

ΠΡΟΣΟΧΗ

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΜΟΝΟ ΣΤΟ Α Ή ΣΤΟ Β ΓΙΑ ΤΑ 1 ΚΑΙ 5. ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ΩΡΕΣ
ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΗΣΤΕ ΤΟ μ = ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΨΗΦΙΟ ΤΟΥ Α.Μ. ΣΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΗ!
ΕΠΙΤΡΕΠΟΝΤΑΙ ΒΙΒΛΙΑ, ΣΗΜ/ΣΕΙΣ ΚΑΙ ΦΩΤ/ΠΙΕΣ! ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ!

Θέμα 1Α

Ρομπότ περιπίπτει (σε σταθερή θέση) ενός πλανήτη συντελεστή βαρύτητας $g = \mu^2/8$ m/sec² του οποίου η ομοιόμορφη ατμόσφαιρα έχει **συντελεστή αντίστασης** $\kappa = \mu/4$ Nt·sec/m. Σε ελαστικό νήμα με **συντελεστή Hook** $\lambda = \mu^2/16$ Nt/m, που κρατείται συνεχώς κατακόρυφο, προσδένεται (ακαριαία και απαλά!) σφαιρίδιο **μάζας** $m = 0,5$ kg. Πόσα **ακριβώς** m (όχι δεκαδικές προσεγγίσεις) θα είναι η **επιμήκυνση** του νήματος σε χρόνο $t = 2\pi/\mu$ sec μετά την πρόσδεση;
Προσοχή! Εκκίνηση από τον **2ο Νόμο του Newton**. **Όχι έτοιμοι τύποι!**

©Θέμα 1B

Σε ένα **εν σειρά κύκλωμα** έχουμε $R = 50$ Ohm, $L = 25$ Henry, $C = 0,02$ Farad, και μπαταρία τάσης $V = 250$ Volt. Αν το αρχικό **φορτίο** του πυκνωτή είναι $Q_0 = \mu + 5$ Coulomb και θέσουμε Q_1 και Q_2 τα **φορτία** του ρεύματος όταν $t_1 = \pi/2$ sec και $t_2 = \pi$ sec, **αντίστοιχα**, επαληθεύστε την σχέση $(Q_1 - 5)^2 = \mu(5 - Q_2)$. **Προσοχή!** Εκκίνηση από τον **2ο Νόμο του Kirchhoff**. **Όχι έτοιμοι τύποι!**

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ στο $[0, \mu]$ και $= 0$ στο $(-\infty, 0) \cup (\mu, +\infty)$.
(α) Εξηγήστε γιατί αυτή είναι **κατά τμήματα συνεχής** και L^1 στο $(-\infty, +\infty)$. (0,5 μονάδες)
(β) Βρείτε (μέχρι τέλους!) την **συνέλιξη** $(f * f)(t)$. (Υπόδειξη: 3 περιπτώσεις για το t) (1,5 μονάδες)
(Ερώτηση Bonus 0,5 μονάδων: Ανεξάρτητα αν έχετε απαντήσει στο (β), πόσες **το πολύ** ασυνέχειες μπορεί να έχει η εν λόγω συνέλιξη και **γιατί;**)

Θέμα 3

Από το **τυπολόγιο** και την ιδιότητα **shifting** του μετ/σμού **Laplace**, βρείτε τον **αντίστροφο μετ/σμού Laplace** της συνάρτησης $\frac{s^2 + \mu}{(s^2 - 1)^2}$. (Υπόδειξη: ανάλυση σε 4 στοιχειώδη κλάσματα)

Θέμα 4

Με χρήση **αποκλειστικά** του **μετ/μού Laplace** λύστε την Δ.Ε. $y'' + 2y' + 10y = 10\mu$, με αρχικές συνθήκες $y(0) = 10\mu$ και $y'(0) = -20\mu$.

Θέμα 5A

Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = e^{\mu t}$ στο $(-\infty, 0]$ και $= 0$ στο $(0, +\infty)$.
(α) Δείξτε ότι $f(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ (= **τετραγωνικά απολύτως ολοκληρώσιμη** σε όλο το \mathbb{R}). (0,5 μον.)
(β) Εξηγώντας ποιόν **ορισμό** του **μετ/σμού Fourier**, $f \rightarrow \hat{f}$, χρησιμοποιείτε, βρείτε την $\hat{f}(\omega)$. (1,5 μον.)

Θέμα 5B

Έστω $F(t)$ η **περιοδική επέκταση** σε όλο το \mathbb{R} της συνάρτησης $f(t) = t$ με Π.Ο. το $[-\mu, \mu]$.
(α) Σχεδιάστε την $F(t)$, βρείτε τα «κακά σημεία t » αυτής -αν βέβαια υπάρχουν!- και «προβλέψτε» πού θα πρέπει να συγκλίνει, σε αυτά τα σημεία, η **σειρά Fourier** της $F(t)$. (75 μονάδες)
(β) Βρείτε (μέχρι τέλους!), για όλα τα t , την εν λόγω **σειρά Fourier**. (125 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Δ.Καραγιαννάκης, Καθηγητής Υποτομέα Μαθηματικής Ανάλυσης ΓΤΘΕ
Τηλ.Γραφείου: 2810379855, E-mail: dkar@staff.teicrete.gr