ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διδάσκων: Γιώργος Τζανετόπουλος *ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1*

Λύσεις Ασκήσεων

1) **α)** Είναι $U = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 1^2-2 & 1^2-3 \\ 2^2-1 & 2^2-2 & 2^2-3 \\ 3^2-1 & 3^2-2 & 3^2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ και $V = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ από υπόθεση. Καθώς είναι τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης δεν υπάρχει πρόβλημα με τα γινόμενα $U \cdot V, V \cdot U$. Έτσι:

$U \cdot V = \begin{bmatrix} -3 & -12 & -27 \\ 6 & 24 & 54 \\ 21 & 84 & 189 \end{bmatrix}$ ενώ $V \cdot U = \begin{bmatrix} 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \\ 84 & 70 & 56 \end{bmatrix}$ δηλαδή $U \cdot V \neq V \cdot U$.

Τέλος $U \cdot V + V \cdot U = \begin{bmatrix} 81 & 58 & 29 \\ 90 & 94 & 110 \\ 105 & 154 & 245 \end{bmatrix}$

β) Από υπόθεση έχω ότι: $B = (A^2)^{-1}$. Αρκεί να δείξω ότι: $A(AB) = \mathbb{I} = (AB)A$. Έχουμε ότι:
$A(AB) = (AA)B = A^2B = A^2(A^2)^{-1} = \mathbb{I}$. Επίσης έχουμε ότι:
$(AB)A = A(A^2)^{-1}A = A(A^2)^{-1}A\mathbb{I} = A(A^2)^{-1}A\,A(AB) = A(A^2)^{-1}A^2(AB) = A\mathbb{I}(AB) = A(AB) = \mathbb{I}$.

2) **α)** $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1) - (-2)1 = 1 + 2 = 3$

β) Από τη στιγμή που δείξαμε ότι $\det(A) = 3 \neq 0$ ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του δίνεται από: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

γ) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & -1-1 \\ 2+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ επομένως:
$\det(A^2) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 - (-2)4 = 1 + 8 = 9$. Παρατηρούμε ότι $\det(A^2) = 9 = 3^2 = (\det(A))^2$.

3) Από τον ορισμό του συμμετρικού πίνακα έχουμε ότι: $A^T = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. Ορίζουμε τους ακόλουθους πίνακες: $A + A^T$ και $A - A^T$, οπότε είναι:

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 8 \\ -1 & 6 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A + A^T = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 8 \\ -1 & 6 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -4 \\ -7 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -4 \\ -7 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός, ενώ ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός. Επίσης:

$\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T = A$.

4) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$ άρα ο A είναι ταυτοδύναμος

$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ επίσης

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ άρα ο B είναι μηδενοδύναμος τάξης 3

$\Gamma^2 = \Gamma\,\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ άρα ο Γ είναι ενελικτικός.