# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διδάσκων: Γιώργος Τζανετόπουλος ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2

## Λύσεις Ασκήσεων

### Άσκηση 1

**α)**

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\1&2^4&3^4&4^4\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot4\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2^1&3^1&4^1\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=24\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2^1-1&3^1-1&4^1-1\\1&2^2-1&3^2-1&4^2-1\\1&2^3-1&3^3-1&4^3-1\end{vmatrix}$$

$$=24\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&2&3\\1&3&8&15\\1&7&26&63\end{vmatrix}=24\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\3&8&15\\7&26&63\end{vmatrix}=24\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\3-3\cdot1&8-3\cdot2&15-3\cdot3\\7-7\cdot1&26-7\cdot2&63-7\cdot3\end{vmatrix}=24\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&6\\0&12&42\end{vmatrix}$$

$$=24\cdot1\cdot\begin{vmatrix}2&6\\12&42\end{vmatrix}=24\cdot(2\cdot42-12\cdot6)=24\cdot(24-72)=24\cdot12=288$$

**β)**

```
octave:1> A=[1,2,3,4;1,4,9,16;1,8,27,64;1,16,81,256]
A =

     1     2     3     4
     1     4     9    16
     1     8    27    64
     1    16    81   256

octave:2> det(A)
ans = 288.00
```

### Άσκηση 2

**α)**

$$(B|\mathbb{I})=\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&1&2&3&1&0&0&0\\3&0&1&2&0&1&0&0\\2&3&0&1&0&0&1&0\\1&2&3&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_4]{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&0&1&2&0&1&0&0\\0&1&2&3&1&0&0&0\\1&2&3&0&0&0&0&1\\2&3&0&1&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_4=\Gamma_4-\frac{2}{3}\Gamma_1]{\Gamma_3=\Gamma_3-\frac{1}{3}\Gamma_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&0&1&2&0&1&0&0\\0&1&2&3&1&0&0&0\\0&2&\frac{8}{3}&\frac{-2}{3}&0&\frac{-1}{3}&0&1\\0&3&\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}&0&\frac{-2}{3}&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4=\Gamma_4-3\Gamma_2]{\Gamma_3=\Gamma_3-2\Gamma_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&0&1&2&0&1&0&0\\0&1&2&3&1&0&0&0\\0&0&\frac{-4}{3}&\frac{-20}{3}&-2&\frac{-1}{3}&0&1\\0&0&\frac{-20}{3}&\frac{-28}{3}&-3&\frac{-2}{3}&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_4=-\frac{3}{28}\Gamma_4]{\Gamma_3=-\frac{3}{4}\Gamma_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&0&1&2&0&1&0&0\\0&1&2&3&1&0&0&0\\0&0&1&5&\frac{3}{2}&\frac{1}{4}&0&-\frac{3}{4}\\0&0&\frac{5}{7}&1&\frac{9}{28}&\frac{1}{14}&-\frac{3}{28}&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4=\Gamma_4-\frac{5}{7}\Gamma_3]{\substack{\Gamma_1=\Gamma_1-\Gamma_3\\ \Gamma_2=\Gamma_2-2\Gamma_3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}&&&&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&0&\frac{3}{4}\\3&0&0&-3&-2&-\frac{2}{4}&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&7&\frac{3}{2}&\frac{1}{4}&0&-\frac{3}{4}\\0&0&1&5&-\frac{3}{4}&-\frac{3}{28}&-\frac{3}{28}&\frac{15}{28}\\0&0&0&-\frac{18}{7}&&&&\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_4=-\frac{7}{18}\Gamma_4]{\Gamma_1=\frac{1}{3}\Gamma_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}&&&&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\1&0&0&-1&-2&-\frac{2}{4}&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&7&\frac{3}{2}&\frac{1}{4}&0&-\frac{3}{4}\\0&0&1&5&\frac{7}{24}&\frac{1}{24}&\frac{1}{24}&-\frac{5}{24}\\0&0&0&1&&&&\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3=\Gamma_3-5\Gamma_4]{\substack{\Gamma_1=\Gamma_1+\Gamma_4\\ \Gamma_2=\Gamma_2+7\Gamma_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{7}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{5}{24} \end{array}\right) = (\mathbb{I}|B^{-1})$$

**β)**

```
octave:3> B=[0,1,2,3;3,0,1,2;2,3,0,1;1,2,3,0]
B =

   0   1   2   3
   3   0   1   2
   2   3   0   1
   1   2   3   0

octave:4> BI=inv(B)
BI =

  -0.208333   0.291667   0.041667   0.041667
   0.041667  -0.208333   0.291667   0.041667
   0.041667   0.041667  -0.208333   0.291667
   0.291667   0.041667   0.041667  -0.208333

octave:5> MyBI=[-5/24,7/24,1/24,1/24;1/24,-5/24,7/24,1/24;1/24,1/24,-5/24,7/24;7/24,1/24,1/24,-5/24]
MyBI =

  -0.208333   0.291667   0.041667   0.041667
   0.041667  -0.208333   0.291667   0.041667
   0.041667   0.041667  -0.208333   0.291667
   0.291667   0.041667   0.041667  -0.208333

octave:6> Test=BI-MyBI
Test =

   5.5511e-17            0  -1.3878e-17  -6.9389e-18
  -1.3878e-17            0            0  -6.9389e-18
  -6.9389e-18  -6.9389e-18   2.7756e-17  -5.5511e-17
  -5.5511e-17            0  -6.9389e-18   2.7756e-17
```

**γ)** $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 14 & 8 & 6 \\ 6 & 8 & 14 & 8 \\ 8 & 6 & 8 & 14 \end{pmatrix}$ ο οποίος είναι συμμετρικός πίνακας.

## Άσκηση 3

Είναι:

$$A^{-1} \cdot (A+B) \cdot B^{-1} = (A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot B) \cdot B^{-1} = \mathbb{I} \cdot B^{-1} + A^{-1} \cdot B \cdot B^{-1} = B^{-1} + A^{-1} \cdot \mathbb{I} = B^{-1} + A^{-1}.$$

Άρα:

$$\det(\Gamma) = \det(B^{-1} + A^{-1}) = \det(A^{-1} \cdot (A+B) \cdot B^{-1}) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A+B) \cdot \det(B^{-1}) = \frac{\det(A+B)}{\det(A) \cdot \det(B)}$$

$$\Rightarrow \det(\Gamma) = \frac{\det(A+B)}{\det(A) \cdot \det(B)} \neq 0$$

καθώς οι πίνακες $A, B, A+B$ είναι αντιστρέψιμοι και συνεπώς η ορίζουσά τους είναι μη μηδενική. Τότε όμως είναι και $\det(\Gamma) \neq 0$ άρα ο $\Gamma = B^{-1} + A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$(B^{-1} + A^{-1})^{-1} = [A^{-1} \cdot (A+B) \cdot B^{-1}]^{-1} = (B^{-1})^{-1} \cdot (A+B)^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = B \cdot (A+B)^{-1} \cdot A$$

**Άσκηση 4**

Είναι $\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \mathbb{I}$.

Επίσης $\Delta^3 = \Delta^2 \cdot \Delta = 4 \cdot \mathbb{I} \cdot \Delta = 4 \cdot \Delta$, $\Delta^4 = \Delta^3 \cdot \Delta = 4 \cdot \Delta \cdot \Delta = 4 \cdot \Delta^2 = 4^2 \cdot \mathbb{I}$, $\Delta^5 = \Delta^4 \cdot \Delta = \cdots = 4^2 \cdot \Delta$ και επαγωγικά μπορεί κάποιος να δείξει ότι:

$$\Delta^\kappa = \begin{cases} 4^n \cdot \mathbb{I}, & \kappa = 2n \\ 4^n \cdot \Delta, & \kappa = 2n+1 \end{cases} \ \gamma\iota\alpha\ n = 1, 2, 3, 4, \cdots$$