις αντίδρασης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ και ΛΥΣΗ: Επιλέγοντας ολόκληρο τον αρθρωτό φορέα ως ελεύθερο σώμα, μπορούμε να διατυπώσουμε εξισώσεις ισορροπίας για να προσδιορίσουμε τις δύο συνιστώσες δυνάμεων $\mathbf{E}_y$ και $\mathbf{F}_y$. Ωστόσο, αυτές οι εξισώ-σεις δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό των $\mathbf{E}_x$ και $\mathbf{F}_x$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(3\text{ kN})(4\text{ m}) + F_y(2.4\text{ m}) = 0 \qquad F_y = +5\text{ kN} \qquad \mathbf{F}_y = 5\text{ kN}\uparrow$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E_y + F_y = 0 \qquad E_y = -5\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_y = 5\text{ kN}\downarrow$$

Για να προχωρήσουμε με τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, εξετάζουμε τώρα τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των διάφορων μελών (Σχ. 2). Κατά την αποσυ-ναρμολόγηση του πλαισιακού αρθρωτού φορέα, υποθέτουμε ότι η άρθρωση *A* προ-σαρτάται στο μέλος πολλών δυνάμεων *ACE*, έτσι ώστε η δύναμη των 3 kN να εφαρ-μόζεται σε αυτό το μέλος. Σημειώνεται ότι τα *AB* και *CD* είναι μέλη δύο δυνάμεων.



Σχήμα 1: Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα.

Ελεύθερο Σώμα του Μέλους *ACE*.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -\frac{5}{13}F_{AB} + \frac{5}{13}F_{CD} - 5\text{ kN} = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \qquad -(3\text{ kN})(4\text{ m}) - (\tfrac{12}{13}F_{AB})(4\text{ m}) - (\tfrac{12}{13}F_{CD})(1\text{ m}) = 0$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα εξισώσεων, έχουμε

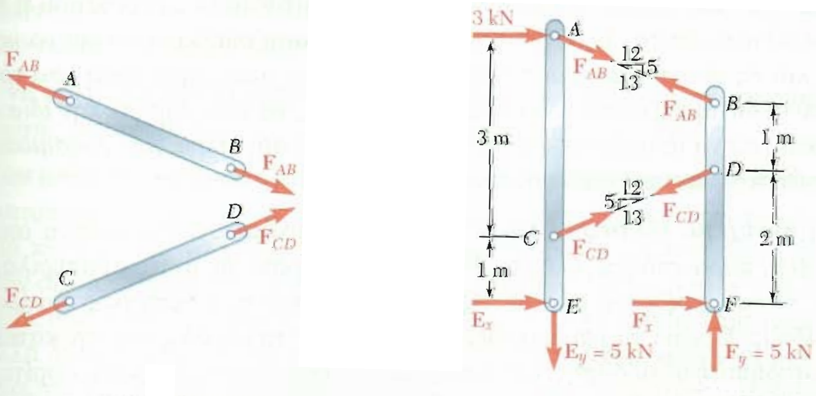
$$F_{AB} = -5.2\text{ kN} \qquad F_{CD} = +7.8\text{ kN}$$

Τα πρόσημα υποδεικνύουν ότι η φορά που υποθέσαμε για την F_{CD} ήταν σωστή, ενώ η φορά για την F_{AB} ήταν λανθασμένη. Αθροίζοντας τώρα τις συνιστώσες κατά x, έχουμε

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad 3\text{ kN} + \frac{12}{13}(-5.2\text{ kN}) + \frac{12}{13}(+7.8\text{ kN}) + E_x = 0$$

$$E_x = -5.4\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_x = 5.4\text{ kN} \leftarrow$$

Ελεύθερο Σώμα Ολόκληρου του Αρθρωτού Φορέα. Αφού έχουμε προσδιορίσει την $\mathbf{E}_x$, μπορούμε να επιστρέψουμε στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος ολόκληρου του αρθρωτού φορέα.



Σχήμα 2: Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των μεμονωμένων μελών.