Άσκηση 1

α) Είναι $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

$= -3+40 = 37 \neq 0$

Επίσης

$$\det(A_{1:1,1:1}) = |0| = 0 \;,\; \det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Άρα ο πίνακας A δεν έχει ανάλυση LU καθώς υπάρχει κύρια υποορίζουσα η 1x1 τάξης η οποία είναι μηδενική. Όμως καθώς $\det(A) \neq 0$ ο A είναι αντιστρέψιμος άρα υπάρχει πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε $PA = L \cdot U$. Είναι $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Επίσης έστω

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Τότε $PA = LU$ δίνει ισοδύναμα

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{11} = 1, \quad u_{12} = -2, \quad u_{13} = 4 \\ \ell_{21} u_{11} = 0, \quad \ell_{21} u_{12} + u_{22} = 2, \quad \ell_{21} u_{13} + u_{23} = 1 \\ \ell_{31} u_{11} = 4, \quad \ell_{31} u_{12} + \ell_{32} u_{22} = 1, \quad \ell_{31} u_{13} + \ell_{32} u_{23} + u_{33} = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_{11} = 1, \quad u_{12} = -2, \quad u_{13} = 4 \\ \ell_{21} = 0 \quad u_{22} = 2, \quad u_{23} = 1 \\ \ell_{31} = 4 \quad -8 + \ell_{32} u_{22} = 1, \quad 16 + \ell_{32} u_{23} + u_{33} = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} u_{11}=1, & u_{12}=-2, & u_{13}=4 \\ \ell_{21}=1, & u_{22}=4, & u_{23}=-3 \\ \ell_{31}=4, & 2\ell_{32}=9, & \ell_{32}+u_{33}=-14 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} u_{11}=1, & u_{12}=-2, & u_{13}=4 \\ \ell_{21}=1, & u_{22}=4, & u_{23}=-3 \\ \ell_{31}=4, & \ell_{32}=9/2, & u_{33}=-37/2 \end{array} \right\}$$

Άρα: $L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9/2 & 1 \end{bmatrix}$ και $U=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -37/2 \end{bmatrix}$

β)

```
octave:1> L=[1,0,0;0,1,0;4,9/2,1]
L =

   1.0000        0        0
        0   1.0000        0
   4.0000   4.5000   1.0000

octave:2> U=[1,-2,4;0,2,1;0,0,-37/2]
U =

    1.0000   -2.0000    4.0000
         0    2.0000    1.0000
         0         0  -18.5000

octave:3> L*U
ans =

   1  -2   4
   0   2   1
   4   1   2
```

Άσκηση 2

α) Είναι $L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Έστω $c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, τέτοιο ώστε $Lc=b$, όπου $b=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ισοδύναμα θα έχω

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ c_1+c_2=0 \\ c_1+c_3=2 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} c_1=2 \\ c_2=-2 \\ c_3=0 \end{array}$$

Άρα $c=[2\ -2\ 0]^T$. Είναι τώρα $Ux=c$ ή

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \left.\begin{aligned} 2u + 4v + 4w &= 2 \\ v + 2w &= -2 \\ w &= 0 \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\iff \left.\begin{aligned} 2u - 8 &= 2 \\ v &= -2 \\ w &= 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} u = 5 \\ v = -2 \\ w = 0 \end{cases} \iff x = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b)

```
octave:1> L=[1,0,0;1,1,0;1,0,1]
L =

   1   0   0
   1   1   0
   1   0   1

octave:2> b=[2;0;2]
b =

   2
   0
   2

octave:3> c=L\b
c =

   2
  -2
   0

octave:4> U=[2,4,4;0,1,2;0,0,1]
U =

   2   4   4
   0   1   2
   0   0   1

octave:5> x=U\c
x =

   5
  -2
   0
```

Άσκηση 3

Είναι $E^2 = E \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E^3 = E^2 \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω: $E^K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 \cdot K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ θα δείξω ότι $E^{K+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6(K+1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E^{K+1} = E^K \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6K+6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6(K+1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $E^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Με παρόμοιο τρόπο (επαγωγικά δηλαδή) δείχνω ότι

$$\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad E^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $E^9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 \cdot 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 54 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

πίνακες σαν τον E ονομάζονται ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ

Άσκηση 4

α) Είναι $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4=\Gamma_4-\frac{1}{2}\Gamma_1]{\Gamma_2=\Gamma_2-\frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4=\Gamma_4+\frac{2}{3}\Gamma_2]{\Gamma_3=\Gamma_3+\frac{1}{3}\Gamma_2}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4=\Gamma_4-\frac{1}{11}\Gamma_3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 11/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 18/11 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{18}{11} = 4 \cdot 18 = 72 \neq 0.$$

Επίσης όλες οι κύριες υποορίζουσες του A είναι μη μηδενικές.
Άρα ο A αναλύεται σε LU. Έστω

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Τότε $A=LU$ δίνει ισοδύναμα

$$\begin{cases} u_{11}=4, \quad u_{12}=2, \quad u_{13}=0, \quad u_{14}=2 \\ l_{21}u_{11}=2, \quad l_{21}u_{12}+u_{22}=4, \quad l_{21}u_{13}+u_{23}=-1, \quad l_{21}u_{14}+u_{24}=-1 \\ l_{31}u_{11}=0, \quad l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=-1, \quad l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=4, \quad l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34}=1 \\ l_{41}u_{11}=2, \quad l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22}=-1, \quad l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33}=1, \quad l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44}=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{11}=4, \quad u_{12}=2, \quad u_{13}=0, \quad u_{14}=2 \\ l_{21}=1/2, \quad u_{22}=3, \quad u_{23}=-1, \quad u_{24}=-2 \\ l_{31}=0, \quad l_{32}=-1/3, \quad u_{33}=11/3, \quad u_{34}=1/3 \\ l_{41}=1/2, \quad l_{42}=-2/3, \quad l_{43}=1/11, \quad u_{44}=18/11 \end{cases}$$

Άρα $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2/3 & 1/11 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 11/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 18/11 \end{bmatrix}$

β) Καμία

γ)

```
octave:1> U=[4,2,0,2;0,3,-1,-2;0,0,11/3,1/3;0,0,0,18/11]
U =

   4.0000   2.0000        0   2.0000
        0   3.0000  -1.0000  -2.0000
        0        0   3.6667   0.3333
        0        0        0   1.6364

octave:2> L=[1,0,0,0;1/2,1,0,0;0,-1/3,1,0;1/2,-2/3,1/11,1]
L =

   1.0000        0        0        0
   0.5000   1.0000        0        0
        0  -0.3333   1.0000        0
   0.5000  -0.6667   0.0909   1.0000

octave:3> L*U
ans =

   4.0000   2.0000        0   2.0000
   2.0000   4.0000  -1.0000  -1.0000
        0  -1.0000   4.0000   1.0000
   2.0000  -1.0000   1.0000   4.0000
```