



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εργαστήριο 8

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

Αλέξανδρος Μανουσάκης

Αντίστροφος μετασχηματισμός Z

$$\mathbf{x}(z) \longrightarrow \mathbf{x}(n)$$

- Μια πρακτική προσέγγιση του προβλήματος υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Z είναι η ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων και στη συνέχεια η χρήση πινάκων με ήδη υπολογισμένους μετασχηματισμούς Z συνηθισμένων ακολουθιών.
-

Μετασχηματισμοί Z γνωστών ακολουθιών

Sequence	Z Transform
$\delta(n)$	1
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

Η ιδιότητα της μετατόπισης (shifting)

$$x(n - n_0) \xrightarrow{Z} Z^{-n_0} x(z)$$

residuez

- Η συνάρτηση *residuez* του Matlab “αναλύει” τη συνάρτηση μεταφοράς σε μερικά κλάσματα.
 - Παίρνει 2 ορίσματα εισόδου, τους συντελεστές του αριθμητή και του παρονομαστή σε φθίνουσα τάξη του z και μας δίνει 3 πίνακες (r,p,k) οι οποίοι περιέχουν τους συντελεστές για να γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε άθροισμα μερικών κλασμάτων
-

RESIDUEZ Z-transform partial-fraction expansion.

$[R,P,K] = \text{RESIDUEZ}(B,A)$ finds the residues, poles and direct terms of the partial-fraction expansion of $B(z)/A(z)$

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{r(1)}{1-p(1)z^{-1}} + \dots + \frac{r(n)}{1-p(n)z^{-1}} + k(1) + k(2)z^{-1} \dots$$

B and A are the numerator and denominator polynomial coefficients, respectively, in ascending powers of z^{-1} . R and P are column vectors containing the residues and poles, respectively.

Άσκηση 1

- Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

Αν καλέσουμε τη συνάρτηση `residuez`,
 $[r,p,k]=\text{residuez}([0 \ 1 \ 0],[3 \ -4 \ 1])$

Θα πάρουμε

$r=[0.5 \ -0.5],$

$p=[1 \ 0.333],$

$k=[]$

Άσκηση 1

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{r(1)}{1-p(1)z^{-1}} + \dots + \frac{r(n)}{1-p(n)z^{-1}} + k(1) + k(2)z^{-1} \dots$$

Αν αντικαταστήσουμε τώρα τα r , p , k που υπολογίσαμε στην παραπάνω σχέση, η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί:

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} = 0.5 \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} - 0.5 \cdot \frac{1}{1 - 0.333z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \xleftarrow{z} 1^n u(n)$$

$$\frac{1}{1 - 0.333z^{-1}} \xleftarrow{z} 0.333^n u(n)$$

Άσκηση 1

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} = 0.5 \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} - 0.5 \cdot \frac{1}{1 - 0.333z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \xleftarrow{z} 1^n u(n)$$

$$\frac{1}{1 - 0.333z^{-1}} \xleftarrow{z} 0.333^n u(n)$$

Sequence	Z Transform
$\delta(n)$	1
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$

$$G(n) = 0.5 \cdot u(n) - 0.5 \cdot 0.333^n u(n)$$

Άσκηση 2

- Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς

$$H(z) = \frac{18z^3}{18z^3 + 3z^2 - 4z - 1}$$

Καλούμε και πάλι τη συνάρτηση residuez

$[r,p,k]=\text{residuez}([18\ 0\ 0\ 0],[18\ 3\ -4\ -1])$

$r=[\ 0.3600\ \ 0.2400\ \ 0.4000]$

$p=[\ 0.5000\ \ -0.3333\ \ -0.3333]$

$k=[\]$

Άσκηση 2

- Αν μελετήσουμε προσεκτικά το help της συνάρτησης `residuez` και συγκεκριμένα την παράγραφο:

If $P(j) = \dots = P(j+m-1)$ is a pole of multiplicity m , then the expansion includes terms of the form

$$\frac{R(j)}{1 - P(j)z^{-1}} + \frac{R(j+1)}{(1 - P(j)z^{-1})^2} + \dots + \frac{R(j+m-1)}{(1 - P(j)z^{-1})^m}$$

Άσκηση 2

Δηλαδή αν στον πίνακα r που θα πάρουμε έχουμε παραπάνω από ένα πόλο ίδιο (όπως στην άσκηση μας που έχουμε 2 φορές το -0.3333) τότε αυτοί οι όροι θα πρέπει να γραφούν όπως φαίνεται παραπάνω. Έτσι έχουμε:

$$H(z) = 0.36 \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + 0.24 \frac{1}{1 + 0.333z^{-1}} + 0.4 \frac{1}{(1 + 0.333z^{-1})^2}$$

Άσκηση 2

Τα πρώτα 2 κλάσματα είναι της μορφής της 3ης γραμμής του πίνακα ενώ το τρίτο μερικό κλάσμα μπορεί να γίνει της μορφής της 4ης γραμμής του πίνακα αν πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε με το $-0.333z$ οπότε η συνάρτηση μεταφοράς θα γίνει:

$$H(z) = 0.36 \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + 0.24 \frac{1}{1 + 0.333z^{-1}} + \frac{0.4}{-0.333} z \frac{-0.333z^{-1}}{(1 + 0.333z^{-1})^2}$$

Άσκηση 2

Το κλάσμα $\frac{-0.333z^{-1}}{(1+0.333z^{-1})^2}$ έχει αντίστροφο μετασχηματισμό Z το

$$n(-0.333)^n u(n)$$

όμως στον 3ο όρο του αθροίσματος έχουμε ακόμα το $-\frac{0.4}{0.333}z$

*Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα **Sample Shifting** του μετασχηματισμού Z:* $z^{-n_o} X(z) = Z[x(n - n_o)]$

Εδώ το n_o είναι -1 αφού $z^{-(-1)} = z$ άρα

$$z \cdot X(z) = Z[x(n + 1)]$$

Αυτό σημαίνει ότι ο όρος $n(-0.333)^n u(n)$

θα γίνει $(n + 1)(-0.333)^{n+1} u(n + 1)$

Άσκηση 2

Και έτσι η συνάρτηση μεταφοράς της άσκησης θα γίνει τελικά:

$$H(n) = 0.36 \cdot 0.5^n u(n) + 0.24 \cdot (-0.333)^n u(n) - \frac{0.4}{0.333} \cdot (n+1)(-0.333)^{n+1} u(n+1)$$
