ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διδάσκων: Γιώργος Τζανετόπουλος ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1

Λύσεις Ασκήσεων

1) **α)** Είναι $U = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ και

$V = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ από υπόθεση. Καθώς είναι τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης δεν υπάρχει πρόβλημα με τα γινόμενα $U \cdot V, V \cdot U$. Έτσι:

$U \cdot V = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ ενώ $V \cdot U = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ δηλαδή έχουμε ότι $(U \cdot V)^T = V \cdot U$.

Τέλος $U \cdot V + V \cdot U = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 1 & -8 & -1 \\ 8 & -1 & 10 \end{bmatrix}$.

β) Είναι: $(A+B)A^{-1}(A-B) = (AA^{-1} + BA^{-1})(A-B) = (\mathbb{I} + BA^{-1})(A-B) =$
$= (A-B) + BA^{-1}A - BA^{-1}B = A - B + B\mathbb{I} - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$. *(1)*
Επίσης: $(A-B)A^{-1}(A+B) = (AA^{-1} - BA^{-1})(A+B) = (\mathbb{I} - BA^{-1})(A+B) =$
$= (A+B) - BA^{-1}A - BA^{-1}B = A + B - B\mathbb{I} - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$. *(2)*
Από τις σχέσεις *(1)* και *(2)* προκύπτει το ζητούμενο.

2) **α)** $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

β) Από τη στιγμή που δείξαμε ότι $\det(A) = -1 \neq 0$ ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του δίνεται από: $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

γ) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+1 \\ 2+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ επομένως:
$\det(A^2) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1$. Παρατηρούμε ότι $\det(A^2) = 1 = (-1)^2 = (\det(A))^2$.

3) Από τον ορισμό του συμμετρικού πίνακα έχουμε ότι: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$. Ορίζουμε τους ακόλουθους πίνακες: $A + A^T$ και $A - A^T$, οπότε είναι:

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -14 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -14 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -11 \\ -3 & 11 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -11 \\ -3 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός, ενώ ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός. Επίσης:

$\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T = A$.

4) **α)** Ο πίνακας A είναι ενελικτικός σημαίνει ότι $A^2 = \mathbb{I}_n$ και τότε:

$(\mathbb{I}_n - A)(\mathbb{I}_n + A) = \mathbb{I}_n + A - A - A^2 = \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n = \mathbb{O}$.

Επίσης αν $(\mathbb{I}_n - A)(\mathbb{I}_n + A) = \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{I}_n + A - A - A^2 = \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{I}_n - A^2 = \mathbb{O} \Rightarrow A^2 = \mathbb{I}_n$.

Δηλαδή ο πίνακας A είναι ενελικτικός.

β) Είναι $\left\{\frac{1}{2}(\mathbb{I}_n + A)\right\}^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_n + A)^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_n + A)(\mathbb{I}_n + A) = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_n + A + A + A^2) =$

$= \frac{1}{4}(\mathbb{I}_n + A + A + \mathbb{I}_n) = \frac{1}{4}(2\mathbb{I}_n + 2A) = \frac{2}{4}(\mathbb{I}_n + A) = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_n + A)$.

Ομοίως $\left\{\frac{1}{2}(\mathbb{I}_n - A)\right\}^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_n - A)^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_n - A)(\mathbb{I}_n - A) = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_n - A - A + A^2) =$

$= \frac{1}{4}(\mathbb{I}_n - A - A + \mathbb{I}_n) = \frac{1}{4}(2\mathbb{I}_n - 2A) = \frac{2}{4}(\mathbb{I}_n - A) = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_n - A)$.