

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΕΦΑΡΜ.ΜΑΘΗΜΑΤΤΙΚΑ**

**ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜEΣ ΤΟΥΣ**

Κατά τη μελέτη ενός τυχαίου πειράματος, ενδιαφερόμαστε συνήθως για κάποια συνάρτηση του αποτελέσματος και όχι για το αποτέλεσμα αυτό καθεαυτό (π.χ. σε μια ακολουθία δοκιμών, μας ενδιαφέρει το πλήθος από επιτυχίες και όχι ποιες δοκιμές ήταν επιτυχίες).

• Θα μελετήσουμε λοιπόν μεταβλητές των οποίων η τιμή καθορίζεται από το αποτέλεσμα κάποιου στοχαστικού πειράματος. Για το λόγο αυτό οι μεταβλητές αυτές καλούνται τυχαίες μεταβλητές.

**Ορισμός 1**

Κάθε απεικόνιση Χ από το δειγματικό χώρο Ω σε κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών R θα καλείται **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)**: Η τ.μ. Χ απεικονίζει κάθε στοιχείο ω του Ω στο X(ω)R

**Ορισμός 2**

• **Διακριτές**καλούνται οι τ.μ. που έχουν ως πεδίο τιμών κάποιο υποσύνολο του Ζ ή του Ν ή γενικότερα έχουν **αριθμήσιμο** πεδίο τιμών. Οι κατανομές των δ.τ.μ. καλούνται ***διακριτές κατανομές***.

• **Συνεχείς**καλούνται οι τ.μ. που έχουν ως πεδίο τιμών ένα **διάστημα** του R, ή όλο το R και επιπλέον έχουν **παραγωγίσιμες** **συναρτήσεις κατανομής** (δείτε σχετικό Ορισμό 4 πιο κάτω!). Οι κατανομές των σ.τ.μ. θα καλούνται ***συνεχείς κατανομές***

**Ορισμός 3**

Για δ.τ.μ. X, που παίρνει τις τιμές x1, x2, . . . , xκ,… , η συνάρτηση f(x) ορίζεται ως **η συνάρτηση** **πυκνότητας πιθανότητας** (**σ.π.π**) αν

 (1) f(x) ≥0*,* για κάθε x R

(**2**) To σύνολο {x : f(x) ≠ 0} είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του R (πεπερασμένο ή όχι!).

(**3**) =1 (1 ≤ κ ≤n ή 1 ≤ κ < +∞)

**ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ**(Η ΚΑΙ **ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ**) :

Aν f(x) είναι η σ.π.π. μιας δ.τ.μ. Χ τότε P(X=x)=f(x)

**Ορισμός 4**

Για δ.τ.μ. X, που παίρνει τις τιμές x1, x2, . . . , xκ,… , η συνάρτηση F(x)=, όπου f(x) είναι η σ.π.π. της X, ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής** (**σ.κ**.) της Χ.

**ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ**(Η ΚΑΙ **ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ**) :

Aν F : R→[0,1] είναι η σ.κ. μιας δ.τ.μ. Χ τότε F (x ) = P( X≤ x)=P( X{x1, x2,…x})

**Ορισμός 5**

Αν f(x) είναι η σ.π.π. μιας δ.τ.μ. Χ τότε ορίζουμε ως **Mέση Tιμή** της Χ και την συμβολίζουμε ως Ε(Χ) (ή μ) το άθροισμα (ίσως και μη πεπερασμένο) 

 

σ.1

****

**Ορισμός 6**

Αν f(x) είναι η σ.π.π. μιας δ.τ.μ. Χ τότε ορίζουμε ως **διακύμανση** (ή **διασπορά** ) της Χ και την συμβολίζουμε με Var(Χ), ή σ2 το άθροισμα (ίσως και μη πεπερασμένο) 

**Ορισμός 7**

Έστω Χ μια σ.τ.μ. με σ.π.π. f(x\ Ως **Mέση Τιμή** E(X ) (ή μ). ορίζουμε τον αριθμό E(X ) = , (Συγκρίνατε με **ορισμό 5**

**Ορισμός 8**

Η **διακύμανση** (ή **διασπορά** ) της Χ, με σύμβολο Var(Χ), ή , ή απλώς σ2 , ορίζεται από τη σχέση σ2 ,=E[(X − μ)2] =**** όπου έγινε χάριν ευκολίας χρήσητου μ αντί του E(X )

**Προσοχή**:

Η θετική τετραγωνική ρίζα τηςδιακύμανσης ,δηλαδή το σ= √Var(Χ είτε μιας δ.τ.μ είτε μιας σ.τ.μ Χ, καλείται **τυπική απόκλιση** .

**ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ(ΤΟΣΟ ΓΙΑ Δ.Τ.Μ. ΟΣΟ ΚΑΙ ΓΙΑ Σ.Τ.Μ.)**

Var(X ) = E(X 2 ) − μ2 (όπου μ= Ε(Χ))

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

• **Θα εξετάσουμε τις δοκιμές Bernoulli και** **2 είδη Διακριτών Κατανομών**:

 **Δοκιμές Bernoulli**

Ένα τυχαίο πείραμα θα λέγεται **πείραμα (ή δοκιμές) Bernoulli**αν είναι δυνατόν να καταλήξει σε ένα από δύο μόνο, ξένα μεταξύ τουs, ενδεχόμενα που η ένωσή τους αποτελεί τον δειγματικό χώρο..Συνήθως χρησιμοποιούμε τους όρους “ναι” ή “**Ε**πιτυχία” και “όχι“ ή “**Α**ποτυχία” για τα ενδεχόμενα αυτά και συμβολίζουμε με p = P(Ε) και q = 1-p = P(Α) , 0 ≤ p ≤ 1.

Ο δειγματικός χώρος, σε ένα πείραμα Bernoulli έχει δύο μόνο σημεία,{Ε,Α} (ή { S , F.})

**Δοκιμές** **Bernoulli** αποτελούν το στρίψιμο ενός νομίσματος (κεφάλι-γράμματα), η ποιότητα ενός βιομηχανικού προϊόντος (ελαττωματικό-μη ελαττωματικό), η γέννηση ενός παιδιού (αγόρι - κορίτσι) κ.λ.π

**Διωνυμική Κατανομή**

Για μία δ.τ.μ. Χ γράφουμε Χ~ b(x; n,p) και την καλούμε **Διωνυμική Κατανομή** όταν η σ.π.π, αυτής δίνεται από την f(x)=P(X=x)=  , όπου x=0,1,…,n, n=1,2,… 0<p<1 και q=1-p..

Όταν Χ~ b(x; n,p) τότε **η μέση τιμή** Ε(Χ)=np και η **διακύμανση**  Var(X)=npq,

**Κατανομή Poisson**

Για μία δ.τ.μ Χ γράφουμε Χ~ P(x; λ) και την καλούμε **Κατανομή Poissonμε παράμετρο**λ, όταν

η σ.π.π, αυτής δίνεται από την f(x)=P(X=x)=, όπου x=0,1,…και λ>0.

Όταν Χ~ P(x; λ) τότε **η μέση τιμή** Ε(Χ)= λ, αλλά και η **διακύμανση**  Var(X)=λ.

 

σ.2

****

**ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Η κατανομή Poisson είναι **προσέγγιση της διωνυμικής** κατανομής; Αν Χ~ b(x; n,p), n+∞ και

p0, έτσι ώστε npλ, όπου λ σταθερά >0, τότε P(X=x) .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

• **Θα εξετάσουμε** **3 είδη συνεχών κατανομών**:

**Την ομοιόμορφη ,την** **εκθετική και την κανονική**

**Η Ομοιόμιρφη Κατανομή**

H **απλούστερη συνεχής κατανομή** είναι η **ομοιόμορφη** η οποία αντιστοιχίζει **ίσες πιθανότητες** στα στοιχειώδη δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου συνεχούς πειράματος..Αν θεωρήσουμε μια σ.τ.μ.Χ ορισμένη σε κάποιο Ω με **πεδίο τιμών το διάστημα** [α, β] , όπου α < β, η Ομοιόμορφη Κατανομή (συμβολίζεται με U εκ του **Uniform**) εκφράζεται από τη σχέση P(x1 < X ≤ x2 ) =

 c(x2 − x1) , α ≤ x ≤ x ≤ β, όπου c **προσδιοριστέα σταθερά**. Θέτοντας x1 = α και x2 = β και χρησιμοποιώντας τη σχέση P(α < X ≤ β) = P(α ≤ X ≤ β) =1, συμπεραίνουμε ότι c=1/(β-α).

Η **συνάρτηση κατανομής** της σ.τ.μ. Χ, όπως προκύπτει από τα πιο πάνω είναι η εξής

 F(x) = {

**SOS ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Όταν η τυχαία μεταβλητή Χ είναι **συνεχής**, οπότε P(X = x) = 0 για κάθε x R , η αντιστοίχιση μιας πιθανότητας **δεν γίνεται σε σημεία** αλλά σε **διαστήματα** και είναι ανάλογη του μήκους των. Τούτο είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι «τα **ισομήκη** διαστήματα είναι **ισοπίθανα**».

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Χ έχει την **ομοιόμορφη** κατανομή U(α, β).Τότε η **μέση τιμή** και η διακύμανση αυτής δίδονται από τους τύπους E(X ) =  (=μ) και Var(X ) =, οπότε και η τυπική απόκλιση θα είναι σ=.)

 ****

**σ.3**

****

**Η Εκθετική Κατανομή.**

Έστω Χ μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π f(x)= {

όπου 0 < λ< +∞ . Η κατανομή της τ.μ. Χ καλείται **εκθετική με παράμετρο λ**.

(Συμβολισμός: X ~ Ε(λ)) .

Έστω ότι η τ.μ. Χ έχει την εκθετική κατανομή. Τότε η μέση τιμή της E(X)=1/λ και η διακύμανση σ2 (ή Var(X))= 1/λ², (οπότε και η τυπική απόκλιση θα είναι σ=1/λ).

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Η ΚANONIKH KATANOMH**

**.ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ**

Eίναι **η πιο σπουδαία κατανομή** της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, λόγω της ευρείας χρησιμότητάς της σε ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών.

Οι λόγους που εξηγούν την **εξέχουσα θέση της** είναι οι εξής:

**1**. Πολλά ανθρωπολογικά και δημογραφικά χαρακτηριστικά ακολουθούν σε μεγάλο βαθμό την Κ.Κ. (π.χ. ύψος, βάρος, βαθμολογία σε τεστ κ.λ.π.).

**2**.Πολλά σφάλματα μετρήσεων με όργανα έχουν Κ.Κ. (και εξ αυτού αναφέρεται πολλές φορές και ως **κατανομή σφαλμάτων!**)

**3**..Το **άθροισμα** και ο **μέσος όρος** **μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων** (**ανεξάρτητα** από το ποια κατανομή ακολουθούν**!)**ακολουθούν κατά προσέγγιση την ΚΚ

**4**.Κάτω από ορισμένες συνθήκες πολλές κατανομές, (**διακριτές** ή/και **συνεχείς**)**,** μπορούν

να προσεγγισθούν από την ΚΚ.

**ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΚ**

Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X θα λέμε ότι ακολουθεί την **Κανονική Kατανομή** με παραμέτρους μ, (−∞ < μ < ∞), και σ2 (σ2 > 0), αν η πυκνότητα f(x) της X δίνεται από τον τύπο f(x,μ, σ2)=.Συμβολίζεται αυτό ως X ~ N(μ,σ2)

 

σ.4



**ΠΡΟΣΟΧΗ** Η ιδιότητα της σ.π.π. 1, για να επαληθευθεί απαιτεί τη χρήση διπλών ολοκληρωμάτων κ.λ.π Εμείς έχουμε αποδείξει και θα το θεωρούμε δ**εδομένο** για **όλα** tα Eφαρμοσμένα Μαθηματικά μας ότι .

**ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ f(x,μ, σ²) ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ μ, σ2**

 Από το σχήμα καταλαβαίνουμε και το «παρατσούκλι» της Πληροφορικής**« Καμπάνα**» για το γράφημα **της** κάθεf(x,μ, σ²).

**ΠΡΟΣΟΧΗ**

1.Η κατανομή N(0,1) λέγεται **Tυποποιημένη Κανονική Kατανομή**. Μια τ.μ. X που ακολουθεί την TKK λέγετ συμβολίζεται συνήθως με Z (ή X).Τις αντίστοιχες **σ.π.π** και **σ.κ.** τις συμβολίζουμε *φ*(*z*)και *Φ*(*z*) (ή *φ*(*x*) και *Φ(Χ)*.όπως στο πιο πάνω **Σχήμα**) Επομένως, για την N(0,1) θα έχουμε *φ*(*z*) = και *Φ*(*z*)=  με −∞ < *z* < ∞..

2.,Ως **6η σελίδα του φυλλαδίου** τυπώστε και συρράψατε το αναρτημένο pdf έγγραφο με τίτλο

“Πίνακας Κατανομής Ν(0;1)”

**ΘΕΩΡΗΜΑ**(Αναμενόμενο λόγω επιλογής συμβολισμού!)

**Η μέση τιμή**, η **δια**κύμανση και η **τυπική απόκλιση**  μιας τ.μ.X~ N(μ,σ2) είναι ίσες με μ, σ2 και σ αντίστοιχα (δηλαδή E(X ) = μ, Var(X ) = σ 2 , √Var(X )=σ).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 

σ.5