Απειροστικός Λογισμός Ι

Σετ Προβλημάτων 3

1. Αποδείξτε από το θεώρημα παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης ότι η παράγωγος της $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ είναι $f^{'}\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Εδώ **δεν** μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένο ότι η παράγωγος της $g\left(x\right)=x^{a}$ είναι $g^{'}\left(x\right)=ax^{a-1}$, παρά μόνο για $a$ θετικό ακέραιο.
2. Βρείτε την κλίση της εφαπτομένης σε ένα τυχαίο (μη ιδιόμορφο) σημείο $(x,y)$ των καμπυλών:

Α. $y^{4}-4x^{4}=4$

B. $x^{2}-4xy+y^{2}=y$

C. $e^{y}\cos(x)+e^{-x}\sin(y)=10$

1. Μια ορθογώνια πισίνα έχει μήκος 10m. Στην μια άκρη έχει βάθος 3m και στην άλλη έχει βάθος 1m, ενώ το πλάτος της είναι 5m. Αν νερό διοχετεύεται στην πισίνα με ρυθμό 300 λίτρα ανά λεπτό, με ποιο ρυθμό αυξάνεται η στάθμη του νερού όταν αυτό έχει βάθος 1.5m στο βαθύ άκρο της πισίνας;
2. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^{3}+x+1=0$ έχει μοναδική λύση στους πραγματικούς και υπολογίστε αυτή τη λύση με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton-Raphson
3. Η περίοδος του εκκρεμούς ενός ρολογιού τοίχου είναι $Τ=2π\sqrt{\frac{l}{g}}$ όπου $l$ είναι το μήκος σε μέτρα του εκκρεμούς και $g=9.8m/sec$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Αν υποθέσουμε ότι μια αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνει το μήκος $l$ κατά 1%, ποιο είναι το αντίστοιχο ποσοστιαίο σφάλμα στην περίοδο; Πόσο χρόνο θα χάνει το ρολόι κάθε μέρα;
4. Ένα φορτηγό έχει μέγιστη ταχύτητα 75mi/h και όταν ταξιδεύει με ταχύτητα $x$ mi/h καταναλώνει καύσιμα με ρυθμό $\frac{1}{200}\left(\frac{2500}{x}+x\right)$ γαλόνια ανά μίλι. Αν η τιμή του καυσίμου είναι $3.60/γαλόνι, βρείτε με ποια ταχύτητα πρέπει να ταξιδέψει το φορτηγό για μεγαλύτερη οικονομία, αν πρέπει να έχει ταχύτητα αναγκαστικά μεγαλύτερη από 10mi/h. Σχεδιάστε το κόστος σαν συνάρτηση της ταχύτητας