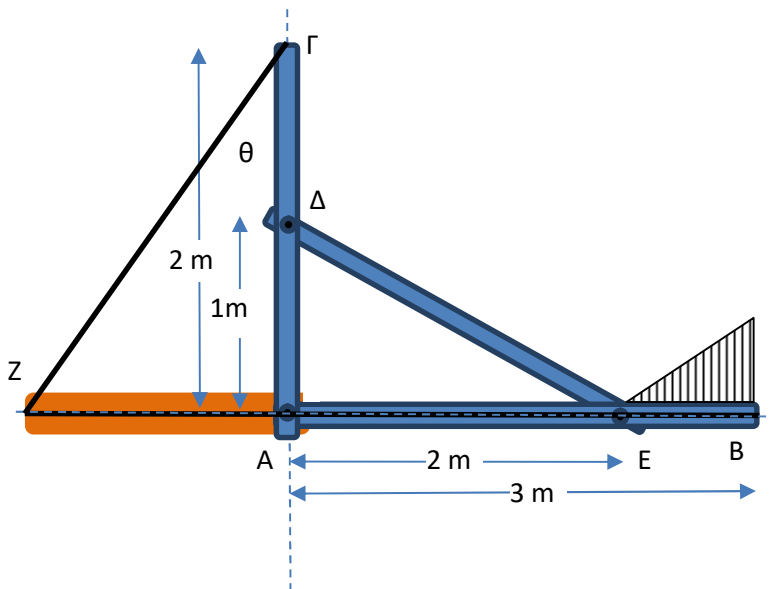


Λύσεις θεμάτων εξέτασης Ιανουαρίου 2025

Η στερεά κατασκευή του σχήματος, αποτελείται από τα μέλη AB, ΑΓ και ΔΕ συνδεδεμένα με αρθρώσεις. Το μέλος ΓΑ είναι κάθετο στο μέλος AB. Η εν λόγω κατασκευή, στηρίζεται στην ίδια την άρθρωσή της Α και στο συρματοσχοίνο ΓΖ, σε τέτοια θέση ώστε το AB να είναι οριζόντιο. Στο τμήμα EB υπάρχει βάρος 1000 Kp κατανεμημένο σε τριγωνική μορφή (όπως σχήμα).



1. Εξετάσετε την ισορροπία όλης της κατασκευής και υπολογίστε στην δύναμη του συρματοσχοίνου.

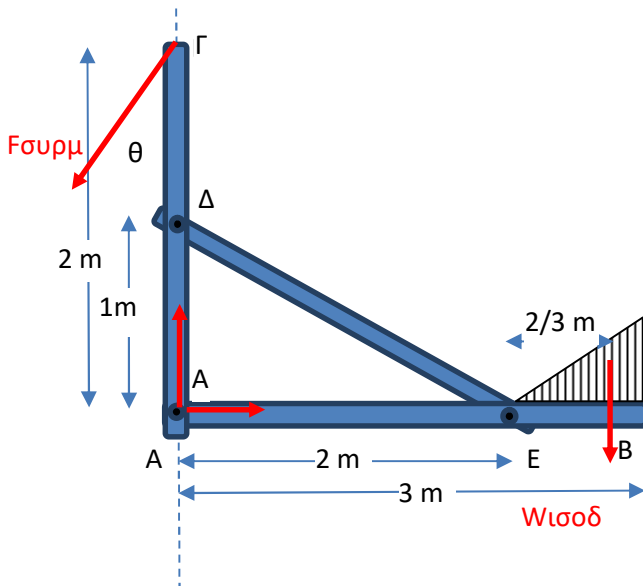
2. Σχεδιάσετε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το μέλος ΑΓ και υπολογίστε όλες τις δυνάμεις που το «στηρίζουν».

3. Κάνετε το ίδιο και για το μέλος AB.

4. Κάνετε τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών για το μέλος AB.

$\theta = T \cdot 2 + \Pi T + 12$ (μοίρες) $T, \Pi T$: Το τελευταίο και προτελευταίο αντίστοιχα ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

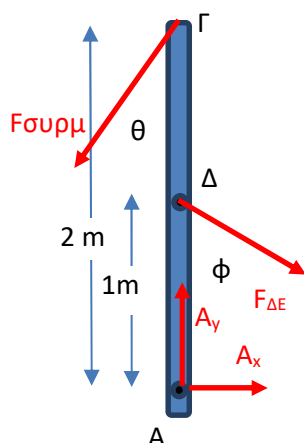
ΛΥΣΗ



1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ΔΕΣ όλης της κατασκευής, η οποία ισορροπεί. Το φορτίο των 1000 Kp, είναι το ισοδύναμο του κατανεμημένου τριγωνικού φορτίου και για την εξέταση της στατικής ισορροπίας, εφαρμόζεται στο KB του τριγώνου. Συνεπώς :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow +1000 \cdot \frac{8}{3} - \left(F_{\text{συρμ}} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\text{συρμ}} = \frac{1333}{\sin \theta} \quad \text{Kp}$$



2. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ΔΕΣ του μέλους ΑΓ. Η δύναμη στην άρθρωση Δ έχει την διεύθυνση του μέλους ΔΕ, δεδομένου ότι το τελευταίο συμπεριφέρεται ως ράβδος.

$$\phi = \text{atan}(2/1) \Rightarrow \phi = 63.4^\circ$$

Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(F_{\sigma\nu\rho\mu} \sin \theta) * 2 + (F_{\Delta E} \sin \phi) * 1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\Delta E} = \frac{2666}{\sin \phi} = 2981 \text{ Kp}$$

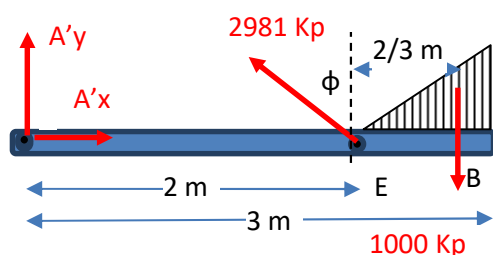
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -(F_{\sigma\nu\rho\mu} \sin \theta) + (F_{\Delta E} \sin \phi) + A_x = 0 \Rightarrow$$

$$A_x = 1333 - 2666 = -1333 \text{ Kp}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -(F_{\sigma\nu\rho\mu} \cos \theta) - (F_{\Delta E} \cos \phi) + A_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{1333}{\tan \theta} + 1490 \text{ Kp}$$

3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ΔΕΣ του μέλους ΑΒ. Η δύναμη στην άρθρωση Ε έχει την διεύθυνση του μέλους ΔΕ, δεδομένου ότι το τελευταίο συμπεριφέρεται ως ράβδος.

Εξισώσεις ισορροπίας :



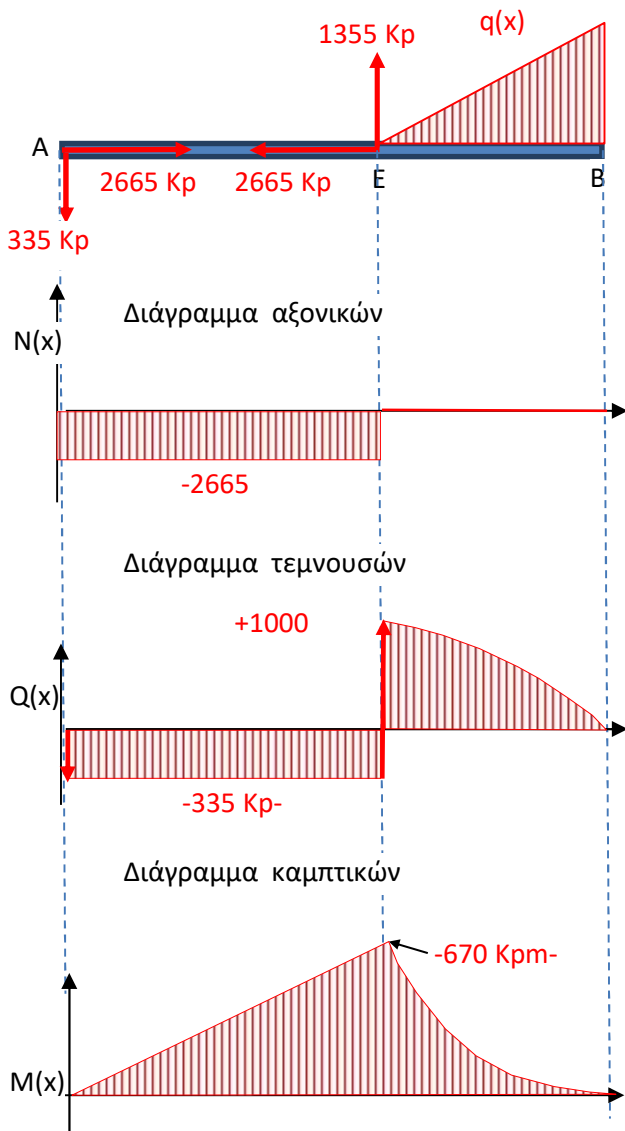
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow +A'_x - 2981 \sin \phi = 0 \Rightarrow$$

$$A'_x = 2665 \text{ Kp}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +A'_y + 2981 \cos \phi - 1000 = 0 \Rightarrow$$

$$A'_y = -335 \text{ Kp}$$

4. Διαγράμματα εσωτερικών δυνάμεων και ροπών στο μέλος AB



A. Αξονικές δυνάμεις

Σταθερή (θλιπτική) αξονική δύναμη υπάρχει μόνο στο τμήμα ΑΕ. Το διάγραμμα είναι συνεπώς απλό.

Β. Τέμνουσες δυνάμεις

Στο **τμήμα ΑΕ** δεν υπάρχει κατανεμημένο φορτίο, άρα το διάγραμμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα.

Τμήμα ΕΒ

Η συνάρτηση $q(x)$, η τιμή δηλαδή του κατανεμημένου φορτίου σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων, είναι πρώτου βαθμού :

$$q(x) = ax + b$$

και ισχύει :

$$q_E = q(2) = a \cdot 2 + b = 0$$

$$q_B = q(3) = a \cdot 3 + b = 2000 \text{ Kp/m}$$

Από την λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων, προκύπτει :

$$q(x) = 2000x - 4000 \text{ Kp/m} \quad (2m < x < 3m)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ(x)}{dx} &= -q(x) = -2000x + 4000 \Rightarrow Q(x) = \int (-2000x + 4000)dx + c = \\ &= -1000x^2 + 4000x + c \end{aligned}$$

Ισχύει όμως (οριακή συνθήκη) : $Q_E = Q(3) = 0 \text{ Kp}$

Οπότε :

$$Q(3) = 0 = -1000 \cdot 3^2 + 4000 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -3000$$

Οπότε :

$$Q(x) = -1000x^2 + 4000x - 3000 \text{ Kp} \quad (2m < x < 3m)$$

Γ. Καμπτικές ροπές

Στο **τμήμα ΑΕ** δεν υπάρχει κατανεμημένο φορτίο, άρα το διάγραμμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα.

Τμήμα ΕΒ

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = -1000x^2 + 4000x - 3000 \Rightarrow$$

$$M(x) = \int (-1000x^2 + 4000x - 3000)dx + c = -\frac{1000}{3}x^3 + 2000x^2 - 3000x + c$$

Ισχύει όμως (οριακή συνθήκη) : $M_B = M(3) = 0 \text{ Kpm}$

Οπότε :

$$M(3) = 0 = -\frac{1000}{3} * 3^3 + 2000 * 3^2 - 3000 * 3 + c \Rightarrow c = 0$$

Οπότε :

$$M(x) = -\frac{1000}{3}x^3 + 2000x^2 - 3000x \quad (2\text{m} < x < 3\text{m})$$

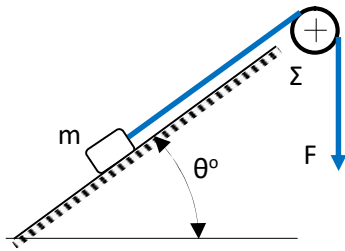
Για να ελέγξουμε αν η καμπτική ροπή παρουσιάζει κάποιο ακρότατο στο τμήμα του κατανεμημένου φορτίου, υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης και βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της :

$$M'(x) = -1000x^2 + 4000x - 3000$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $M'(x) = 0$, είναι : $x_1 = +3$ και $x_2 = +1$.

Μετά από την ανάλυση αυτή σχεδιάζουμε το διάγραμμα όπως φαίνεται στο σχετικό σχήμα.

ΘΕΜΑ



Σώμα μάζας $m=200 \text{ kg}$ συγκρατείται στο κεκλιμένο επίπεδο κλίσης θ° με την βοήθεια της τριβής και της δύναμης που επενεργεί σ' αυτό από το συρματόσχοινο. Το τελευταίο τυλίγεται γύρω από το ακίνητο κυλινδρικό σώμα Σ και είναι κατακόρυφο στο άλλο του μέρος.

Ποια είναι η ελάχιστη δύναμη F (ας την ονομάσουμε F_1) για την οποία το σώμα συγκρατείται να μην ολισθήσει προς τα κάτω.

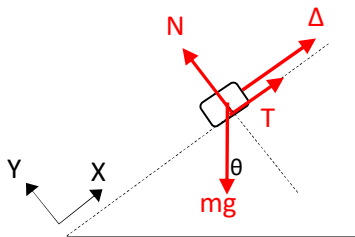
Ποια είναι η ελάχιστη δύναμη F (ας την ονομάσουμε F_2) για την οποία το σώμα αρχίζει να κινείται προς τα πάνω.

Βρείτε τις παραπάνω δυνάμεις για δύο περιπτώσεις :

- Όταν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ σχοινιού και του Σ
- Όταν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σχοινιού και Σ είναι 0.5

Συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου : $\mu_s = 0.2$

ΛΥΣΗ



Εξετάζουμε την ισορροπία του σώματος την στιγμή που επίκειται κίνησή του προς τα κάτω. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

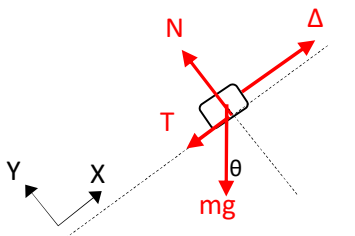
Για την δύναμη της τριβής ισχύει :

$$T = \mu_s N$$

Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos(\theta)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Delta_1 + \mu_s N - mg \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 = mg [\sin(\theta) - \mu_s \cos(\theta)]$$

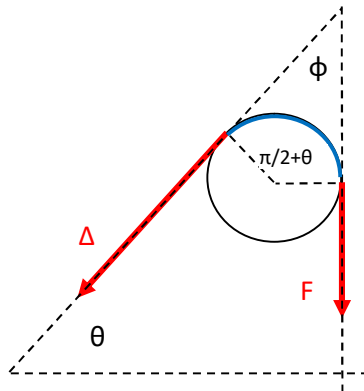


Όταν «επίκειται» κίνηση προς τα πάνω, οι δυνάμεις που επενεργούν στο σώμα είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα. Για την δύναμη της τριβής ισχύει η ίδια ως άνω σχέση.

Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos(\theta)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Delta_2 - \mu_s N - mg \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2 = mg [\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)]$$



Η δύναμη Δ επενεργεί στο σώμα με την βοήθεια του συρματοσχοίνου. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις στο συρματοσχοίνο στις δύο μεριές του κυλινδρικού σώματος Σ .

Η γωνία τύλιξης είναι $\pi - \phi = \pi - (\pi/2 - \theta) = \pi/2 + \theta$. Γιατί;

Αν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ συρματοσχοίνου και Σ τότε $\Delta = F$.

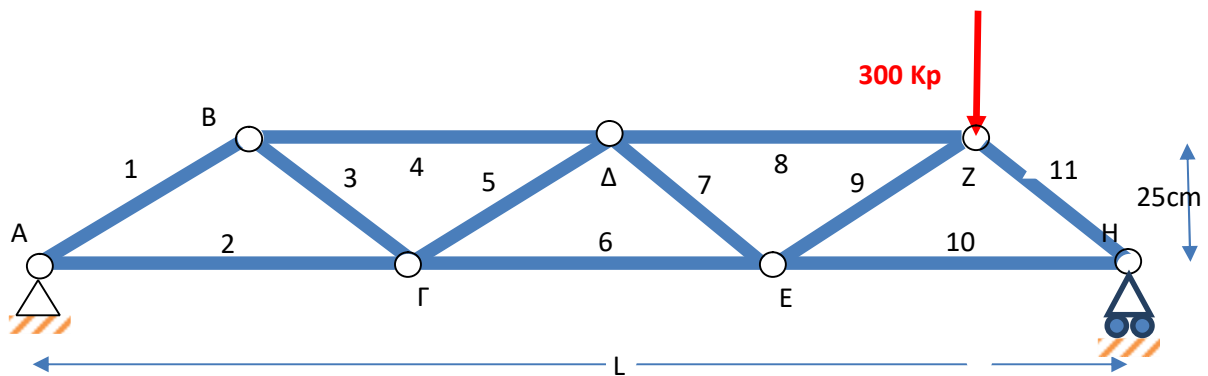
Αν υπάρχει τριβή τότε :

$$\Delta_1 = F_1 e^{0.2(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

Και

$$F_2 = \Delta_2 e^{0.2(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

ΘΕΜΑ

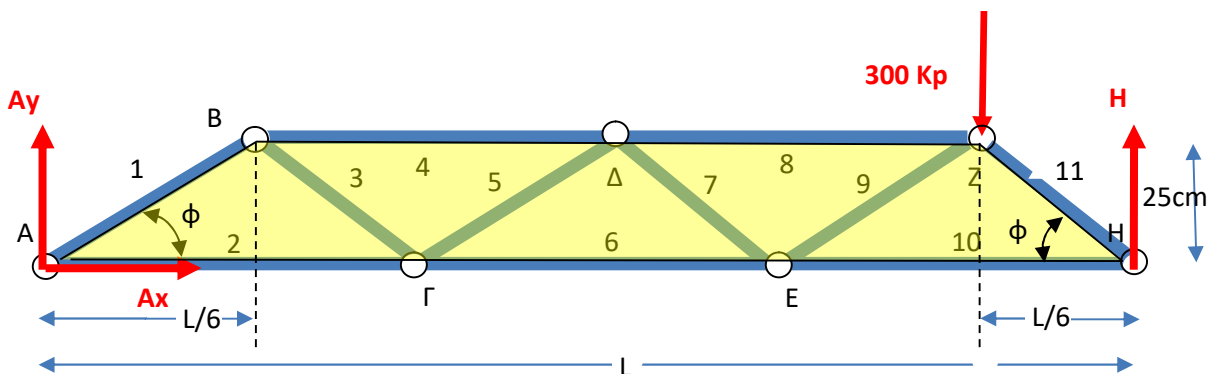


Το δικτύωμα του σχήματος είναι απολύτως συμμετρικό και έχει όλες τις οριζόντιες ράβδους ισομήκεις. Υπολογίσετε τη δύναμη με την οποία καταπονείται κάθε μια από τις ράβδους 1,2,10,11.

Λύση

1. Προσδιορίζω τις αντιδράσεις στις στηρίξεις, εξετάζοντας την ισορροπία ολοκλήρου του δικτυώματος.

Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται το Δ.Ε.Σ. ολοκλήρου του δικτυώματος.



Εξισώσεις ισορροπίας :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -300\left(\frac{5L}{6}\right) + HL = 0 \Rightarrow H = 250 \text{ Kp}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

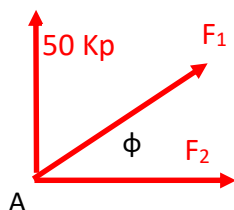
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +A_y + H - 300 = 0 \Rightarrow A_y = 50 \text{ Kp}$$

2. Εξετάζω την ισορροπία των κόμβων Α και Η για να υπολογίσω τις ζητούμενες δυνάμεις.

Για την γωνία ϕ ισχύει : $\tan(\phi) = \frac{25 \text{ cm}}{L/6}$

Θεωρώ τις άγνωστες δυνάμεις των ράβδων εφελκυστικές.

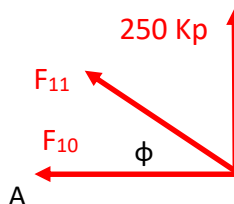
Κόμβος Α



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +50 + F_1 \cos(90^\circ - \phi) = 0 \Rightarrow F_1 = -50/\sin(\phi) \text{ (θλιπτική)}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow +F_2 + F_1 \cos(\phi) = 0 \Rightarrow F_2 = +50/\tan(\phi) \text{ (εφελκυστική)}$$

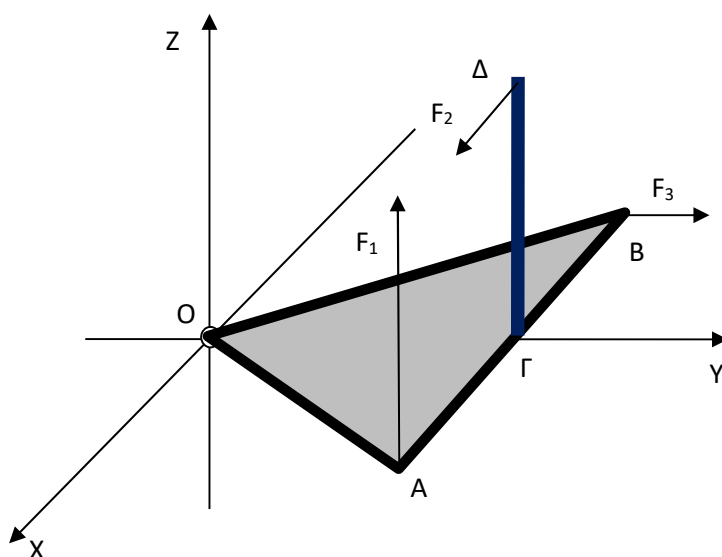
Κόμβος Η



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +250 + F_{11} \cos(90^\circ - \phi) = 0 \Rightarrow F_{11} = -250/\sin(\phi) \text{ (θλιπτική)}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow +F_{10} + F_{11} \cos(180^\circ - \phi) = 0 \Rightarrow F_{10} = +250/\tan(\phi) \text{ (εφελκυστική)}$$

ΘΕΜΑ 4^ο



Ομογενής τριγωνική πλάκα ΟΑΒ, βάρους 1000 Kp, στηρίζεται στην σφαιρική άρθρωση Ο και ισορροπεί στο οριζόντιο επίπεδο ΧΥ υπό την επενέργεια των δυνάμεων F_1 , F_2 και F_3 που είναι παράλληλες στους άξονες Ζ, Χ και Υ αντίστοιχα.

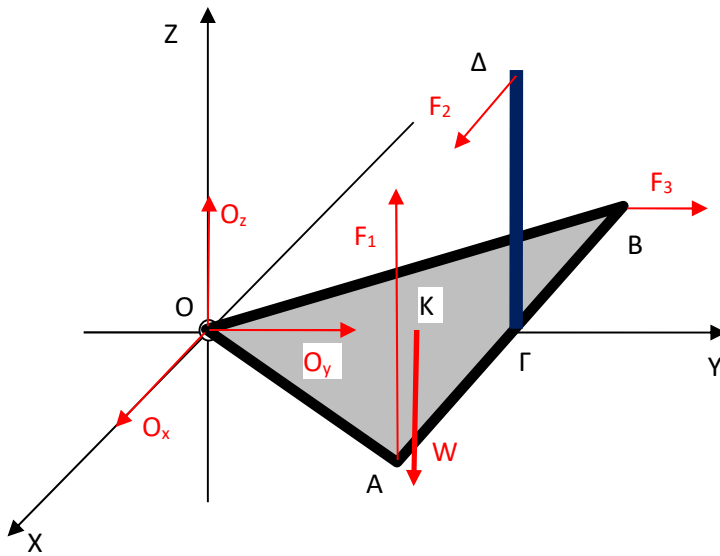
Η δύναμη F_2 επενεργεί στην κορυφή Δ του αβαρούς στύλου ΓΔ που είναι πακτωμένος και κάθετος στην πλάκα, στο μέσο Γ της πλευράς ΑΒ.

1. Βρείτε τις ροπές κάθε μιας από τις δυνάμεις που επενεργούν πάνω στην κατασκευή «πλάκα – στύλος», ως προς το σημείο Ο και αθροίστε τις ως διανύσματα

- ώστε να υπολογίσετε τις δυνάμεις F_1 , F_2 και F_3 .
2. Υπολογίστε στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ισορροπία των δυνάμεων που επενεργούν στην κατασκευή, την δύναμη (ως διάνυσμα) στην άρθρωση O.

Δίδονται : A : (1,1,0), B : (-1,1, 0), Δ : (0,1,1)

ΛΥΣΗ



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το Δ.Ε.Σ. «πλάκα». Η σφαιρική άρθρωση συγκρατεί την πλάκα με δύναμη της οποίας φαίνονται οι ορθογώνιες συνιστώσες. Το βάρος W της πλάκας εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους K, οι συντεταγμένες του οποίου είναι : (0, 2/3,0).

1. Τα διανύσματα θέσης $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OD}$, $\vec{OK}$ που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό των ροπών των δυνάμεων ως προς το O, είναι :

$$\vec{OA} = (+1, +1, 0)$$

$$\vec{OB} = (-1, +1, 0)$$

$$\vec{OD} = (0, +1, +1)$$

$$\vec{OK} = (0, +\frac{2}{3}, 0)$$

Οι ροπές των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{W}$, ως προς το O, είναι αντίστοιχα :

$$\vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_1 \end{vmatrix} = F_1 \vec{i} - F_1 \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$\vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ F_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \vec{i} + F_2 \vec{j} - F_2 \vec{k}$$

$$\vec{M}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & F_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} - F_3 \vec{k}$$

$$\vec{M}_w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{vmatrix} = (-667Kpm) \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k}$$

Η πλάκα ισορροπεί, συνεπώς :

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow (F_1 - 667Kpm) \vec{i} + (-F_1 + F_2) \vec{j} + (-F_2 - F_3) \vec{k} = 0$$

Άρα :

$$F_1 - 667Kp = 0$$

$$-F_1 + F_2 = 0$$

$$-F_2 - F_3 = 0$$

Οπότε :

$$F_1 = 667Kp, F_2 = 667Kp, F_3 = -667Kp$$

2. Ισορροπία των δυνάμεων :

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \Rightarrow$$

$$O_x + F_2 = 0 \Rightarrow O_x = -667 Kp$$

$$O_y + F_3 = 0 \Rightarrow O_y = +667 Kp$$

$$O_z + F_1 - W = 0 \Rightarrow O_z = +333 Kp$$

Οπότε, η δύναμη στην άρθρωση ως διάνυσμα, είναι :

$$\vec{F_0} = (-667Kp)\vec{i} + (+667Kp)\vec{j} + (+333Kp)\vec{k} = 1000Kp\left(\frac{-667}{1000}\vec{i} + \frac{+667}{1000}\vec{j} + \frac{+333}{1000}\vec{k}\right)$$

... έκφραση στην οποία φαίνεται τόσο το μέτρο της (1000 Kp) όσο και τα συνημίτονα κατεύθυνσής της.