# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εργαστήριο 7

**Μετασχηματισμός Ζ**

Αλέξανδρος Μανουσάκης

# Μετασχηματισμός Ζ

Χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση σημάτων.

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για:

- Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές
- Υπολογισμό απόκρισης
- Σχεδίαση γραμμικών φίλτρων

# Γιατί μετασχηματισμό Z;

Ο μετασχηματισμός Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

Για να συγκλίνει η παραπάνω σειρά είναι απαραίτητο η ακολουθία του σήματος να είναι απόλυτα συγκλίνουσα.

Πολλά σήματα δίνουν αθροίσματα που δεν συγκλίνουν απόλυτα και επομένως **ΔΕΝ** έχουν μετασχηματισμό Fourier (DTFT) όπως *u(n)*, *sin*($\omega_o$*n*)

# Μετασχηματισμός Z

Ο μετασχηματισμός **Z** είναι η γενίκευση του DTFT και επιτρέπει να χειριζόμαστε ακολουθίες στις οποίες δεν συγκλίνει ο μετασχηματισμός Fourier.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$ *,z=re*$^{j\omega}$ είναι μια μιγαδική μεταβλητή

Ο Μετασχηματισμός Z μπορεί να θεωρηθεί και ως ο DTFT μιας ακολουθίας πολλαπλασιασμένης με μια εκθετική ακολουθία

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ r^{-n} x(n) \right] e^{-j\omega n}$$

# Υπολογισμός μετασχηματισμού Ζ

Μετασχηματισμοί Ζ γνωστών ακολουθιών:

| Sequence | Z Transform |
|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ |
| $u(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| $a^n u(n)$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ |
| $na^n u(n)$ | $\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$ |

**Η ιδιότητα της μετατόπισης (shifting)**

$$x(n-n_0) \xrightarrow{Z} Z^{-n_0} x(z)$$

# Παράδειγμα

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της παρακάτω ακολουθίας:

- $x(n)=3u(n)+2\delta(n)$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα

| Sequence | Z Transform |
|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ |
| $u(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| $a^n u(n)$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ |
| $na^n u(n)$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ |

$$x(z)=\frac{3}{1-z^{-1}}+2$$

# Άσκηση 1

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z των παρακάτω ακολουθιών:

- $x(n)=3\delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n+2)$
- $x(n)=5u(n)$
- $x(n)=5(0.9)^n u(n)$
- $x(n)=2u(n-2)$
- $x(n)=3^{n+1}u(n+1)$

| Sequence | Z Transform |
|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ |
| $u(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| $a^n u(n)$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ |
| $na^n u(n)$ | $\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$ |

# Άσκηση 1

1. $x(n)=3\delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n+2)$ $\quad x(z) = 3 + z^{-2} + z^{2}$

2. $x(n)=5u(n)$ $\quad x(z) = \dfrac{5}{(1-z^{-1})}$

3. $x(n)=5(0.9)^{n}u(n)$ $\quad x(z) = \dfrac{5}{(1-0.9z^{-1})}$

4. $x(n)=2u(n-2)$ $\quad x(z) = \dfrac{2z^{-2}}{(1-z^{-1})}$

5. $x(n)=3^{n+1}u(n+1)$ $\quad x(z) = \dfrac{z}{(1-3z^{-1})}$

| Sequence | Z Transform |
|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ |
| $u(n)$ | $\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ |
| $a^{n}u(n)$ | $\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ |
| $na^{n}u(n)$ | $\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^{2}}$ |

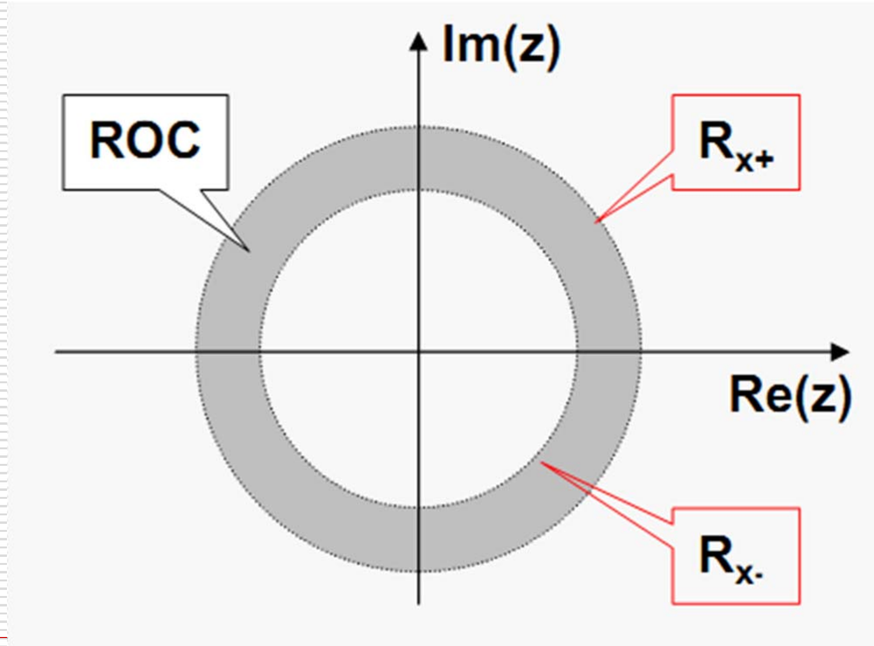
# Περιοχή σύγκλισης μετασχ. Z (ROC)

Το σύνολο των τιμών του z όπου συγκλίνει (δεν πάει στο άπειρο) το άθροισμα του μετασχηματισμού Z ορίζει μια περιοχή στο επίπεδο **z**, η οποία ονομάζεται **περιοχή σύγκλισης** ή Region Of Convergence (ROC).

Καθορίζεται από δύο θετικούς αριθμούς $R_{x+}$ και $R_{x-}$:

$$\mathbf{R_{x-} < |z| < R_{x+}}$$

*Οι ρίζες του αριθμητή ονομάζονται μηδενικά (zeroes) ενώ οι ρίζες του παρονομαστή ονομάζονται πόλοι (poles).*



# *tf2zp*: Transfer function to zero-pole conversion.

[Z,P,K] = tf2zp(NUM,DEN) finds the zeros, poles, and gains:

$$H(s) = K \frac{(s-z1)(s-z2)...(s-zn)}{(s-p1)(s-p2)...(s-pn)}$$

# *zplane*: Z-plane zero-pole plot

**zplane(Z,P)** plots the zeros Z and poles P (in column vectors) with the unit circle for reference. Each zero is represented with a 'o' and each pole with a 'x' on the plot. Multiple zeros and poles are indicated by the multiplicity number shown to the upper right of the zero or pole. zplane(Z,P) where Z and/or P is a matrix, plots the zeros or poles in different columns using the colors specified by the axes ColorOrder property.

**zplane(B,A)** where B and A are row vectors containing transfer function polynomial coefficients plots the poles and zeros of B(z)/A(z). Note that if B and A are both scalars they will be interpreted as Z and P.

# Άσκηση 2

- Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

# Άσκηση 2

```
num=[0 1 0];
den=[3 -4 1];
[z,p]=tf2zp(num,den)
figure(1)
zplane(num,den)
```

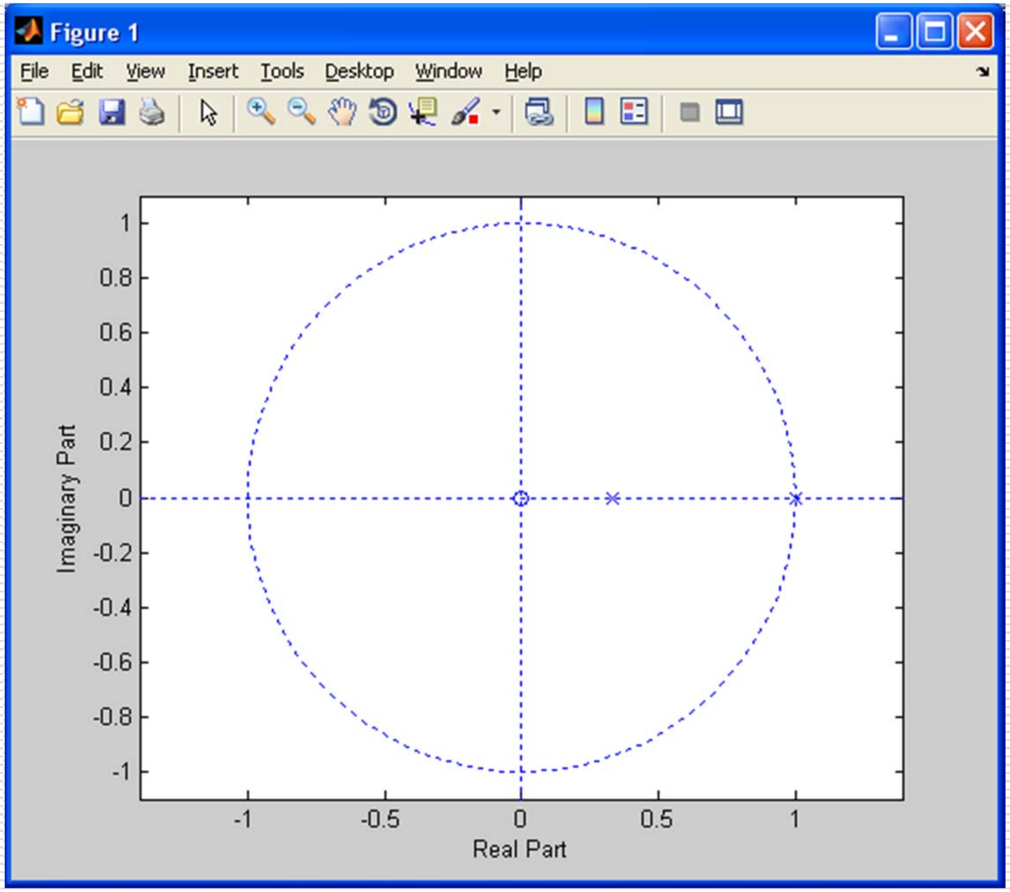
```
z = 0
p =[1.0000   0.3333]
```

**R.O.C.**

$0 \le |z| < 0.3333$

$0.3333 < |z| < 1$

$|z| > 1$



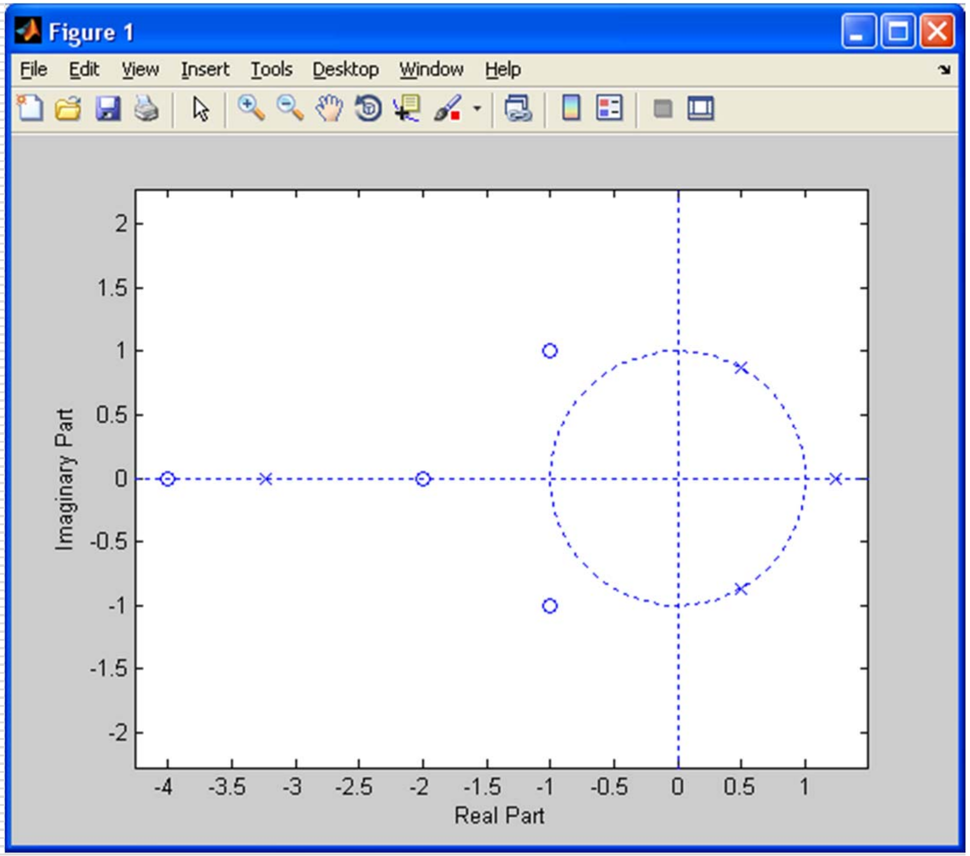
# Άσκηση 3

- Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2z^4 + 16z^3 + 44z^2 + 56z + 32}{3z^4 + 3z^3 - 15z^2 + 18z - 12}$$

# Άσκηση 3

```
num=[2 16 44 56 32]
den=[3 3 –15 18 –12]
[z,p]=tf2zp(num,den)
figure(1)
zplane(num,den)
```




```
p =
  -3.2361
   1.2361
   0.5000 + 0.8660i
   0.5000 - 0.8660i
```

*abs(p)=*
3.2361
1.2361
1.0000
1.0000

R.O.C.
0≤|z|<1
1<|z|<1.236
1.236<|z|<3.2361
3.2361<|z|