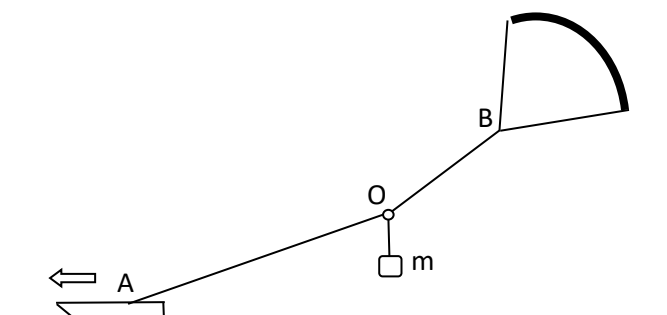


Εξέταση προόδου – Νοέμβριος 2019

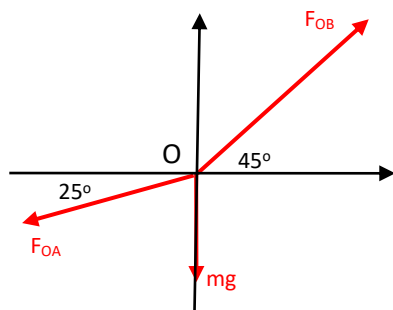
ΘΕΜΑ 1°



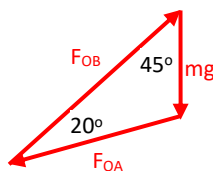
Το ληρρός άνθρωπος μάζας m , αιωρείται «κρεμασμένος» με την βοήθεια σχοινιού από τον κρίκο O . Τον ίδιο κρίκο «τραβάνε» επίσης τα σχοινιά AO από το ταχύπλοο και το OB από το αλεξίπτωτο – σχήμα. Οι γωνίες που σχηματίζουν τα σχοινιά AO και OB με την οριζόντια διεύθυνση είναι 25° και 45° αντίστοιχα.

Υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σχοινί (με όποιο τρόπο θέλετε).

Σχεδιάστε το τρίγωνο των δυνάμεων αυτών.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που επενεργούν στον κρίκο, φαίνονται σχεδιασμένες στο Σχήμα 1. Θεωρούμε ότι ο κρίκος ισορροπεί και ότι έχει αμελητέες διαστάσεις, ότι είναι δηλαδή σημείο.

Τρόπος Α

Εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων που συντρέχουν στο O :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{OB} \cos(45^\circ) + F_{OA} \cos(155^\circ) + mg \cos(90^\circ) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{OB} \sin(45^\circ) + F_{OA} \sin(115^\circ) + mg \sin(180^\circ) = 0 \quad (2)$$

Οι άγνωστες δυνάμεις προκύπτουν από την λύση του συστήματος των εξισώσεων.

Τρόπος Β

Στο Σχήμα 2 φαίνεται το τρίγωνο των δυνάμεων καθώς και το μέτρο δύο γωνιών του – προκύπτουν από απλή γεωμετρία. Νόμος ημιτόνων για το τρίγωνο αυτό :

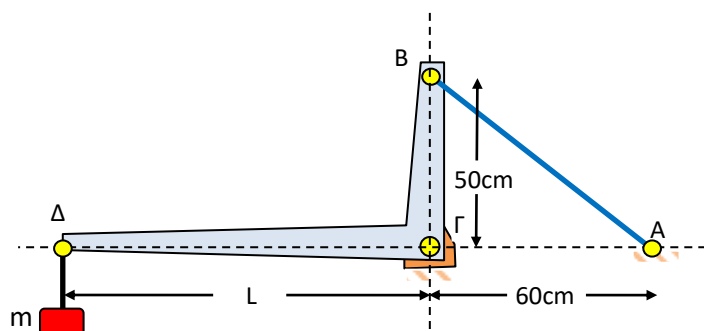
$$F_{OA} / \sin(45^\circ) = mg / \sin(20^\circ) \Rightarrow$$

$$F_{OA} = 20.67 \text{ m (N)}$$

$$F_{OB} / \sin(115^\circ) = mg / \sin(20^\circ) \Rightarrow$$

$$F_{OB} = 26.50 \text{ m (N)}$$

ΘΕΜΑ 2^ο



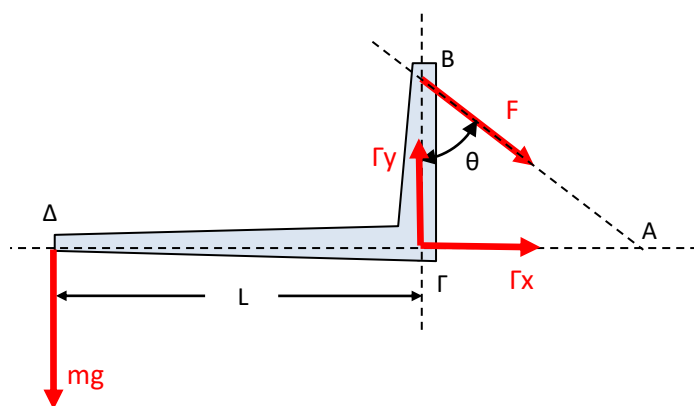
Το στερεό σώμα ΒΓΔ είναι αρθρωμένο στην θέση Γ, συγκρατείται από το συρματόσχοινο ΑΒ και υποβαστάζει σώμα μάζας m.

Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να αντέξει το συρματόσχοινο είναι 5000 Kp.

Υπολογίσετε τη μέγιστη μάζα που μπορεί να αναρτηθεί χωρίς να κοπεί το

συρματόσχοινο. Πόση είναι τότε η δύναμη που καταπονεί την άρθρωση;

ΛΥΣΗ



Σχεδιάζουμε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος του στερεού ΒΓΔ. Στο σημείο Β σχεδιάζω την δύναμη του συρματοσχοίνου. Στην άρθρωση τοποθετώ τις συνιστώσες της άγνωστης δύναμης.

Για την γωνία θ ισχύει :

$$\tan(\theta) = \text{ΑΓ}/\text{ΒΓ} = 60/50 \Rightarrow \theta = 50.2^\circ$$

Εξετάζουμε την ισορροπία του σώματος στην οριακή εκείνη κατάσταση κατά την οποία επίκειται η θραύση του συρματοσχοίνου. Τότε $F = 5000 \text{ Kp}$.

Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow mg \cos(90^\circ) + \Gamma_x + F \cos(90^\circ - \theta) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg \cos(180^\circ) + \Gamma_y + F \cos(180^\circ - \theta) = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright \Sigma M_\Gamma = 0 \Rightarrow -mg * L + [F \cos(90^\circ - \theta)] * 50 = 0 \quad (3)$$

Από την τελευταία εξίσωση, προκύπτει αμέσως :

$$-m * 10 * L + (5000 * 10) * 0.768 * 50 = 0 \Rightarrow m = 192070/L \text{ Kgr} \quad (L : \text{cm})$$

που είναι και η μέγιστη μάζα που μπορεί να αναρτηθεί χωρίς να σπάσει το συρματόσχοινο.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις δύο πρώτες εξισώσεις για να προσδιορίσουμε την δύναμη στην άρθρωση.

Από την εξίσωση (1) :

$$mg \cos(90^\circ) + \Gamma_x + F \cos(90^\circ - \theta) = 0 \Rightarrow 0 + \Gamma_x + 5000 \cdot 0.768 \Rightarrow \Gamma_x = -3841 \text{ Kp}$$

Από την εξίσωση (2) :

$$mg \cos(180^\circ) + \Gamma_y + F \cos(180^\circ - \theta) = 0 \Rightarrow -mg + \Gamma_y + 5000 \cdot (-0.640) \Rightarrow$$

$$\Gamma_y = 3200 + 192070/L \text{ Kp}$$

Για το μέτρο της δύναμης αυτής, ισχύει :

$$\Gamma = \sqrt{\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2}$$

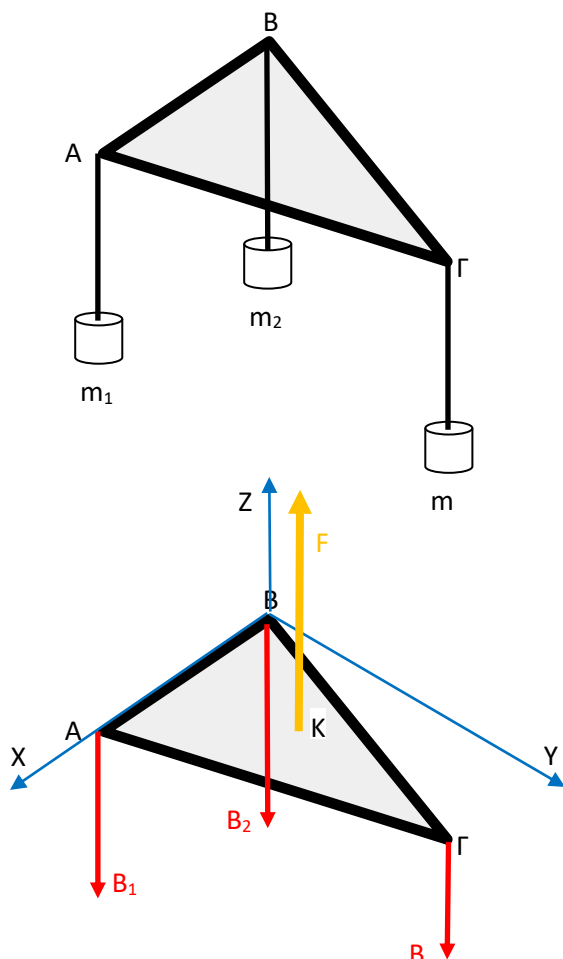
Για να προσδιορίσουμε την διεύθυνσή της, θα βρούμε με την βοήθεια των συνημιτόνων κατεύθυνσης, τις γωνίες που σχηματίζει με τους άξονες X και Y :

$$\cos(\theta_x) = \frac{\Gamma_x}{\Gamma}, \quad \cos(\theta_y) = \frac{\Gamma_y}{\Gamma}$$

Αριθμητική εφαρμογή : $L = 100 \text{ cm}$, τότε $\Gamma_y = +5121 \text{ Kp}$ και $\Gamma = 6401 \text{ Kp}$

$$\cos(\theta_x) = -0.600 \Rightarrow \theta_x = 126.9^\circ, \quad \cos(\theta_y) = +0.800 \Rightarrow \theta_y = 36.9^\circ$$

Η δύναμη βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο και σχηματίζει γωνία 36.9° με τον άξονα των Y.



ΘΕΜΑ 3^ο

Τρεις μάζες είναι αναρτημένες στην τριγωνική μεταλλική πλάκα ΑΒΓ. Από ποιο σημείο της πλάκας πρέπει να την σηκώσει ένα ελικόπτερο ώστε να παραμένει οριζόντια όταν αιωρείται;

$m_1 = 1500 \text{ Kgr}$, $m_2 = 1200 \text{ Kgr}$,
 $ΑΓ = 2 \text{ m}$, $ΑΒ = 1 \text{ m}$, $ΒΓ = 1.5 \text{ m}$

ΛΥΣΗ

Στο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα του ελεύθερου σώματος «πλάκα» όταν αυτό αιωρείται σε οριζόντια θέση κρεμασμένο από το σημείο Κ με συντεταγμένες $(X_0, Y_0, 0)$.

Το διάνυσμα θέσης των κορυφών Α και Β είναι :

$$(2m)\vec{i} + (0)\vec{j} + (0)\vec{k}$$

$$(0)\vec{i} + (0)\vec{j} + (0)\vec{k}$$

αντίστοιχα. Για να βρούμε αυτό της κορυφής Γ, προσδιορίζουμε την γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ με την βοήθεια του νόμου των συνημιτόνων :

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB * B\Gamma * \cos(\widehat{AB\Gamma}) \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} = 106.8^\circ$$

Οπότε το διάνυσμα θέσης της κορυφής Γ είναι :

$$(1.5\cos(106.8^\circ))\vec{i} + (1.5\cos(16.8^\circ))\vec{j} + (0)\vec{k} = -\mathbf{0.434\vec{i} + 1.436\vec{j} + 0\vec{k}}$$

(Το τρίγωνο προέκυψε από την επίλυσή του, αμβλυγώνιο. Η κορυφή δηλαδή Γ δεν είναι σχεδιασμένη σωστά στο σχήμα. Αυτό δεν έχει καμιά σημασία. Οι υπολογισμοί είναι σωστοί.)

Για το μέτρο της δύναμης F του ελικοπτέρου, ισχύει προφανώς (εφ' όσον οι δυνάμεις ισορροπούν) :

$$F = (m_1 + m_2 + m)g = (2700 + B) \text{ Kp} \quad (B : \text{kp})$$

Για τις ροπές των τεσσάρων δυνάμεων ως προς την αρχή των αξόνων ισχύει :

$$\overrightarrow{M_{B_1}} = (0 * B_1)\vec{i} - (AB * B_1)\vec{j} = 0\vec{i} - (-1500\text{Kpm})\vec{j} = 0\vec{i} + (+1500\text{Kpm})\vec{j}$$

$$\overrightarrow{M_{B_2}} = (0)\vec{i} - (0)\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$\overrightarrow{M_B} = (1.436 * B)\vec{i} - (-0.434 * B)\vec{j} = (-1.436 B \text{ Kpm})\vec{i} + (-0.434 B \text{ Kpm})\vec{j}$$

$$\overrightarrow{M_F} = (Y_0 F)\vec{i} - (X_0 F)\vec{j} = (Y_0(2700 + B))\vec{i} + (-X_0(2700 + B))\vec{j}$$

Εφ' όσον το σώμα ισορροπεί, ισχύει :

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow 0 + 0 + (-1.436B \text{ Kpm}) + [(2700+B)Y_0] \text{ Kpm} = 0 \Rightarrow Y_0 = \mathbf{(1.436 B)/(2700+B) \text{ m}}$$

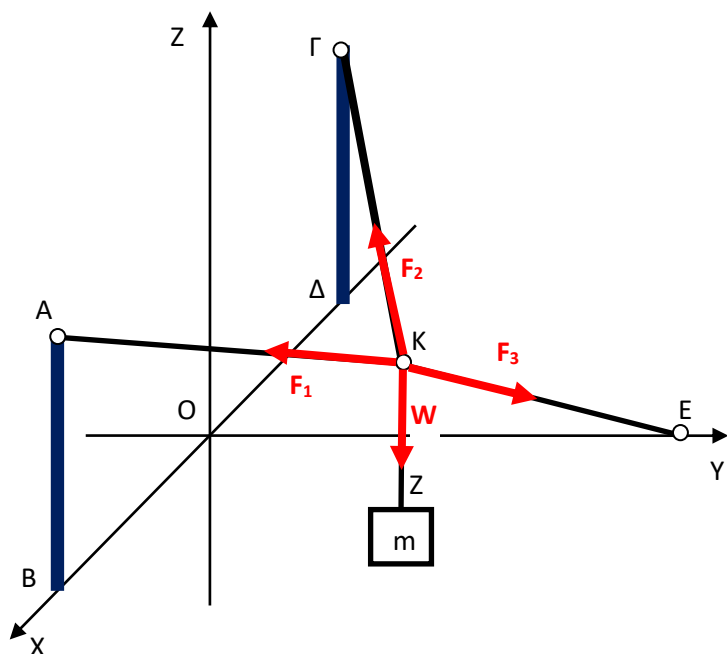
$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow +1500\text{Kpm} + 0 + (-0.434B \text{ Kpm}) + [-(2700+B)X_0] \text{ Kpm} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{X_0 = (1500 - 0.434 B)/(2700+B) \text{ m}}$$

Τελική εξέταση Ιανουάριος 2020

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1^ο (25%)



Μάζα m ισορροπεί αναρτημένη στον «κόμβο» K με την βοήθεια των συρματοσχοίων KZ , KA , $K\Gamma$ και KE . Τα σημεία A και Γ βρίσκονται στην κορυφή κατακόρυφων, ίσου ύψους στύλων που είναι τοποθετημένοι κατά μήκος του άξονα X , συμμετρικά ως προς την αρχή. Το σημείο E βρίσκεται στον άξονα Y .

Υπολογίσετε τις δυνάμεις που καταπονούν τα συρματόσχοινα.

Δίδονται : $AB = \Delta\Gamma = 4\text{m}$, $OE = 10\text{m}$, $B\Delta = 12\text{m}$

Συντεταγμένες σημείου K :

$X_K = 0$, $Y_K = 4\text{m}$, $Z_K = 3\text{m}$.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση $m = 1000$

Κqr. Οπότε : $W = 1000\text{ Kp}$

Λύση

1. Υπολογίζω τα συνημίτονα κατεύθυνσης των διανυσμάτων $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{K\Gamma}$, $\overrightarrow{KE}$:

Για τις συντεταγμένες των σημείων K , A , Γ και E , ισχύει :

$$X_K = 0, Y_K = 4, Z_K = 3$$

$$X_A = 6, Y_A = 0, Z_A = 4$$

$$X_\Gamma = -6, Y_\Gamma = 0, Z_\Gamma = 4$$

$$X_E = 0, Y_E = 10, Z_E = 0$$

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\overrightarrow{KA}$ ισχύει :

$$KA^2 = (X_A - X_K)^2 + (Y_A - Y_K)^2 + (Z_A - Z_K)^2 \Rightarrow KA = 7.28\text{ m}$$

$$\cos(\vartheta_{KA_x}) = \frac{X_A - X_K}{KA} = \frac{6}{7.28} = 0.824$$

$$\cos(\vartheta_{KA_y}) = \frac{Y_A - Y_K}{KA} = \frac{-4}{7.28} = -0.549$$

$$\cos(\vartheta_{KA_z}) = \frac{Z_A - Z_K}{KA} = \frac{1}{7.28} = 0.137$$

Με αντίστοιχο τρόπο, υπολογίζουμε :

$$ΚΓ = 7.28 \text{ m}, \cos(\vartheta_{K\Gamma_x}) = -0.824, \cos(\vartheta_{K\Gamma_y}) = -0.549, \cos(\vartheta_{K\Gamma_z}) = +0.137$$

$$ΚΕ = 6.71 \text{ m}, \cos(\vartheta_{KE_x}) = 0.000, \cos(\vartheta_{KE_y}) = +0.894, \cos(\vartheta_{KE_z}) = -0.447$$

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ και $\vec{W}$ των συρματοσχοίνων ΚΑ, ΚΓ, ΚΕ και ΚΖ αντίστοιχα, επενεργούν στο σημείο Κ, το οποίο ισορροπεί. Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων αυτών είναι αυτά των αντίστοιχων διανυσμάτων, όπως υπολογίσθηκαν παραπάνω. Οπότε :

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \Rightarrow$$

$$F_1 \cos(\theta_{KA_x}) + F_2 \cos(\theta_{K\Gamma_x}) + F_3 \cos(\theta_{KE_x}) = 0$$

$$F_1 \cos(\theta_{KA_y}) + F_2 \cos(\theta_{K\Gamma_y}) + F_3 \cos(\theta_{KE_y}) = 0$$

$$F_1 \cos(\theta_{KA_z}) + F_2 \cos(\theta_{K\Gamma_z}) + F_3 \cos(\theta_{KE_z}) = W$$

=>

$$F_1 * 0.824 + F_2 * (-0.824) + F_3 * (0.000) = 0$$

$$F_1 * (-0.549) + F_2 * (-0.549) + F_3 * (+0.894) = 0$$

$$F_1 * 0.137 + F_2 * 0.137 + F_3 * (-0.447) = 1000$$

Η επίλυση του συστήματος δίδει :

$$\mathbf{F_1 = -3640 \text{ Kp}, \quad F_2 = -3640 \text{ Kp}, \quad F_3 = -4472 \text{ Kp}}$$

Παρατήρηση :

Από λάθος, η συντεταγμένη Ζκ του σημείου Κ δόθηκε 3 m αντί για -3 m. Έτσι οι δυνάμεις των συρματοσχοίνων προκύπτουν αρνητικές, που σημαίνει ότι το πραγματικό σύστημα δεν μπορεί να ισορροπεί στην θέση αυτή. Αν λύσει κανείς το πρόβλημα ξανά με Ζκ = -3 m, θα βρει :

$$\mathbf{F_1 = 558 \text{ Kp}, \quad F_2 = 558 \text{ Kp}, \quad F_3 = 497 \text{ Kp}}$$

Φυσικά αυτό δεν επηρεάζει καθόλου την λύση της άσκησης. Όποιος έλυσε το πρόβλημα, με το «λάθος» δεδομένο, πήρε βαθμό.

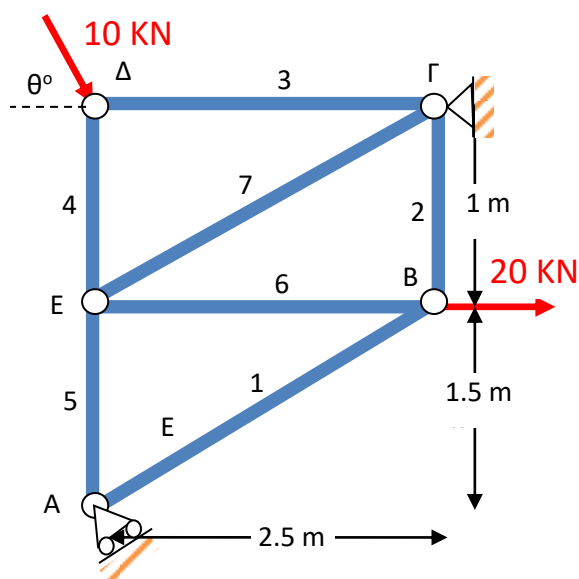
ΘΕΜΑ 2^ο (25%)

Για το «απλό» δικτύωμα του σχήματος :

1. Γράψετε μια μεθοδολογία (Βήμα 1^ο, Βήμα 2^ο, ...) για την εύρεση των δυνάμεων όλων των ράβδων.
2. Υπολογίσετε τις δυνάμεις των ράβδων : 1,3,4,5.

Σημ. Το επίπεδο κύλισης του κόμβου A είναι παράλληλο με την ράβδο AB.

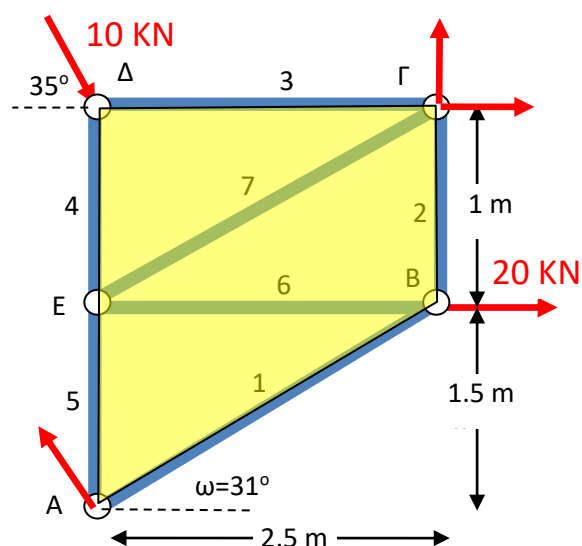
Ας πάρουμε την περίπτωση που $\vartheta = 35^\circ$.



1. Μεθοδολογία

- Παρατηρώ ότι μπορώ να ξεκινήσω από τον κόμβο Δ και να υπολογίσω τις δυνάμεις των 2 ράβδων του.
- Εξετάζοντας ένα - ένα τους υπόλοιπους κόμβους, παρατηρώ ότι δεν υπάρχει κανείς άλλος με δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις.
- Άρα πρέπει να εξετάσω την ισορροπία όλου του δικτύωματος ώστε να υπολογίσω τις δυνάμεις στις στηρίξεις.
- Στην συνέχεια μπορώ να εξετάσω την ισορροπία του κόμβου A ή του Γ και στην συνέχεια των υπολοίπων κόμβων.
- Μπορώ βέβαια να γράψω τις δύο εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων για κάθε ένα από τους 5 κόμβους και να λύσω το σύστημα των 10 εξισώσεων με τους δέκα αγνώστους (δυνάμεις των 7 ράβδων + 3 άγνωστες δυνάμεις στις στηρίξεις)...

2. Υπολογισμός συγκεκριμένων δυνάμεων



Ξεκινώντας από τον κόμβο Δ, μπορώ να υπολογίσω τις δυνάμεις των ράβδων 3 και 4. Στην συνέχεια, θα υπολογίσω την δύναμη της κύλισης A εξετάζοντας την ισορροπία όλου του δικτύωματος και παίρνοντας μόνο ισορροπία ροπών ως προς Γ.

Για την γωνία ω : $\epsilon\phi(\omega) = 1.5/2.5 \Rightarrow \omega = 31^\circ$

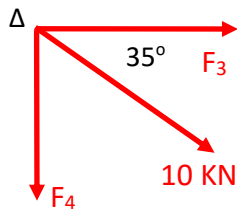
Ισορροπία όλου του δικτύωματος :

$$\begin{aligned} \sum M_\Gamma = 0 \Rightarrow & [A \cdot \cos(59^\circ)] \cdot (1.5 + 1) + \\ & [A \cdot \cos(31^\circ)] \cdot (2.5) - [10 \cdot \cos(55^\circ)] \cdot (2.5) - \end{aligned}$$

$$-(20) \cdot (+1) = 0$$

$$\Rightarrow A = 10.01 \text{ KN}$$

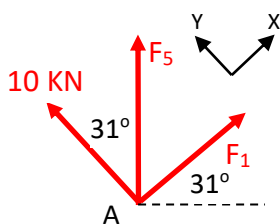
Κόμβος Δ



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 10 \cos(35^\circ) + F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = -8.19 \text{ KN (θλιπτική)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10 \cos(125^\circ) - F_4 = 0 \Rightarrow F_4 = -5.74 \text{ KN (θλιπτική)}$$

Κόμβος Α

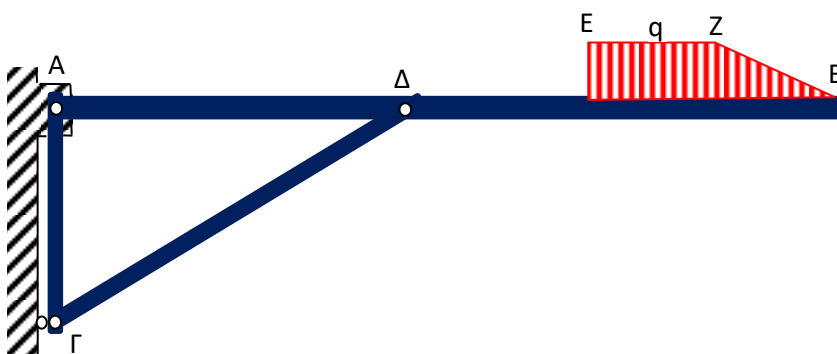


Χρησιμοποιώ για ευκολία το σύστημα αξόνων που φαίνεται στο σχήμα

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10.01 + F_5 \cos(31^\circ) = 0 \Rightarrow F_5 = -11.67 \text{ KN (θλιπτική)}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_5 \cos(59^\circ) + F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = +6.01 \text{ KN (εφελκυστική)}$$

ΘΕΜΑ 3^ο (35%)



Η κατασκευή του σχήματος, που αποτελείται από την δοκό AB και τις ράβδους ΑΓ και ΓΔ, στηρίζεται με άρθρωση στην θέση Α και «ακουμπά» χωρίς τριβή στο σημείο Γ κατακόρυφου στηρίγματος.

Φορτίζεται επίσης με κατανεμημένο φορτίο, όπως δείχνει το σχήμα.

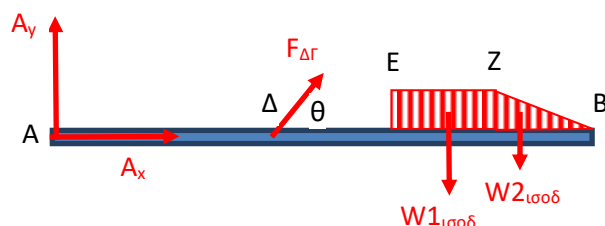
1. Υπολογίσετε και σχεδιάσετε τις εξωτερικές δυνάμεις σε όλα τα μέλη

της κατασκευής. 2. Σχεδιάστε τα διαγράμματα αξονικών και τεμνουσών δυνάμεων καθώς και το διάγραμμα καμπτικών ροπών για την δοκό. Δίδονται : $AB = 5 \text{ m}$, $AD = 2 \text{ m}$, $EZ = ZB = 1 \text{ m}$, $AG = 1.5 \text{ m}$

1. Εξωτερικές δυνάμεις στα μέλη της κατασκευής

Για να υπολογίσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις, σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος της δοκού AB. Το μέλος ΔΓ, είναι αρθρωμένο σε δύο σημεία, δεν δέχεται δύναμη εκτός των δύο αυτών

σημείων, συνεπώς συμπεριφέρεται ως ράβδος. Καταπονείται δηλαδή με δύναμη $F_{\Delta\Gamma}$ με διεύθυνση την διεύθυνση του ίδιου του $\Gamma\Delta$.



Για την γωνία θ ισχύει :

$$\epsilon\phi(\theta) = \Gamma A / \Delta\Gamma = 1.5/2 \Rightarrow \theta = 36.9^\circ$$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που

$$q = 1000 \text{ Kp/m}$$

Το καταναεμημένο φορτίο, είναι κατά το ένα του μέρους ομοιόμορφο και κατά το άλλο τριγωνικό. Ισχύει :

$$W1_{ισοδ} = q * EZ = 1000 \text{ K}$$

$$W2_{ισοδ} = (q * ZB)/2 = 500 \text{ Kp}$$

Συνθήκες ισορροπίας σώματος :

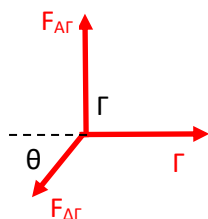
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(F_{\Delta\Gamma} \cos(90 - \theta))A\Delta + W1_{ισοδ}(AE + EZ/2) + W2_{ισοδ}(AZ + ZB/3) = 0 \Rightarrow F_{\Delta\Gamma} = 4722 \text{ Kp}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + (F_{\Delta\Gamma} \cos(\theta)) = 0 \Rightarrow A_x = -3766 \text{ Kp}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + (F_{\Delta\Gamma} \cos(90 - \theta)) - W1_{ισοδ} - W2_{ισοδ} = 0 \Rightarrow A_y = -1335 \text{ Kp}$$

Από την παραπάνω ανάλυση, προέκυψε και η δύναμη που καταπονεί το **μέλος – ράβδο $\Gamma\Delta$: 4722 Kp θλιπτική.**

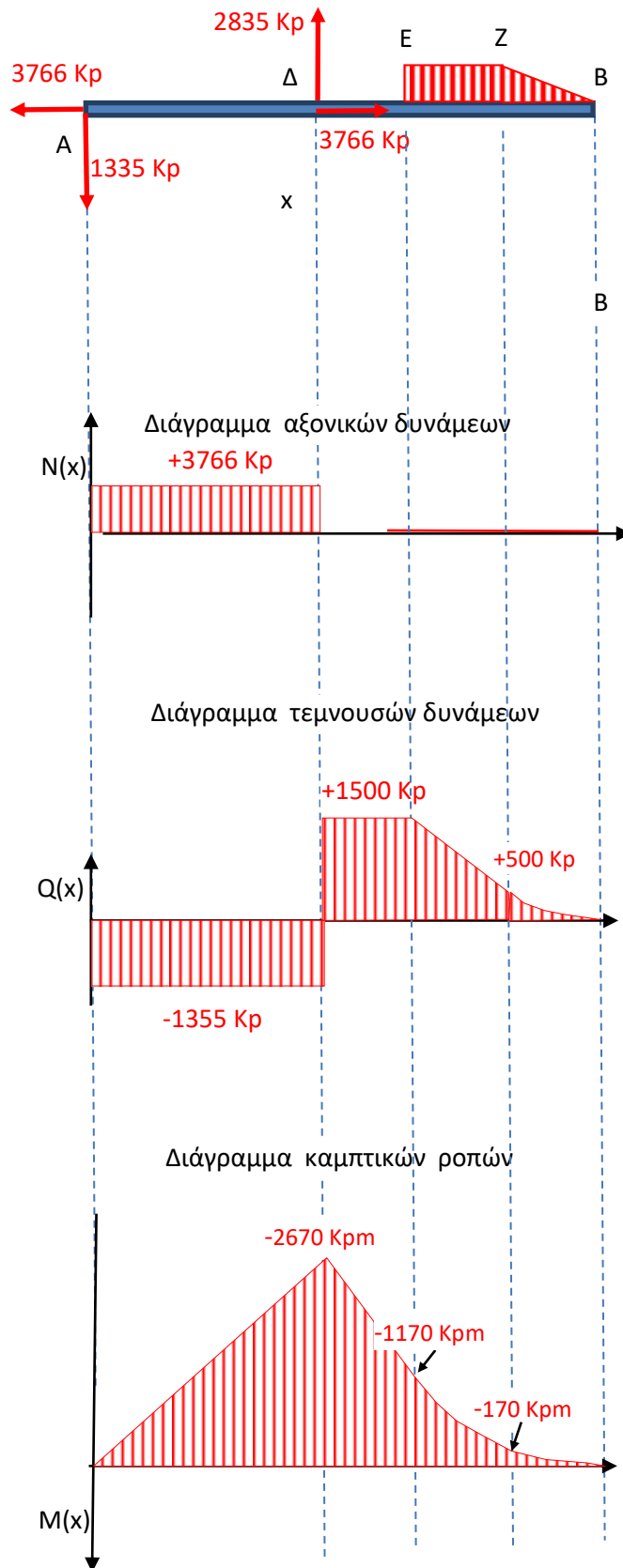
Για τους ίδιους λόγους που εξηγήσαμε παραπάνω, και το μέλος ΑΓ «συμπεριφέρεται» ως ράβδος. Για να υπολογίσουμε την δύναμη που την καταπονεί, θα εξετάσουμε την ισορροπία του κόμβου Γ . Την άγνωστη δύναμη της ράβδου ΑΓ , θεωρούμε εφελκυστική :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{\text{ΑΓ}} + F_{\Delta\Gamma} \cos(90 + \theta) = 0 \Rightarrow F_{\text{ΑΓ}} = 2835 \text{ Kp}$$

Συνεπώς, το μέλος – ράβδος ΑΓ , καταπονείται με **2834 Kp εφελκυστικό φορτίο.**

Διαγράμματα εσωτερικών δυνάμεων και καμπτικών ροπών για την δοκό.



A. Αξονικές δυνάμεις

Σταθερή (εφαλκυστική) αξονική δύναμη υπάρχει μόνο στο τμήμα ΑΔ. Το διάγραμμα είναι συνεπώς απλό.

B. Τέμνουσες δυνάμεις

Στο **τμήμα ΑΕ** δεν υπάρχει κατανεμημένο φορτίο, άρα το διάγραμμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα.

Στο **Τμήμα ΕΖ**, το κατανεμημένο φορτίο είναι ομοιόμορφο, οπότε η συνάρτηση της τέμνουσας δύναμης είναι πρώτου βαθμού.

$$Q_E = 1500 \text{ Kp}, Q_Z = 500 \text{ Kp}$$

Στο **Τμήμα ΖΒ**, το κατανεμημένο φορτίο $q(x)$ συνάρτηση πρώτου βαθμού, οπότε η τέμνουσα δύναμη είναι συνάρτηση δευτέρου βαθμού.

$$Q_Z = 500 \text{ Kp}, Q_B = 0 \text{ Kp}$$

Γ. Καμπτικές ροπές

$$M_A = 0 \text{ Kpm}$$

$$M_{\Delta} = -(1335 \cdot 2) = -2670 \text{ Kpm}$$

$$M_E = -(1335 \cdot 3) + (2835 \cdot 1) = -1170 \text{ Kpm}$$

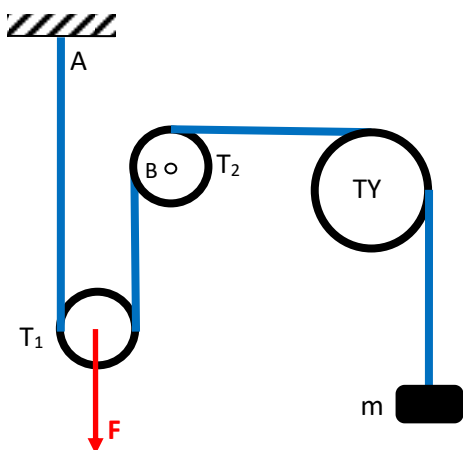
$$M_Z = -(1335 \cdot 4) + (2835 \cdot 2) - [(1000 \cdot 1) \cdot 0.5] = -170 \text{ Kpm}$$

$$M_B = 0 \text{ Kpm}$$

Στα τμήματα ΑΔ και ΔΕ η συνάρτηση της καμπτικής ροπής είναι πρώτου βαθμού. Στο τμήμα ΕΖ είναι δευτέρου βαθμού ενώ στο τμήμα ΖΒ είναι τρίτου βαθμού. Για να

βρούμε τις δύο τελευταίες συναρτήσεις πρέπει να κάνουμε αντίστοιχες «τομές». Μπορεί κανείς να ανατρέξει στην λύση της Άσκησης 2 που είχατε να παραδώσετε για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων αυτών.

ΘΕΜΑ 4^ο (25%)

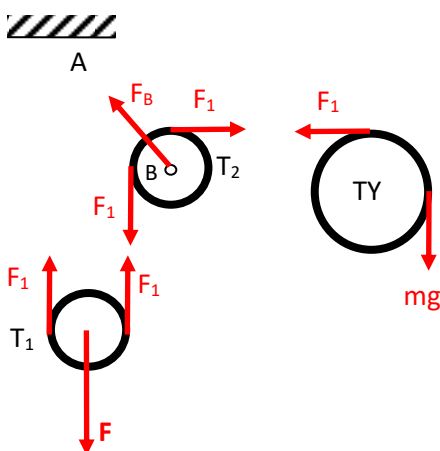


Μάζα m είναι αναρτημένη σε συρματοσχοίνο το οποίο διέρχεται από το σταθερό τύμπανο TY (ακίνητος κύλινδρος), την σταθερή τροχαλία T_2 , την ελεύθερη τροχαλία T_1 και προσδένεται στο σταθερό σημείο A. 1. Υπολογίστε την δύναμη F (ασκείται στο κέντρο της ελεύθερης τροχαλίας) που απαιτείται : A. Για να συγκρατηθεί η μάζα. B. Για να αρχίσει να ανέρχεται. Για δύο περιπτώσεις : 1. Όταν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ συρματοσχοίνου και επιφάνειας τυμπάνου είναι $\mu_s = 0$ και 2. Όταν είναι $\mu_s = 0.25$

2. Υπολογίστε την δύναμη (μέτρο, διεύθυνση, φορά) στον άξονα B (θεωρούμενου ως σημείο) της σταθερής τροχαλίας T_2 , για την δυσμενέστερη (από πλευράς καταπόνησής του) από τις 4 παραπάνω περιπτώσεις (A1, A2, B1, B2).

Σε όλες τις περιπτώσεις, θεωρείστε αμελητέες τις τριβές σε όλα τα σημεία των τροχαλιών. Θεωρείστε ακόμη αμελητέα τα βάρη του συρματοσχοίνου και των τροχαλιών. Μάζα m : Όπως και στο Θέμα 1.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που $m = 1000 \text{ Kg}$. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



είναι $\theta = \pi/2$ (rad)

Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τις τροχαλίες. Φαίνονται επίσης οι δυνάμεις που εξασκεί το συρματοσχοίνο στο τύμπανο. Ισχύει πάντα :

$$F = 2F_1 \quad (1)$$

A. Τύμπανο χωρίς τριβή

Η δύναμη που απαιτείται είτε για να συγκρατηθεί είτε για να αρχίσει να ανεβαίνει, είναι ίδια.

Ισχύει : $F_1 = mg \Rightarrow F = 2mg \Rightarrow F = 2000 \text{ Kp}$.

B. Τύμπανο με τριβή

Η γωνία τύλιξης του συρματοσχοίνου γύρω από το τύμπανο

B1. Δύναμη που απαιτείται για συγκράτηση του βάρους

$$\frac{mg}{F_1} = e^{\mu_s \theta} = e^{\left(\frac{0.25\pi}{2}\right)} = 1.48 \Rightarrow F_1 = 676 \text{ Kp} \Rightarrow \mathbf{F = 1352 \text{ Kp}}$$

B1. Δύναμη που απαιτείται για να αρχίσει να ανυψώνεται το βάρος :

$$\frac{F_1}{mg} = e^{\mu_s \theta} = e^{\left(\frac{0.25\pi}{2}\right)} = 1.48 \Rightarrow F_1 = 1480 \text{ Kp} \Rightarrow \mathbf{F = 2960 \text{ Kp}}$$

2. Δύναμη στον άξονα B.

Για λόγους συμμετρίας η δύναμη F_B θα σχηματίζει γωνία 135° με κάθε μια από τις δυνάμεις που εξασκεί το συρματόσχοινο στην τροχαλία (σχήμα). Η δυσμενέστερη περίπτωση είναι η τελευταία όπου $F_1 = 1480 \text{ Kp}$

Ισορροπία ελευθέρου σώματος «τροχαλία T2» :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 + (F_B \cos(135)) = 0 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \mathbf{F_B = 2093 \text{ Kp}}$$

Ιανουάριος 2021

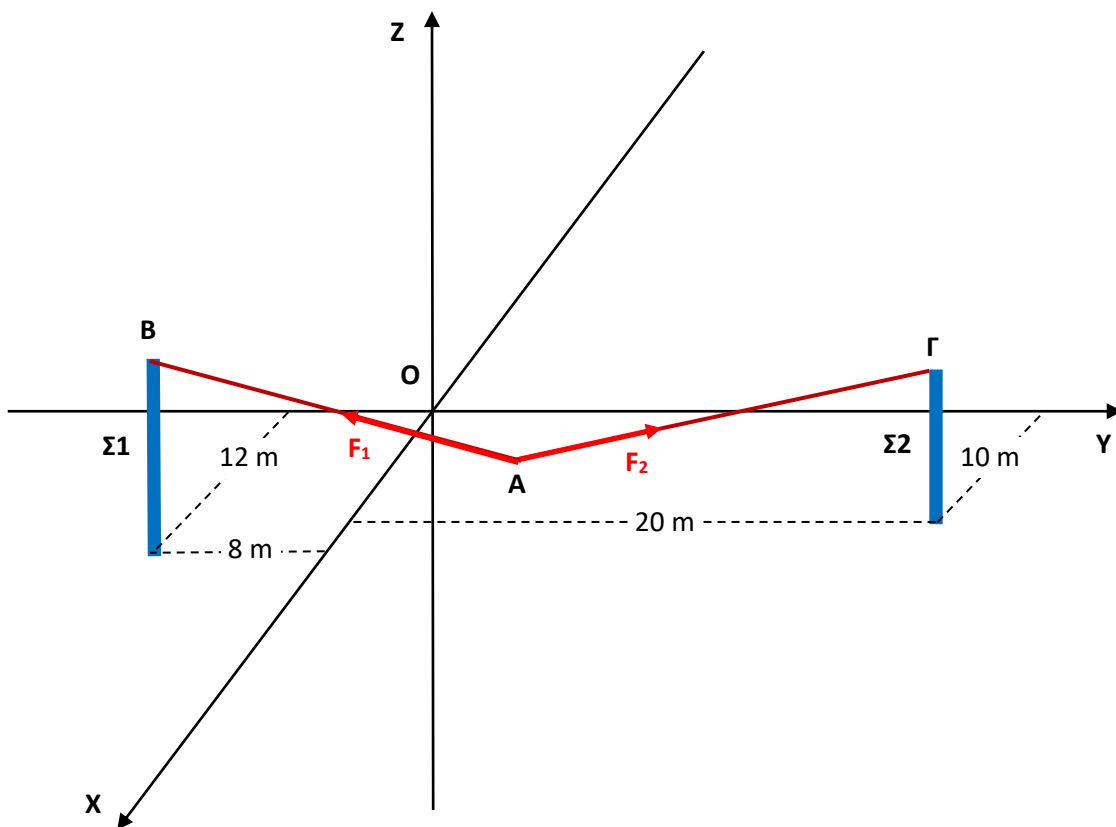
1^ο ΘΕΜΑ (30%)

Τα συρματόσχοινα AB και ΑΓ, στηρίζονται στους κατακόρυφους στύλους Σ1 και Σ2 αντίστοιχα και στο σημείο Α, στο οποίο ασκούν δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι 1000 Κρ και 500 Κρ αντίστοιχα.

1. Υπολογίσετε την συνισταμένη $\vec{R}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.
2. Υπολογίσετε την ροπή $\vec{M}_O$ της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς το Ο.

Δεδομένα :

- Οι στύλοι είναι «μπαγγμένοι» στο επίπεδο ΧΥ και έχουν ύψη Σ1 : 6 m και Σ2 : 4 m
- Το σημείο Α έχει συντεταγμένες (x,y,0)
- Όπου x το τελευταίο και y το προτελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, σε m.



ΛΥΣΗ

(1)

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που το σημείο Α είναι το (5, 5, 0).

Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ είναι :

(12, -8, 6) και (10, 20, 4) αντίστοιχα.

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι ίδια με αυτά των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ αντίστοιχα.

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{AB}$ ισχύει :

$$AB^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2 = (12 - 5)^2 + (-8 - 5)^2 + (6 - 0)^2 \Rightarrow \mathbf{AB = 15.94\ m}$$

$$\cos(\vartheta_{AB_x}) = \frac{X_B - X_A}{AB} = \frac{7}{15.94} = 0.439$$

$$\cos(\vartheta_{AB_y}) = \frac{Y_B - Y_A}{AB} = \frac{-13}{15.94} = -0.816$$

$$\cos(\vartheta_{AB_z}) = \frac{Z_B - Z_A}{AB} = \frac{6}{15.94} = 0.376$$

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{AG}$ ισχύει :

$$AG^2 = (X_G - X_A)^2 + (Y_G - Y_A)^2 + (Z_G - Z_A)^2 = (10 - 5)^2 + (20 - 5)^2 + (4 - 0)^2 \Rightarrow \mathbf{AG = 16.31\ m}$$

$$\cos(\vartheta_{AG_x}) = \frac{X_G - X_A}{AG} = \frac{5}{16.31} = 0.307$$

$$\cos(\vartheta_{AG_y}) = \frac{Y_G - Y_A}{AG} = \frac{15}{16.31} = 0.920$$

$$\cos(\vartheta_{AG_z}) = \frac{Z_G - Z_A}{AG} = \frac{4}{16.31} = 0.245$$

Οι δυνάμεις συνεπώς των συρματοσχοίνων, ως διανύσματα είναι :

$$\vec{F}_1 = 1000Kp \left(\cos(\vartheta_{AB_x})\vec{i} + \cos(\vartheta_{AB_y})\vec{j} + \cos(\vartheta_{AB_z})\vec{k} \right) = 439Kp\vec{i} - 816Kp\vec{j} + 376Kp\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = 500Kp \left(\cos(\vartheta_{AG_x})\vec{i} + \cos(\vartheta_{AG_y})\vec{j} + \cos(\vartheta_{AG_z})\vec{k} \right) = 153.5Kp\vec{i} + 460Kp\vec{j} + 122.5Kp\vec{k}$$

Η δε συνισταμένη τους :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (439Kp\vec{i} - 816Kp\vec{j} + 376Kp\vec{k}) + (153.5Kp\vec{i} + 460Kp\vec{j} + 122.5Kp\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{\vec{R} = 592.5Kp\vec{i} - 356Kp\vec{j} + 499Kp\vec{k} = 853\ Kp(0.695\vec{i} - 0.417\vec{j} + 0.585\vec{k})}$$

(2)

Η ροπή $\vec{M}_O$ της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς το O, δίνεται από την γνωστή ορίζουσα :

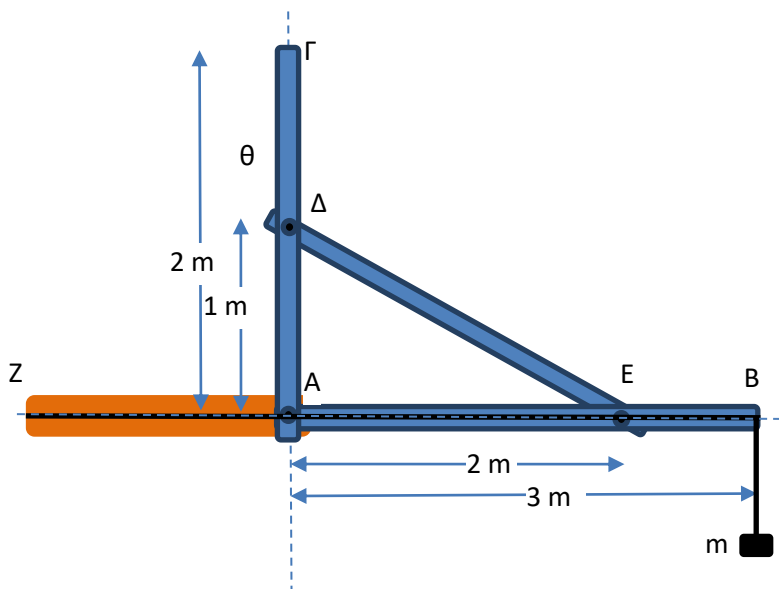
$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix}$$

Όπου : r_x, r_y, r_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης, δηλαδή του A.

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 5 & 0 \\ 439 & -816 & 376 \end{vmatrix} = 1880 \text{Kpm} \vec{i} - 1380 \text{Kpm} \vec{j} - 6275 \text{Kpm} \vec{k}$$

2^ο ΘΕΜΑ (30%)

Η στερεά (μπλέ) κατασκευή του σχήματος, αποτελείται από τα μέλη AB, ΑΓ και ΔΕ συνδεδεμένα με αρθρώσεις. Το μέλος ΓΑ είναι κάθετο στο μέλος AB. Η εν λόγω κατασκευή, στηρίζεται στην ίδια την άρθρωσή της Α και στο συρματοσχόινο ΓΖ, σε τέτοια θέση ώστε το AB να είναι οριζόντιο. Στο σημείο Β έχει αναρτηθεί μάζα $m=1000 \text{ Kgr}$ και η κατασκευή ισορροπεί.



να είναι σε Κρ.

1. Υπολογίσετε στην δύναμη του συρματοσχοίνου.

2. Σχεδιάστε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το μέλος ΑΓ και υπολογίστε όλες τις δυνάμεις που το «στηρίζουν».

3. Κάνετε το ίδιο και για το μέλος ΔΕ.

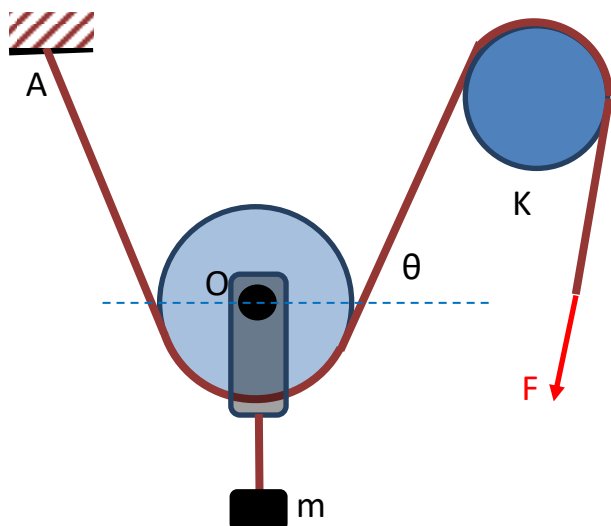
$$\vartheta = T*5 + \Pi T + 5 \text{ (μοίρες)}$$

T: τελευταίο, ΠΤ : Προτελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

Οι δυνάμεις που θα βρείτε πρέπει

3° ΘΕΜΑ (25%)

Στον άξονα της ελεύθερης τροχαλίας του σχήματος, έχει αναρτηθεί μάζα $m=1000 \text{ Kgr}$. Η τροχαλία ισορροπεί, στηριζόμενη σε συρματοσχοίνο, το οποίο τυλίγεται επίσης σε ακίνητο κυλινδρικό σώμα Κ και στο οποίο ασκείται δύναμη F (σχήμα).



1. Υπολογίσετε την δύναμη του συρματοσχοίνου στο τμήμα του από το σημείο Α μέχρι το σημείο που συναντά το Κ.

2. Υπολογίσετε την δύναμη F για την περίπτωση που οι τριβή μεταξύ συρματοσχοίνου και Κ είναι αμελητέα.

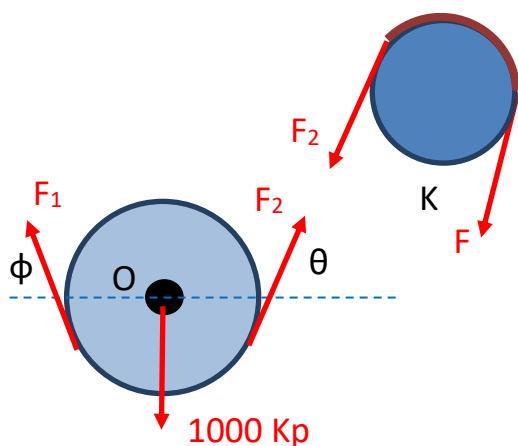
Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ συρματοσχοίνου και Κ είναι 0.3 :

3. Υπολογίσετε την ελάχιστη δύναμη F που απαιτείται για να αρχίσει η μάζα να ανεβαίνει.

4. Υπολογίστε την ελάχιστη δύναμη F

που απαιτείται για να συγκρατείται η μάζα.

- Σε όλες τις περιπτώσεις, θεωρήσετε τις τριβές στην ελεύθερη τροχαλία αμελητέες.
- Γωνία τύλιξης συρματοσχοίνου στο Κ = 160° . Γωνία θ , όπως και στο Θέμα 2.



ΛΥΣΗ

(1)

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το Δ.Ε.Σ. για την ελεύθερη τροχαλία.

Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 \cos(180 - \varphi) + F_2 \cos(\theta) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 \cos(90 - \varphi) + F_2 \cos(90 - \theta) - 1000 = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow F_1 r - F_2 r = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \quad (3)$$

Από την (1) και εξ αιτίας της (3), προκύπτει ότι $\underline{\phi = \theta}$.

Από την (2) :

$$F_2 \sin \theta + F_2 \sin \theta - 1000 = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{500}{\sin \theta} \text{ Kp}$$

(2)

Αν οι τριβές στο Κ θεωρηθούν αμελητέες, τότε :

$$F_2 = F = \frac{500}{\sin \theta} \text{ Kp}$$

(3)

Η γωνία τύλιξης του συρματοσχοίνου στο Κ, είναι $\omega = 160^\circ (\pi/180) = 2.793 \text{ rad}$

Η ελάχιστη δύναμη είναι αυτή για την οποία «επíκειται» ολίσθηση του σχοινιού προς την μεριά της δύναμης F. Ισχύει τότε :

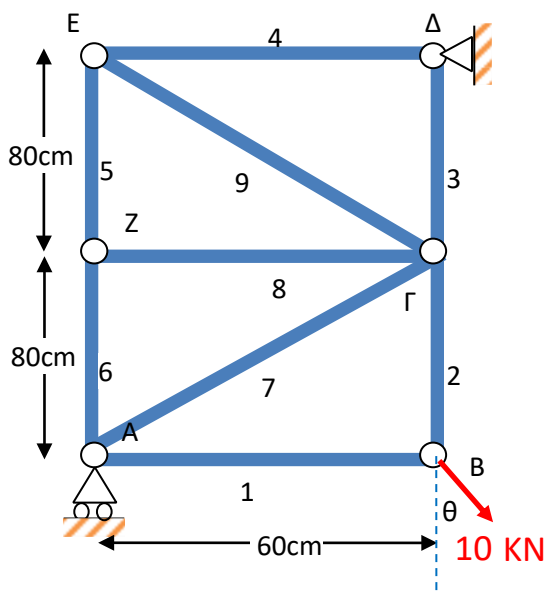
$$F = F_2 e^{\mu_s \omega} = F_2 e^{(0.3 \cdot 2.793)} \Rightarrow F = 2.311 F_2$$

(4)

Η ελάχιστη δύναμη είναι αυτή για την οποία «επíκειται» ολίσθηση του σχοινιού προς την μεριά της δύναμης F_2 . Ισχύει τότε :

$$F_2 = F e^{\mu_s \omega} = F e^{(0.3 \cdot 2.793)} \Rightarrow F = \frac{1}{2.311} F_2$$

4^ο ΘΕΜΑ (25%)



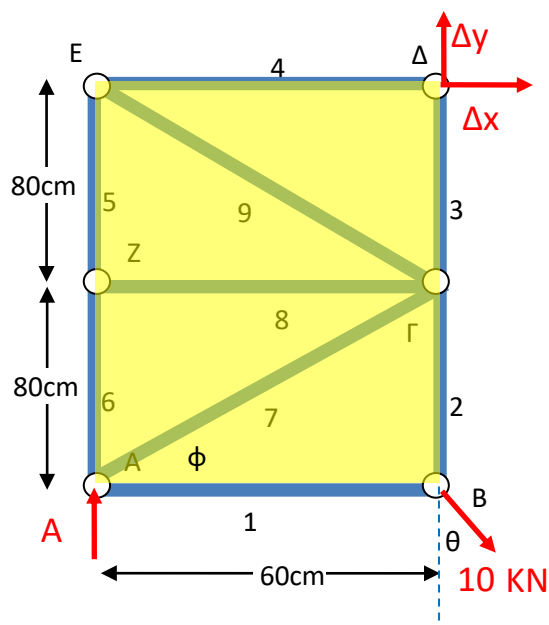
Υπολογίσετε την δύναμη στην ράβδο 7 του δικτύματος.

Γωνία θ , όπως και στο 2^ο θέμα.

ΛΥΣΗ

Για την γωνία ϕ του δικτυώματος :

$$\tan(\phi) = 80/60 \Rightarrow \phi = 53.1^\circ$$



Ένας τρόπος. Όχι ο μοναδικός

Παρατηρώ ότι ο κόμβος B μπορεί να «επιλυθεί» και άρα να υπολογισθούν οι δυνάμεις των ράβδων 1 και 2.

Μπορώ επίσης να υπολογίσω την δύναμη της κύλισης στον κόμβο A, οπότε ο τελευταίος μπορεί επίσης να «επιλυθεί» και να προκύψει η ζητούμενη δύναμη.

Ισορροπία ολοκλήρου του δικτυώματος – ΔΕΣ στο διπλανό σχήμα.

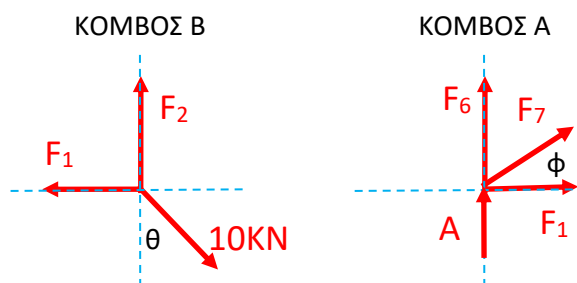
$$\begin{aligned} \Sigma M_{\Delta} = 0 &\Rightarrow -A * 60 + (10 \sin \theta) * 160 \\ &= 0 \Rightarrow A = 26.67 \sin \theta \text{ KN} \end{aligned}$$

Ισορροπία κόμβου B:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -F_1 + (10 \sin \theta) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_1 = (10 \sin \theta) \text{ KN} \end{aligned}$$

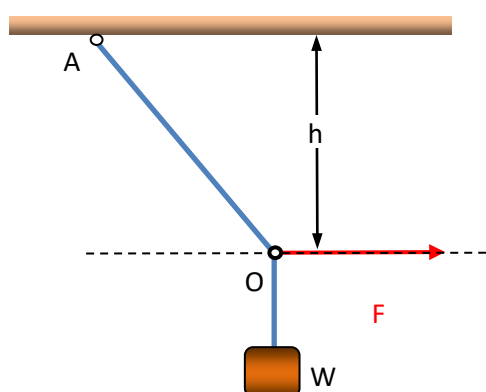
Ισορροπία κόμβου A :

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F_1 + F_7 \cos \phi = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_7 = -(16.67 \sin \theta) \text{ KN} \end{aligned}$$



Εξέταση προόδου Νοέμβριος 2021

ΘΕΜΑ 1^ο



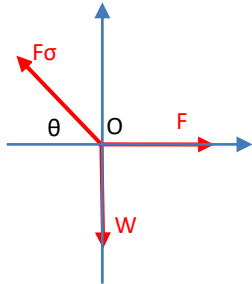
Σώμα βάρους W κρέμεται με την βοήθεια των συρματοσχοίνων AO και OW που ενώνονται με κρίκο μικρών διαστάσεων στο σημείο O . Στο ίδιο σημείο O επενεργεί επίσης η οριζόντια δύναμη F .

- Υπολογίσετε το ύψος h , αν $F = (200 + XY) \text{ Kp}$.

2. Αν κάθε συρματόσχοινο αντέχει μέχρι 1000 Κρ, υπολογίσετε το ελάχιστο h που μπορεί να επιτευχθεί και την οριζόντια δύναμη F που απαιτείται γι' αυτό.

ΛΥΣΗ

(1)



Οι δυνάμεις που συντρέχουν στο σημείο O, ισορροπούν, οπότε :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F \cos(0^\circ) + F_\sigma \cos(180^\circ - \theta) + W \cos(90^\circ) = 0 \Rightarrow$$

$$F_\sigma \cos(\theta) = F \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F \cos(90^\circ) + F_\sigma \cos(90^\circ - \theta) + W \cos(180^\circ) = 0 \Rightarrow$$

$$F_\sigma \sin(\theta) = W \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) :

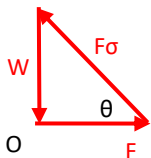
$$\tan(\theta) = \frac{W}{F} \Rightarrow \theta = \dots$$

Οπότε :

$$h = AO \sin(\theta)$$

Λύση με την βοήθεια του τριγώνου των δυνάμεων

Στο τρίγωνο των δυνάμεων που ισορροπούν :



$$\tan(\theta) = \frac{W}{F} \Rightarrow \theta = \dots$$

(2)

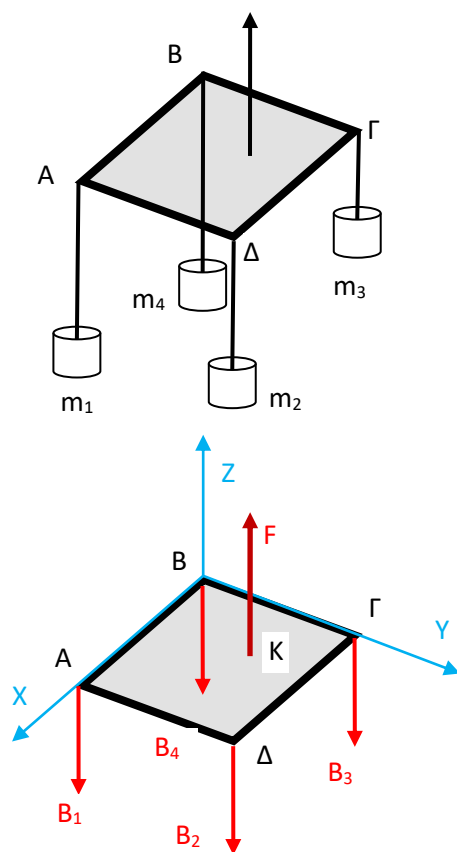
Από το τρίγωνο των δυνάμεων, είναι φανερό ότι η δύναμη F_σ του συρματοσχοίνου AO είναι η μεγαλύτερη. Το ελάχιστο h προκύπτει, όταν η δύναμη αυτή πάρει την μέγιστη τιμή της. Από το τρίγωνο των δυνάμεων, τότε :

$$\sin(\theta) = \frac{W}{F_\sigma} = \frac{400}{1000} = 0.4$$

Οπότε :

$$h_{min} = AO \sin(\theta) = 0.4(AO)$$

ΘΕΜΑ 2°



Τέσσερις μάζες είναι αναρτημένες στην αβαρή μεταλλική πλάκα ΑΒΓΔ, σχήματος τετραγώνου, πλευράς 2 μέτρων. Από ποιο σημείο της πλάκας πρέπει να την σηκώσει ένα ελικόπτερο ώστε να παραμένει οριζόντια όταν αιωρείται;

ΛΥΣΗ

Στο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα του ελεύθερου σώματος «πλάκα» όταν αυτό αιωρείται σε οριζόντια θέση κρεμασμένο από το σημείο Κ με συντεταγμένες $(X_0, Y_0, 0)$, ως προς το σύστημα συντεταγμένων που έχουμε προσαρμόσει.

Τα διανύσματα θέσης των κορυφών Α, Β, Γ και Δ είναι :

$$(2m)\vec{i} + (0)\vec{j} + (0)\vec{k}$$

$$(0)\vec{i} + (0)\vec{j} + (0)\vec{k}$$

$$(0)\vec{i} + (2m)\vec{j} + (0)\vec{k}$$

$$(2m)\vec{i} + (2m)\vec{j} + (0)\vec{k}$$

αντίστοιχα.

Για το μέτρο της δύναμης F του ελικοπτέρου, ισχύει προφανώς (εφ' όσον οι δυνάμεις ισορροπούν) :

$$F = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g = (4400 + B) \text{ Kp} \quad (B : \text{kp})$$

Για τις ροπές των πέντε δυνάμεων ως προς την αρχή των αξόνων ισχύει :

$$\vec{M}_{B_1} = (0 * B_1)\vec{i} - (2 * B_1)\vec{j} = 0\vec{i} - (-3200\text{Kp}m)\vec{j} = 0\vec{i} + (+3200\text{Kp}m)\vec{j}$$

$$\vec{M}_{B_4} = (0)\vec{i} - (0)\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$\vec{M}_{B_3} = (2 * B_3)\vec{i} - (0 * B_3)\vec{j} = (-2600 \text{ Kp}m)\vec{i} + (0)\vec{j}$$

$$\vec{M}_{B_2} = (2 * B_2)\vec{i} - (2 * B_2)\vec{j} = (-3000 \text{ Kp}m)\vec{i} + (+3000\text{Kp}m)\vec{j}$$

$$\vec{M}_F = (Y_0 F)\vec{i} - (X_0 F)\vec{j} = (Y_0(4400 + B))\vec{i} + (-X_0(4400 + B))\vec{j}$$

Εφ' όσον το σώμα ισορροπεί, ισχύει :

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow [0 + 0 + (-2600) + (-3000) + (4400+B)Y_o] \text{ Kpm} = 0 \Rightarrow$$

$$Y_o = (5600)/(4400+B) \text{ m}$$

$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow [+3200 + 0 + 0 + (3000) - (4400+B)X_o] \text{ Kpm} = 0 \Rightarrow$$

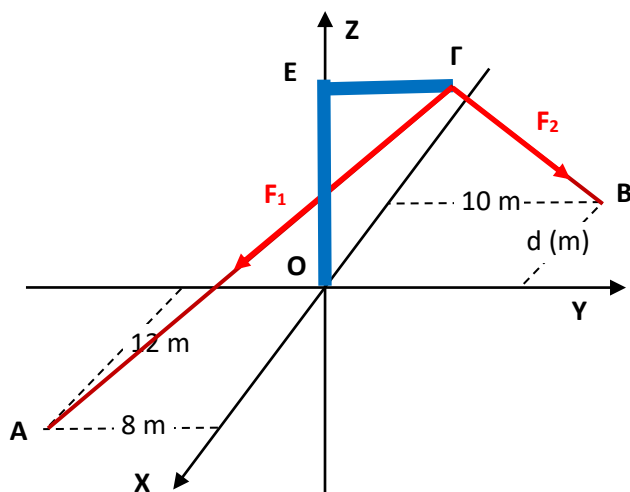
$$X_o = (6200)/(4400+B) \text{ m}$$

Το **3^ο Θέμα** είναι σχεδόν ίδιο με άσκηση που υπάρχει λυμένη στα «Έγγραφα->Μαθήματα->Πλαίσια».

Λύσεις θεμάτων εξέτασης Ιανουαρίου 2022

ΘΕΜΑ 1^ο

Τα συρματόσχοινα ΒΓ και ΑΓ, στηρίζονται στα σημεία Β και Α του επιπέδου ΧΥ αντίστοιχα και στο σημείο Γ του στύλου ΟΕΓ, στο οποίο ασκούν δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι 1000 Κρ και 500 Κρ αντίστοιχα.



του αριθμού μητρώου σας, σε m.

1. Υπολογίσετε την συνισταμένη $\vec{R}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.
2. Υπολογίσετε την ροπή $\vec{M}_\Delta$ της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς το σημείο Δ.

Δεδομένα :

- Ο στύλος είναι «μπαγμένος» στην αρχή των αξόνων, έχει ύψος ΟΕ=5 m, η οριζόντια προβολή του ΕΓ βρίσκεται στο επίπεδο ΥΖ και έχει μήκος 3m.
- Το σημείο Δ έχει συντεταγμένες (x,5,0) Όπου x το τελευταίο και d το προτελευταίο ψηφίο

ΛΥΣΗ

(1)

Ας εξετάσουμε την περίπτωση d=5, οπότε το σημείο Β είναι το (-5, 10, 0).

Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι συντεταγμένες των σημείων Α και Γ είναι αντίστοιχα :

(12, -8, 0) και (0, 3, 5) αντίστοιχα.

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι ίδια με αυτά των διανυσμάτων $\vec{GA}$ και $\vec{GB}$ αντίστοιχα.

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{GA}$ ισχύει :

$$GA^2 = (X_A - X_G)^2 + (Y_A - Y_G)^2 + (Z_A - Z_G)^2 = (12 - 0)^2 + (-8 - 3)^2 + (0 - 5)^2 \Rightarrow GA = 17.03 \text{ m}$$

$$\cos(\vartheta_{GAx}) = \frac{X_A - X_G}{GA} = \frac{12}{17.03} = 0.705$$

$$\cos(\vartheta_{GAy}) = \frac{Y_A - Y_G}{GA} = \frac{-11}{17.03} = -0.646$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma A_z}) = \frac{Z_A - Z_\Gamma}{\Gamma A} = \frac{-5}{17.03} = -0.294$$

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\overrightarrow{\Gamma B}$ ισχύει :

$$\Gamma B^2 = (X_B - X_\Gamma)^2 + (Y_B - Y_\Gamma)^2 + (Z_B - Z_\Gamma)^2 = (-5 - 0)^2 + (10 - 3)^2 + (0 - 5)^2 \Rightarrow \Gamma B = 9.95 \text{ m}$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma B_x}) = \frac{X_B - X_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{-5}{9.95} = -0.503$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma B_y}) = \frac{Y_B - Y_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{7}{9.95} = +0.704$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma B_z}) = \frac{Z_B - Z_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{-5}{9.95} = -0.503$$

Οι δυνάμεις συνεπώς των συρματοσχοίνων, ως διανύσματα είναι :

$$\overrightarrow{F_1} = 1000Kp \left(\cos(\vartheta_{\Gamma A_x})\vec{i} + \cos(\vartheta_{\Gamma A_y})\vec{j} + \cos(\vartheta_{\Gamma A_z})\vec{k} \right) = 705Kp \vec{i} - 646Kp \vec{j} - 294Kp \vec{k}$$

$$\overrightarrow{F_2} = 500Kp \left(\cos(\vartheta_{\Gamma B_x})\vec{i} + \cos(\vartheta_{\Gamma B_y})\vec{j} + \cos(\vartheta_{\Gamma B_z})\vec{k} \right) = -251Kp \vec{i} + 352Kp \vec{j} - 251Kp \vec{k}$$

Η δε συνισταμένη τους :

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = (705Kp \vec{i} - 646Kp \vec{j} - 294Kp \vec{k}) + (-251Kp \vec{i} + 352Kp \vec{j} - 251Kp \vec{k}) \Rightarrow$$

$$\vec{R} = 454Kp \vec{i} - 294Kp \vec{j} - 545Kp \vec{k} = 768 Kp(0.695 \vec{i} - 0.417 \vec{j} + 0.585 \vec{k})$$

Το μέτρο της συνισταμένης είναι $R=768 Kp$.

(2)

Η ροπή $\overrightarrow{M_\Delta}$ της δύναμης $\overrightarrow{F_1}$ ως προς το Δ, δίνεται από την ορίζουσα :

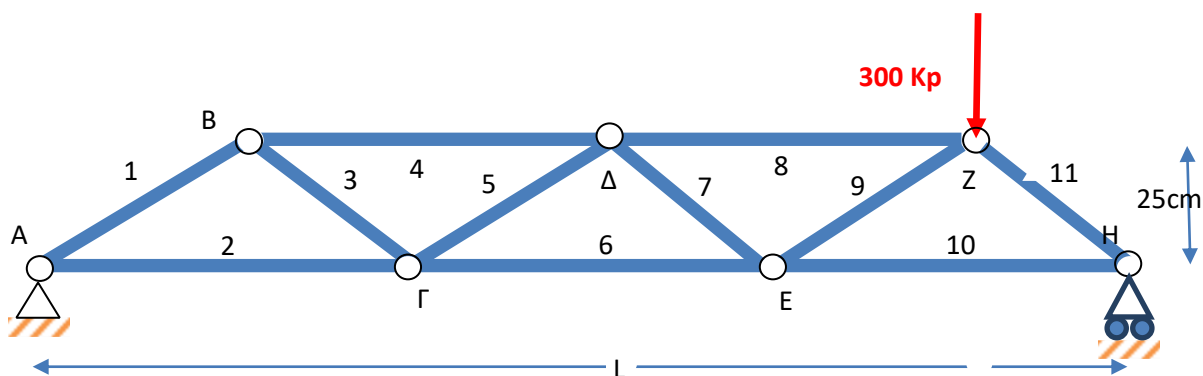
$$\overrightarrow{M_\Delta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta\Gamma_x & \Delta\Gamma_y & \Delta\Gamma_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix}$$

Όπου : $\Delta\Gamma_x, \Delta\Gamma_y, \Delta\Gamma_z$ είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Ας πάρουμε την περίπτωση $\Delta=(7,5,0)$ τότε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (-7, -2, +5)$.

$$\overrightarrow{M_\Delta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & -2 & 0 \\ 705 & -646 & -294 \end{vmatrix} = 3817Kpm \vec{i} + 1468Kpm \vec{j} +$$

$$5931Kpm \vec{k}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

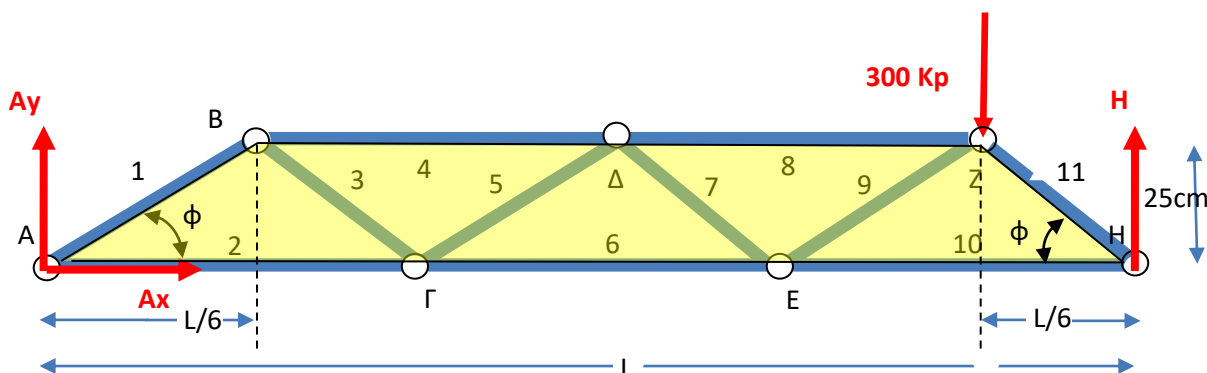


Το δικτύωμα του σχήματος είναι απολύτως συμμετρικό και έχει όλες τις οριζόντιες ράβδους ισομήκεις. Υπολογίστε τη δύναμη με την οποία καταπονείται κάθε μια από τις ράβδους 1,2,10,11.

Λύση

1. Προσδιορίζω τις αντιδράσεις στις στηρίξεις, εξετάζοντας την ισορροπία ολοκλήρου του δικτύωματος.

Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται το Δ.Ε.Σ. ολοκλήρου του δικτύωματος.



Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -300 \left(\frac{5L}{6} \right) + HL = 0 \Rightarrow H = 250 Kp$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

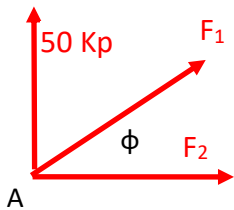
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +A_y + H - 300 = 0 \Rightarrow A_y = 50 Kp$$

2. Εξετάζω την ισορροπία των κόμβων Α και Η για να υπολογίσω τις ζητούμενες δυνάμεις.

Για την γωνία ϕ ισχύει : $\tan(\phi) = \frac{25cm}{L/6}$

Θεωρώ τις άγνωστες δυνάμεις των ράβδων εφελκυστικές.

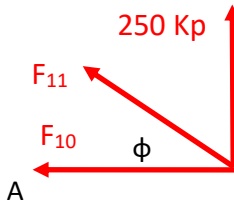
Κόμβος Α



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +50 + F_1 \cos(90^\circ - \phi) = 0 \Rightarrow F_1 = -50/\sin(\phi) \text{ (θλιπτική)}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow +F_2 + F_1 \cos(\phi) = 0 \Rightarrow F_2 = +50/\tan(\phi) \text{ (εφελκυστική)}$$

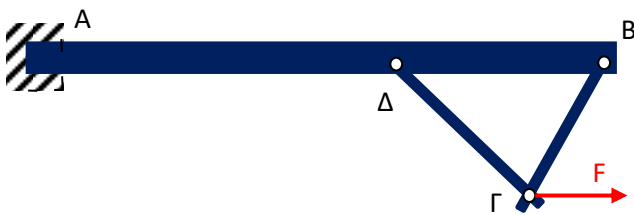
Κόμβος Η



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +250 + F_{11} \cos(90^\circ - \phi) = 0 \Rightarrow F_{11} = -250/\sin(\phi) \text{ (θλιπτική)}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow +F_{10} + F_{11} \cos(180^\circ - \phi) = 0 \Rightarrow F_{10} = +250/\tan(\phi) \text{ (εφελκυστική)}$$

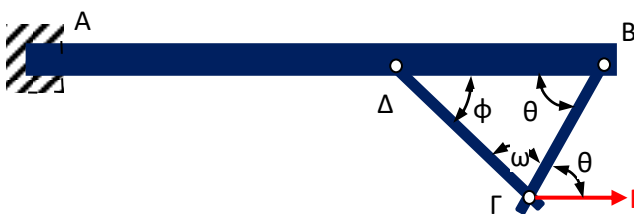
ΘΕΜΑ 3^ο



Η κατασκευή του σχήματος αποτελείται από την δοκό AB που είναι πακτωμένη στη θέση A και τα μέλη ΔΓ και ΒΓ που είναι στηριγμένα με αρθρώσεις, τόσο στην δοκό όσο και μεταξύ τους. Φορτίζεται επίσης με δύναμη $F = 1000 \text{ Kp}$ παράλληλη στην δοκό. Σχεδιάστε και υπολογίστε τις εξωτερικές δυνάμεις σε όλα τα μέλη της κατασκευής.

Δίδονται : $AD = 2 \text{ m}$, $\Delta B = 3 \text{ m}$, $\Delta \Gamma = 2 \text{ m}$, $B\Gamma = (100 + XY) \text{ cm}$, όπου XY : Ο αριθμός που σχηματίζουν τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας.

Λύση



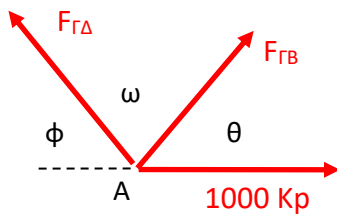
Επιλύω το τρίγωνο ΒΓΔ για να προσδιορίσω τις γωνίες του που με ενδιαφέρουν :

Νόμος των συνημιτονων για τον υπολογισμό της γωνίας θ :

$$\Delta \Gamma^2 = B\Delta^2 + B\Gamma^2 - 2B\Delta B\Gamma \cos(\theta) = \cos(\theta) = \dots \theta = \dots$$

Παρομοίως, υπολογίζω και την γωνία ω , οπότε προκύπτει και η ϕ .

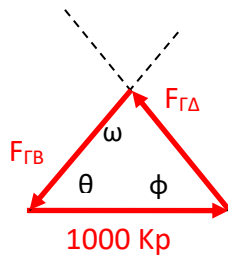
Παρατηρώ ότι τα μέλη ΔΓ και ΒΓ συμπεριφέρονται ως ράβδοι, αφού δέχονται δυνάμεις μόνο από τα σημεία στα οποία είναι αρθρωμένα. Εξετάζω συνεπώς την ισορροπία της άρθρωσης – κόμβου Γ. Θεωρώ τις δυνάμεις των ράβδων εφελκυστικές :



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow +1000 + F_{GB} \cos(\theta) + F_{G\Delta} \cos(\theta + \omega) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{GB} \cos(90^\circ - \theta) + F_{G\Delta} \cos(90^\circ - \phi) = 0 \quad (2)$$

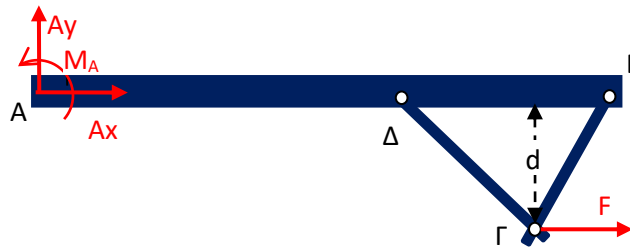
Οι δυνάμεις θα προκύψουν από την επίλυση του παραπάνω συστήματος.



Εναλλακτικά μπορεί κανείς να σχηματίσει το τρίγωνο των τριών δυνάμεων που ισορροπούν - σχήμα. Προκύπτει τότε άμεσα η φορά των δυνάμεων : Η F_{GB} είναι θλιπτική ενώ η $F_{G\Delta}$ εφελκυστική. Τα μέτρα τους προκύπτουν επίσης εύκολα από τον νόμο των ημιτόνων :

$$\frac{1000}{\sin(\omega)} = \frac{|F_{G\Delta}|}{\sin(\theta)} = \frac{|F_{GB}|}{\sin(\phi)}$$

Για να υπολογίσω τις δυνάμεις και την ροπή στην πάκτωση της κατασκευής, θα εξετάσω την ισορροπία όλης της κατασκευής.



Εξισώσεις ισορροπίας :

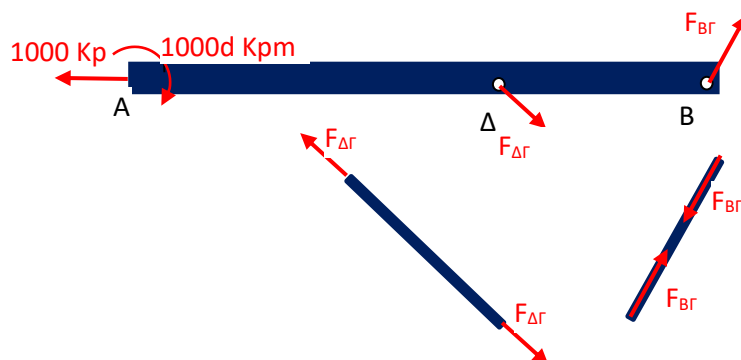
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1000d = 0$$

$$\Rightarrow M_A = -(1000d) Kpm$$

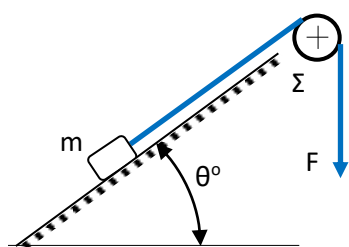
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = -1000 Kp$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0 Kp$$

Μετά τα παραπάνω, η εικόνα των δυνάμεων για κάθε μέλος της κατασκευής, είναι αυτή που ακολουθεί.



ΘΕΜΑ 4^ο



Σώμα μάζας $m=200 \text{ kg}$ συγκρατείται στο κεκλιμένο επίπεδο κλίσης θ° με την βοήθεια της τριβής και της δύναμης που επενεργεί σ' αυτό από το συρματόσχοινο. Το τελευταίο τυλίγεται γύρω από το ακίνητο κυλινδρικό σώμα Σ και είναι κατακόρυφο στο άλλο του μέρος.

Ποια είναι η ελάχιστη δύναμη F (ας την ονομάσουμε F_1) για την οποία το σώμα συγκρατείται να μην ολισθήσει προς τα κάτω.

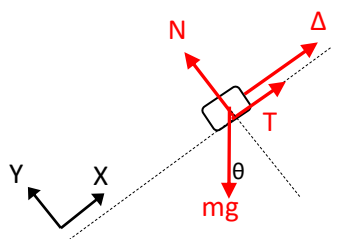
Ποια είναι η ελάχιστη δύναμη F (ας την ονομάσουμε F_2) για την οποία το σώμα αρχίζει να κινείται προς τα πάνω.

Βρείτε τις παραπάνω δυνάμεις για δύο περιπτώσεις :

- Όταν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ σχοινιού και του Σ
- Όταν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σχοινιού και Σ είναι 0.5

Συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου : $\mu_s = 0.2$

ΛΥΣΗ



Εξετάζουμε την ισορροπία του σώματος την στιγμή που επίκειται κίνησή του προς τα κάτω. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

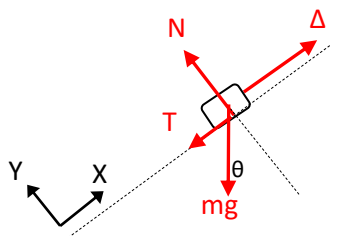
Για την δύναμη της τριβής ισχύει :

$$T = \mu_s N$$

Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos(\theta)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Delta_1 + \mu_s N - mg \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 = mg [\sin(\theta) - \mu_s \cos(\theta)]$$

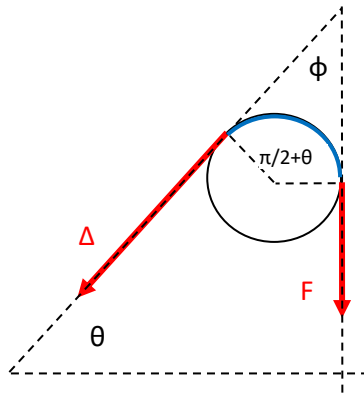


Όταν «επίκειται» κίνηση προς τα πάνω, οι δυνάμεις που επενεργούν στο σώμα είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα. Για την δύναμη της τριβής ισχύει η ίδια ως άνω σχέση.

Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos(\theta)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Delta_2 - \mu_s N - mg \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2 = mg [\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)]$$



Η δύναμη Δ επενεργεί στο σώμα με την βοήθεια του συρματοσχοίνου. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις στο συρματοσχοίνο στις δύο μεριές του κυλινδρικού σώματος Σ .

Η γωνία τύλιξης είναι $\pi - \phi = \pi - (\pi/2 - \theta) = \pi/2 + \theta$. Γιατί;

1. Αν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ συρματοσχοίνου και Σ τότε $\Delta = F$.
2. Αν υπάρχει τριβή τότε :

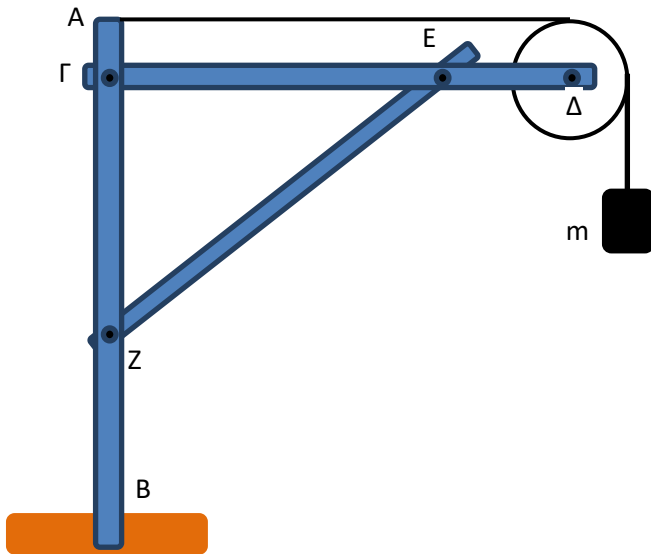
$$\Delta_1 = F_1 e^{0.2(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

Και

$$F_2 = \Delta_2 e^{0.2(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

Λύσεις θεμάτων Ιανουαρίου 2023

1^ο ΘΕΜΑ

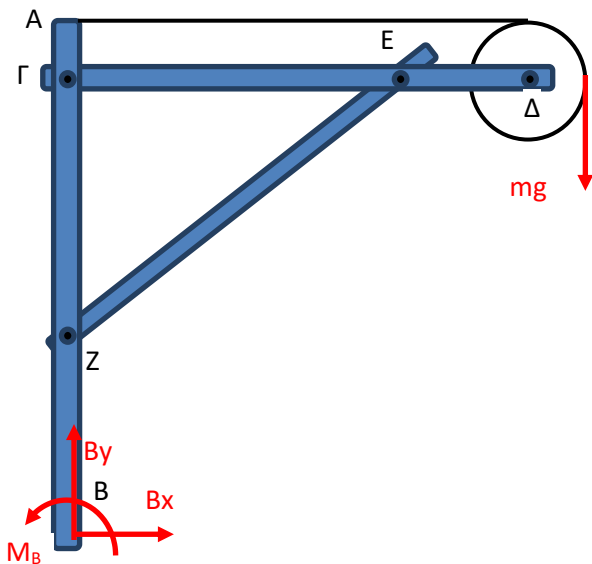


Η στερεά κατασκευή του σχήματος, αποτελείται από τα μέλη AB, ΓΔ και EZ συνδεδεμένα με αρθρώσεις. Το μέλος AB είναι κατακόρυφο και πακτωμένο στο έδαφος, το δε μέλος ΓΔ είναι οριζόντιο. Μάζα m αναρτάται από συρματοσχοίνο που αφού περάσει από την τροχαλία, ακτίνας r , συνδέεται στην θέση A. Η τροχαλία είναι αρθρωμένη στο Δ και μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές.

1. Θεωρήσετε ως ελεύθερο σώμα «όλη την κατασκευή εκτός της μάζας», κάνετε το Δ.Ε.Σ. και υπολογίσετε την δύναμη και τη ροπή που η πάκτωση εξασκεί στην κατασκευή.
2. Θεωρήσετε ως ελεύθερο σώμα την τροχαλία υπολογίστε τις δυνάμεις που ασκούνται στις θέσεις Δ και A.
3. Σχεδιάστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για όλα τα μέλη της κατασκευής και υπολογίστε τις δυνάμεις που δέχεται το μέλος ΓΔ.

Δίδονται : $m=1000 \text{ Kgr}$, $AB=3\text{m}$, $AZ=2\text{m}$, $A\Gamma=r=0.1\text{m}$, $\Gamma\Delta=2.5\text{m}$, $\Gamma E = (0.5+0.1 \cdot T)$, όπου T: το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

Λύση



1. Το Δ.Ε.Σ. όλης της κατασκευής φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Συνθήκες ισορροπίας

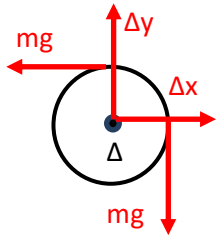
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y - mg = 0 \Rightarrow B_y = mg$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_B - (mg)(\Gamma\Delta + r) = 0 \Rightarrow M_B = (mg)(\Gamma\Delta + r)$$

2. Το Δ.Ε.Σ. «τροχαλία», φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

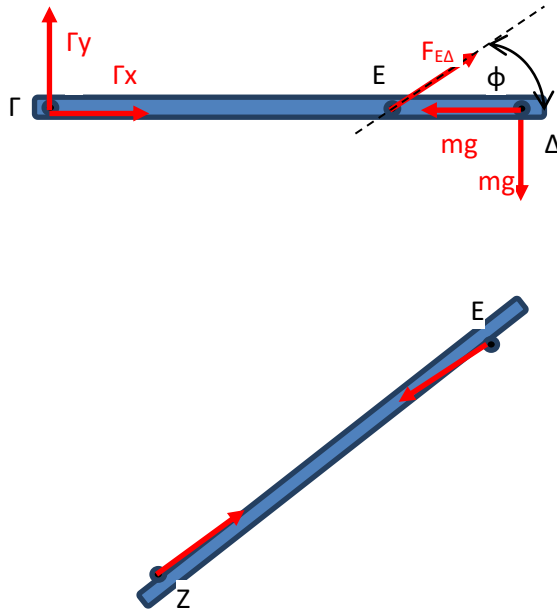
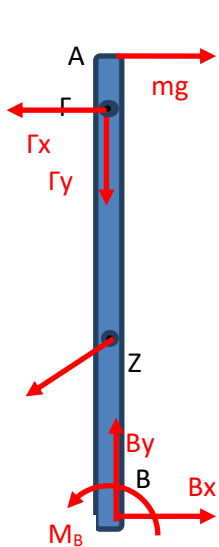
Η δύναμη από το συρματόσχοινο είναι ίδια σε όλο το μήκος του, αφού θεωρούμε αμελητέες τις τριβές.



Συνθήκες ισορροπίας

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Delta_x - mg = 0 \Rightarrow \Delta_x = mg$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \Delta_y - mg = 0 \Rightarrow \Delta_y = mg$$



3. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα Δ.Ε.Σ. για όλα τα μέλη της κατασκευής. Το μέλος ΖΕ φορτίζεται σε δύο μόνο σημεία, άρα συμπεριφέρεται ως ράβδος. Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις δυνάμεις στο μέλος ΓΕΔ.

$$\tan \varphi = \frac{\Gamma Z}{\Gamma E} \Rightarrow \varphi = \dots$$

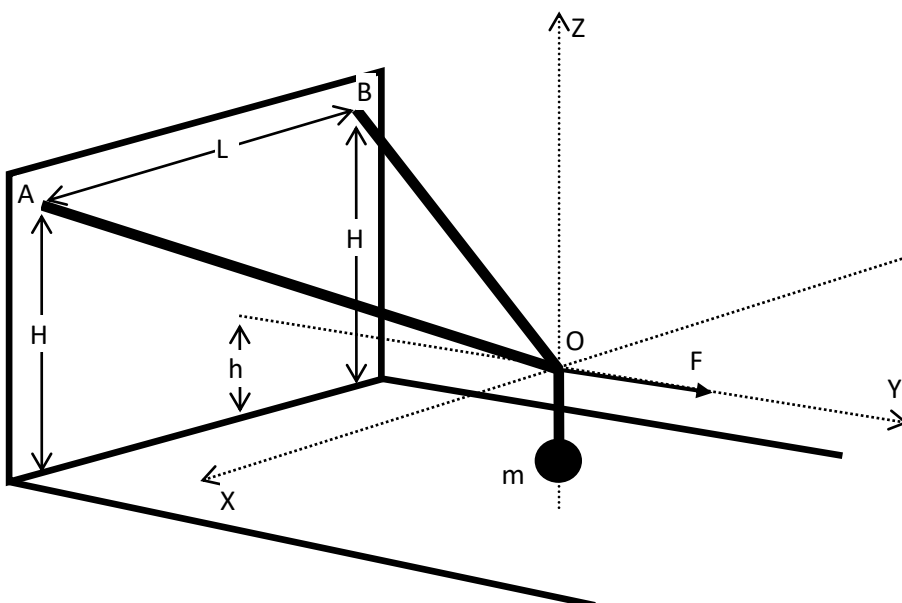
Συνθήκες ισορροπίας μέλους ΓΕΔ :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Gamma_x + F_{E\Delta} \cos \varphi - mg = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \Gamma_y + F_{E\Delta} \sin \varphi - mg = 0$$

$$\Sigma M_{\Gamma} = 0 \Rightarrow (F_{E\Delta} \sin \varphi) \Gamma E - (mg) \Gamma \Delta = 0$$

Οι τρεις παραπάνω εξισώσεις μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τις τρεις άγνωστες δυνάμεις του μέλους ΓΕΔ.



2ο ΘΕΜΑ

Μάζα m αναρτάται στα συρματόσχοινα ΑΟ και ΒΟ που είναι πιασμένα σε κατακόρυφο τοίχο και σε ύψος H . Πόση δύναμη F , κάθετη στο επίπεδο του τοίχου πρέπει να εξασκηθεί, ώστε το σημείο Ο να ανέβει σε ύψος h ;

Δίδονται : $AO=OB=5m$, $L=6m$, $H=3m$, $h=1m$, $m=200 \text{ kg}$

ΛΥΣΗ

Οι συντεταγμένες των σημείων A,B ως προς το σύστημα XYZ είναι :

$$A : (L/2, Y_A, (H-h))$$

$$B : (-L/2, Y_A, (H-h))$$

Θα υπολογίσουμε το άγνωστο Y_A με την βοήθεια του μήκους των συρματοσχοίων, που δίδεται :

$$AO^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + Y_A^2 + (H-h)^2$$

$$\dots \Rightarrow Y_A = -2\sqrt{3}$$

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης

του $\vec{OA}$, και άρα της δύναμης $\vec{F}_{OA}$, είναι :

$$\cos(\vartheta_{OA_x}) = \frac{L/2}{OA} = \frac{3}{5}$$

$$\cos(\vartheta_{OA_Y}) = \frac{-2\sqrt{3}}{5}$$

$$\cos(\vartheta_{OA_Z}) = \frac{3-1}{OA} = \frac{2}{5}$$

Αντίστοιχα, τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{OB}$, και άρα της δύναμης $\vec{F}_{OB}$, είναι :

$$\cos(\vartheta_{OB_x}) = \frac{-L/2}{OA} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos(\vartheta_{OB_Y}) = \frac{-2\sqrt{3}}{5}$$

$$\cos(\vartheta_{OB_Z}) = \frac{3-1}{OA} = \frac{2}{5}$$

Συνθήκες ισορροπίας του σημείου O :

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \Rightarrow$$

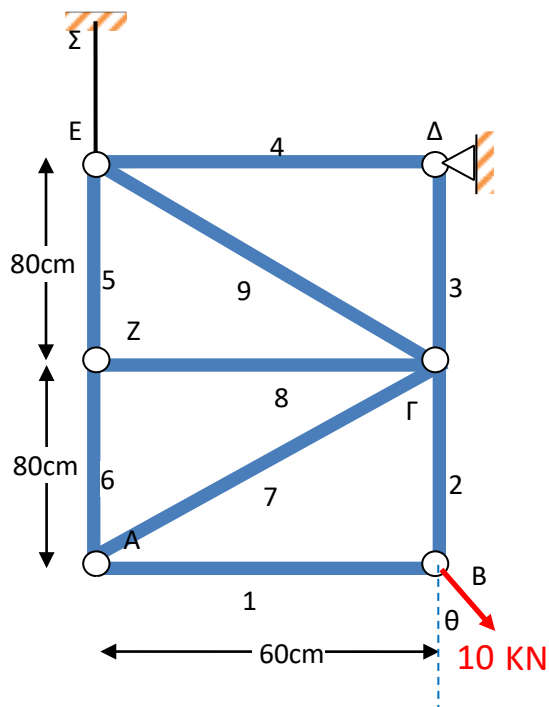
$$F_{OA} \cos(\vartheta_{OA_x}) + F_{OB} \cos(\vartheta_{OB_x}) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow F_{OA} = F_{OB} \quad (1)$$

$$F_{OA} \cos(\vartheta_{OA_Y}) + F_{OB} \cos(\vartheta_{OB_Y}) + F = 0 \quad (2)$$

$$F_{OA} \cos(\vartheta_{OA_Z}) + F_{OB} \cos(\vartheta_{OB_Z}) - mg = 0 \quad (3)$$

Οι άγνωστες δυνάμεις F_{OA} , F_{OB} και F προκύπτουν από την λύση του παραπάνω συστήματος των 3 εξισώσεων :

$$F_{OA} = F_{OB} = 2500 \text{ N} \quad \text{και} \quad F = 3464 \text{ N}$$



ΘΕΜΑ 3^ο

Για το «απλό» δικτύωμα του σχήματος που στηρίζεται με άρθρωση στον κόμβο Δ και με συρματοσχοίνο στον κόμβο Ε :

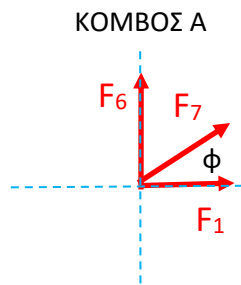
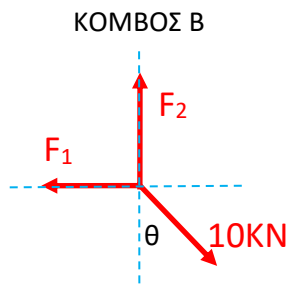
1. Γράψετε μια μεθοδολογία (Βήμα 1^ο, Βήμα 2^ο,) για την εύρεση των δυνάμεων όλων των ράβδων.
2. Υπολογίσετε τις δυνάμεις των ράβδων 8,9.

Τη γωνία ϑ (σε μοίρες) θα βρείτε ως εξής : Έστω $ΥΥ$

τα δύο τελευταία ψηφία του Αριθμού Μητρώου σας, τότε : $\vartheta = 20 + ΥΥ/2$

ΛΥΣΗ

Ένας τρόπος για να υπολογισθούν οι ζητούμενες δυνάμεις είναι ο παρακάτω :



Ισορροπία κόμβου Β:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1 + (10 \sin \theta) = 0 \Rightarrow$$

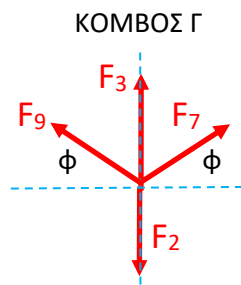
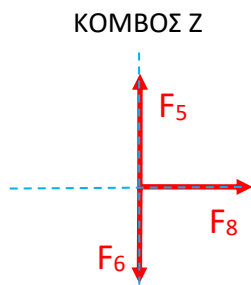
$$\Rightarrow F_1 = (10 \sin \theta) \text{ KN}$$

Ισορροπία κόμβου Α :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 + F_7 \cos \phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_7 = -(16.67 \sin \theta) \text{ KN (θλιπτική)}$$

(για την γωνία ϕ ισχύει : $\tan \phi = GB/AB \Rightarrow \phi = 53.1^\circ$ και $\cos \phi = 0.6$)



Προχωρούμε στην συνέχεια, πρώτα στον κόμβο Ζ και μετά στον Γ :

Ισορροπία κόμβου Ζ:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_8 = 0$$

Ισορροπία κόμβου Γ :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_9 \cos \phi + F_7 \cos \phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_9 = +(16.67 \sin \theta) \text{ KN (εφελκυστική)}$$

Παρατηρείστε ότι, με προσεκτική επιλογή των βημάτων, χρειάστηκε να γραφούν μόνο 4 πολύ απλές εξισώσεις για τον υπολογισμό των δυνάμεων που ζητούνται.

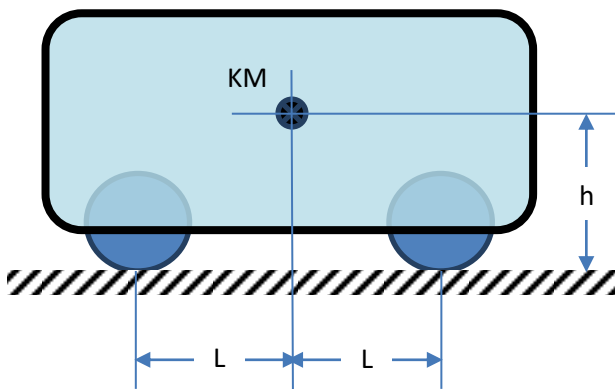
Φυσικά, αυτός δεν είναι ο μόνος τρόπος να υπολογισθούν οι δυνάμεις. Θα μπορούσε κανείς να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα :

1° : Υπολογίζω τις αντιδράσεις στις στηρίξεις, θεωρώντας όλο το δικτύωμα ως ενιαία στερεά κατασκευή.

2° : Επιλύω διαδοχικά τους κόμβους Δ -> Ε -> Ζ.

ΘΕΜΑ 4°

Δίτροχο όχημα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σχήματος και με μοναδικό κινητήριο τον πίσω τροχό, κινείται σε οριζόντιο δρόμο.



αυτόν.

1. Υπολογίστε την επιτάχυνση a για την οποία ο μπροστινός τροχός αρχίζει να αποκολλάται από το οδόστρωμα.
2. Πόσος είναι ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής για να μπορέσει να συμβεί το προηγούμενο;
3. Σχεδιάστε το Δ.Ε.Σ. του πίσω τροχού όταν συμβαίνει η αποκόλληση. Υπολογίστε τόσο την ροπή όσο και τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται σ'

Απαντήσεις

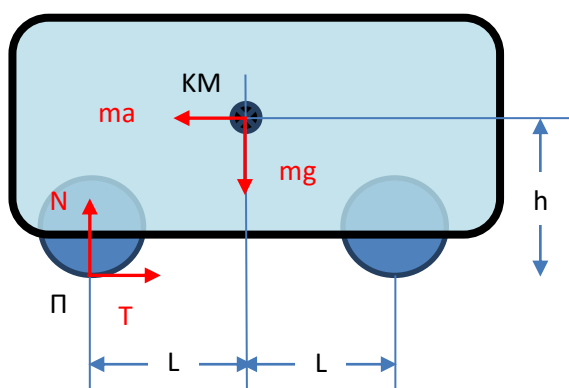
1. Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. ολοκλήρου του οχήματος και τοποθετούμε τις δυνάμεις την στιγμή που αρχίζει η αποκόλληση του μπροστινού τροχού (σχήμα). Συνθήκες ισορροπίας :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = ma \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \quad (2)$$

$$\Sigma M_{\Pi} = 0 \Rightarrow (ma)h - (mg)L = 0 \Rightarrow$$

$$a = \left(\frac{L}{h}\right)g$$



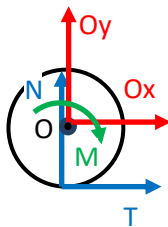
2. Η τριβή που απαιτείται για να επιτευχθεί η παραπάνω επιτάχυνση, δίδεται από την σχέση (1) :

$$T = ma = \left(\frac{L}{h}\right) mg$$

Ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής που απαιτείται για να υπάρξει η παραπάνω τιμή της τριβής, είναι αυτός για τον οποίο για να επιτευχθεί, επίκειται ολίσθηση. Τότε ισχύει ο νόμος της τριβής :

$$T = \mu_s N \Rightarrow \mu_s = \frac{T}{N} = \frac{\left(\frac{L}{h}\right) mg}{mg} \Rightarrow \mu_s = \frac{L}{h}$$

3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το Δ.Ε.Σ. του πίσω τροχού. Συνθήκες ισορροπίας:



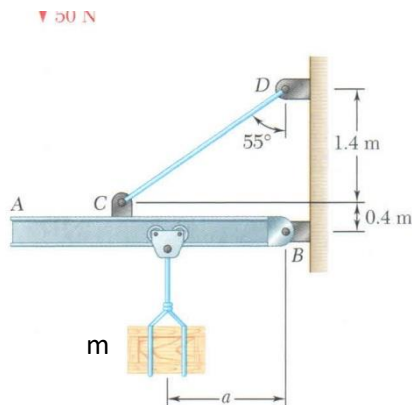
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \mathbf{O}_x = -T = -\mathbf{ma}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \mathbf{O}_y = -N = -\mathbf{mg}$$

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow Tr - M = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = \left(\frac{Lr}{h}\right) \mathbf{mg}$$

Λύσεις θεμάτων εξέτασης προόδου - Νοέμβριος 2024

ΘΕΜΑ 1ο

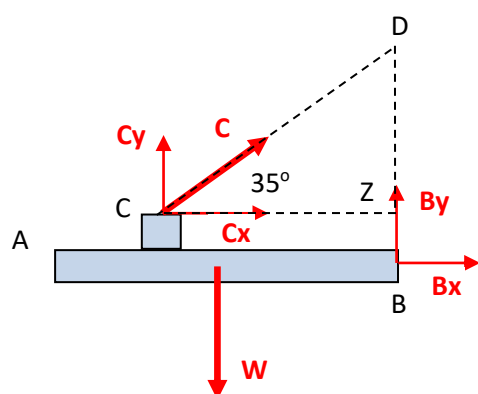


Φορτίο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει κατά μήκος της «γλίστρας» AB. Η τελευταία συγκρατείται σε οριζόντια θέση με την βοήθεια της άρθρωσης B και του συρματοσχοίνου CD. Αν το συρματοσχοίνο αντέχει 2000 Kp, βρείτε την μέγιστη επιτρεπτή απομάκρυνση a .

Πόση είναι τότε η δύναμη στην άρθρωση;

Πως αλλιώς θα μπορούσε να στηριχθεί η γλίστρα, μόνο στον τοίχο, ισοστατικά; Βρείτε για την περίπτωση αυτή και για την μέγιστη απομάκρυνση τα «εντατικά» μεγέθη της στήριξης.

ΛΥΣΗ



Εξετάζουμε την ισορροπία του σώματος ACB, στην οριακή κατάσταση που το συρματοσχοίνο «φορτίζεται» με δύναμη $C = 2000$ Kp. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα του ελεύθερου αυτού σώματος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ZΔC έχω :

$$\epsilon\phi(35^\circ) = DZ/CZ = H/CZ \Rightarrow CZ = H/\epsilon\phi(35^\circ) \Rightarrow \mathbf{CZ = 1.428 \text{ H}}$$

Ας πάρουμε και την περίπτωση που $m=1500$ Kg και $H = 100$ cm. Τότε, για το βάρος W ισχύει :

$$W = mg = 1500 \cdot 10 = \mathbf{15000 \text{ N} = 1500 \text{ Kp.}} \quad (g = 10 \text{ m/s}^2)$$

Συνθήκες ισορροπίας του σώματος :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x + B_x = 0 \Rightarrow B_x = -2000 \cos(35^\circ) \Rightarrow$$

$$\mathbf{B_x = -1638 \text{ Kp}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y - W + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 1500 - 2000 \sin(35^\circ) \Rightarrow$$

$$\mathbf{B_y = 353 \text{ Kp}}$$

$$\text{Οπότε, το μέτρο της δύναμης στην άρθρωση είναι : } B = \sqrt{(-1638)^2 + (353)^2} \Rightarrow \mathbf{B = 1676 \text{ Kp}}$$

Το διάνυσμα της δύναμης βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο, το δε συνημίτονο κατεύθυνσης με τον άξονα των X είναι :

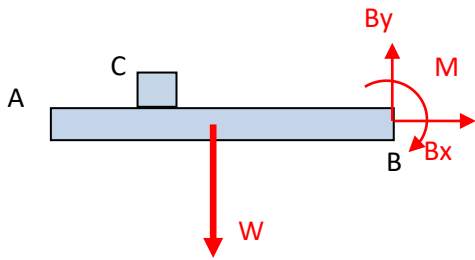
$$\cos(\theta_x) = B_x/B = -0.977$$

οπότε η δύναμη σχηματίζει γωνία 167.8° με τον θετικό ημιάξονα των X .

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow C_y \cdot CZ + C_x \cdot 0.4 - W \cdot a = 0 \Rightarrow 2000 \sin(35^\circ) \cdot (1.428 \cdot 1.0) + 2000 \cos(35^\circ) \cdot 0.4 - 1500 a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{a = 1.529 \text{ m}}$$

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να στηριχθεί η γλίστρα ισοστατικά, όμως αν θέλουμε να στηρίζεται μόνο στον τοίχο, πρέπει να πακτωθεί στην θέση B.



$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M - W \cdot a = 0 \Rightarrow$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ισορροπίας, υπολογίζουμε την δύναμη και την ροπή της πάκτωσης – τα εντατικά μεγέθη της στήριξης δηλαδή :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

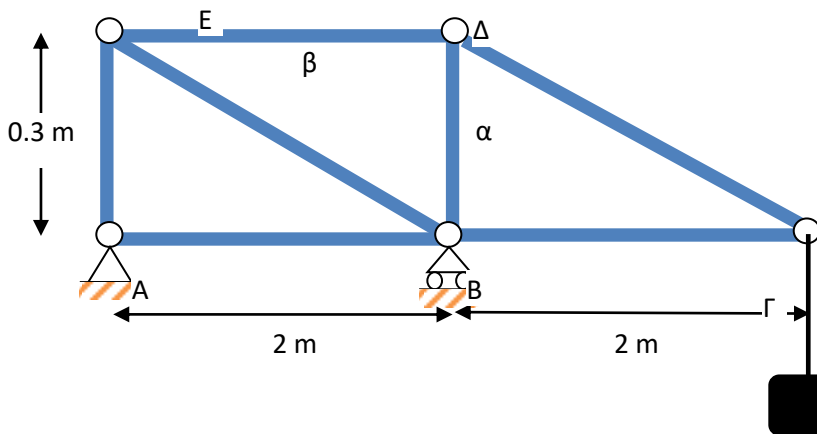
$$B_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -W + B_y = 0 \Rightarrow$$

$$B_y = 1500 \text{ Kp}$$

$$M = 2294 \text{ Kpm}$$

ΘΕΜΑ 2^ο



Είναι το δικτύωμα του σχήματος, στο οποίο έχει αναρτηθεί η μάζα m , με την συγκεκριμένη στήριξη, ισοστατικό; Δικαιολογήστε.

Υπολογίστε τις δυνάμεις (σε N) στις ράβδους α και β .

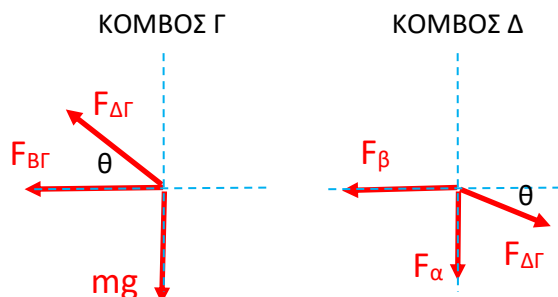
Τι θα συμβεί αν αφαιρεθεί η ράβδος EB;

Τι θα συμβεί αν προστεθεί μια ράβδος στο αρχικό δικτύωμα – η ΑΔ.

ΛΥΣΗ

1. Το δικτύωμα είναι ισοστατικό, διότι είναι «απλό» : Δηλαδή μπορεί κανείς να το φαντασθεί ότι δημιουργείται από το τρίγωνο ABE, στο οποίο έχουν προστεθεί οι ράβδοι β και α και στην συνέχεια οι ράβδοι ΔΓ και ΒΓ. Στηρίζεται επίσης ισοστατικά – μια άρθρωση και μια κύλιση.
2. Αν αφαιρεθεί μια οποιαδήποτε ράβδος, το δικτύωμα παύει να είναι «στερεά» κατασκευή. Είναι πλέον μηχανισμός.
3. Αν προστεθεί μια ράβδος, το δικτύωμα γίνεται υπερστατικό.

Υπολογισμός δυνάμεων



Μπορεί κανείς ασφαλώς να γράψει τις $2 \times 5 = 10$ εξισώσεις ισορροπίας των 5 κόμβων και να υπολογίσει τις 7 δυνάμεις των ράβδων + τις τρεις δυνάμεις των στηρίξεων.

Αν ζητά ειδικά της δυνάμεις των ράβδων α και β , μπορεί να κάνει κάτι απλούστερο : Να επιλύσει τον κόμβο Γ και στην συνέχεια να προχωρήσει στον κόμβο Δ.

$$\theta = \arctan(\Delta B / B\Gamma) \Rightarrow \dots$$

$$\theta = 8.53^\circ$$

Ισορροπία κόμβου Γ.

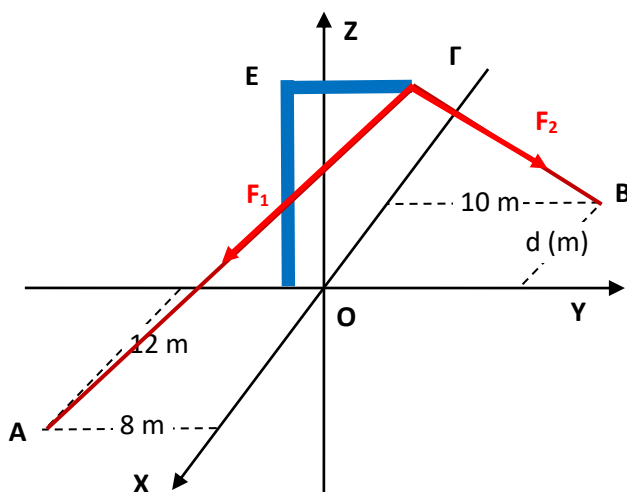
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\Delta\Gamma} \cos(90^\circ - \theta) + mg \cos(180^\circ) = 0 \Rightarrow F_{\Delta\Gamma} = (mg / \sin\theta) \text{ N}$$

Ισορροπία κόμβου Δ :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_\beta \cos(180^\circ) + F_{\Delta\Gamma} \cos\theta = 0 \Rightarrow F_\beta = +(mg / \tan\theta) \text{ N (εφελκυστική)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_a \cos(180^\circ) + F_{\Delta\Gamma} \cos(90^\circ + \theta) = 0 \Rightarrow F_a = -(mg) \text{ N (θλιπτική)}$$

ΘΕΜΑ 3^ο



Τα συρματόσχοινα ΒΓ και ΑΓ, στηρίζονται στα σημεία Β και Α του επιπέδου ΧΥ αντίστοιχα και στο σημείο Γ του στύλου ΟΕΓ, στο οποίο ασκούν δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι 1000 Κρ και 500 Κρ αντίστοιχα.

- Υπολογίστε την συνισταμένη $\vec{R}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Περνά ό φορέας της εν λόγω συνισταμένης από το σημείο Ο;
- Υπολογίστε την ροπή $\vec{M}_\Delta$ της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς το σημείο Δ με συντεταγμένες (x,5,0).

Δεδομένα :

- Ο στύλος είναι «μπαγμένος» στο σημείο (0,-1m,0), έχει ύψος ΟΕ=5 m, η οριζόντια προβολή του ΕΓ βρίσκεται στο επίπεδο ΥΖ και έχει μήκος 3m.

x : το τελευταίο και d : το προτελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, σε m.

ΛΥΣΗ

(1)

Ας εξετάσουμε την περίπτωση d=5, οπότε το σημείο Β είναι το (-5, 10, 0).

Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι συντεταγμένες των σημείων Α και Γ είναι αντίστοιχα :

(12, -8, 0) και (0, 2, 5) αντίστοιχα.

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι ίδια με αυτά των διανυσμάτων $\vec{\Gamma A}$ και $\vec{\Gamma B}$ αντίστοιχα.

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{\Gamma A}$ ισχύει :

$$\Gamma A^2 = (X_A - X_\Gamma)^2 + (Y_A - Y_\Gamma)^2 + (Z_A - Z_\Gamma)^2 = (12 - 0)^2 + (-8 - 2)^2 + (0 - 5)^2 \Rightarrow \Gamma A = \mathbf{16.04\ m}$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Ax}) = \frac{X_A - X_\Gamma}{\Gamma A} = \frac{12}{16.04} = 0.732$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Ay}) = \frac{Y_A - Y_\Gamma}{\Gamma A} = \frac{-10}{16.04} = -0.610$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Az}) = \frac{Z_A - Z_\Gamma}{\Gamma A} = \frac{-5}{16.04} = -0.305$$

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{\Gamma B}$ ισχύει :

$$\Gamma B^2 = (X_B - X_\Gamma)^2 + (Y_B - Y_\Gamma)^2 + (Z_B - Z_\Gamma)^2 = (-5 - 0)^2 + (10 - 2)^2 + (0 - 5)^2 \Rightarrow \Gamma B = \mathbf{10.68\ m}$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Bx}) = \frac{X_B - X_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{-5}{10.68} = -0.468$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma By}) = \frac{Y_B - Y_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{8}{10.68} = +0.749$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Bz}) = \frac{Z_B - Z_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{-5}{10.68} = -0.468$$

Οι δυνάμεις συνεπώς των συρματοσχοίνων, ως διανύσματα είναι :

$$\vec{F}_1 = 1000Kp \left(\cos(\vartheta_{\Gamma Ax})\vec{i} + \cos(\vartheta_{\Gamma Ay})\vec{j} + \cos(\vartheta_{\Gamma Az})\vec{k} \right) = 732Kp\vec{i} - 610Kp\vec{j} - 305Kp\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = 500Kp \left(\cos(\vartheta_{\Gamma Bx})\vec{i} + \cos(\vartheta_{\Gamma By})\vec{j} + \cos(\vartheta_{\Gamma Bz})\vec{k} \right) = -234Kp\vec{i} + 375Kp\vec{j} - 234Kp\vec{k}$$

Η δε συνισταμένη τους :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (731Kp\vec{i} - 610Kp\vec{j} - 305Kp\vec{k}) + (-234Kp\vec{i} + 375Kp\vec{j} - 234Kp\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\vec{R} = \mathbf{498Kp\vec{i} - 235Kp\vec{j} - 539Kp\vec{k} = 770\ Kp(0.646\vec{i} - 0.305\vec{j} - 0.700\vec{k})}$$

Το μέτρο της συνισταμένης είναι $\mathbf{R=770\ Kp}$.

Για να διέρχεται ο φορέας της συνισταμένη από το O, θα πρέπει τα συνημίτονα κατεύθυνσής της, δηλαδή η τριάδα $(\mathbf{0.646, -0.305, -0.700})$, να είναι ίδια με τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\Gamma O}$. Αναλυτική γεωμετρία.

Ένας άλλος τρόπος να το δει κανείς είναι ο «γεωμετρικός» : Η συνισταμένη βρίσκεται στο επίπεδο (ΑΓΒ). Αναγκαία (όχι ικανή!) συνθήκη για να περνά ο φορέας της από το O, είναι η τομή του εν

λόγω επιπέδου με το επίπεδο XY, δηλαδή η ευθεία AB, να περνά από το O. Διαπιστώστε με απλή επίπεδη γεωμετρία, ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει!

(2)

Η ροπή $\vec{M}_\Delta$ της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς το Δ, δίνεται από την ορίζουσα :

$$\vec{M}_\Delta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta\Gamma_x & \Delta\Gamma_y & \Delta\Gamma_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix}$$

Όπου : $\Delta\Gamma_x, \Delta\Gamma_y, \Delta\Gamma_z$ είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{\Delta\Gamma}$. Ας πάρουμε την περίπτωση $\Delta=(7,5,0)$ τότε $\vec{\Delta\Gamma} = (-7, -3, +5)$.

$$\vec{M}_\Delta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & -3 & +5 \\ 732 & -610 & -305 \end{vmatrix} = \mathbf{3965Kpm \vec{i} + 1525Kpm \vec{j} + 6466Kpm \vec{k}}$$