

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{\alpha_{11}} & \overset{-}{\alpha_{12}} & \overset{+}{\boxed{\alpha_{13}}} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}_{A_{11}} - \alpha_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}_{A_{12}} + \alpha_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}}_{A_{13}}$$

$$= \alpha_{11} (\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) - \alpha_{12} (\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{23}) + \alpha_{13} (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

3x3 ορίζεται άκριβή 3 υπολογισμούς 2x2 ορίσεων.

$$5 \times 5 = 5 (4 \times 4) = 5 \times 4 (3 \times 3) = 5 \times 4 \times 3 (2 \times 2)$$

$$= 60 (2 \times 2) \cdot 1 \quad \boxed{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$(n \times n) = n! (2 \times 2)$$

$$\begin{array}{l} \underline{A} \\ \underline{A+A^T} - \text{συμμετρικός} \\ \underline{A-A^T} - \text{αντισυμμετρικός} \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T) =$$

$$\frac{1}{2}[A + \cancel{A^T} + A - \cancel{A^T}] = \frac{1}{2}2A = A$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 2×2

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad \det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma$$

$$\eta \quad |A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

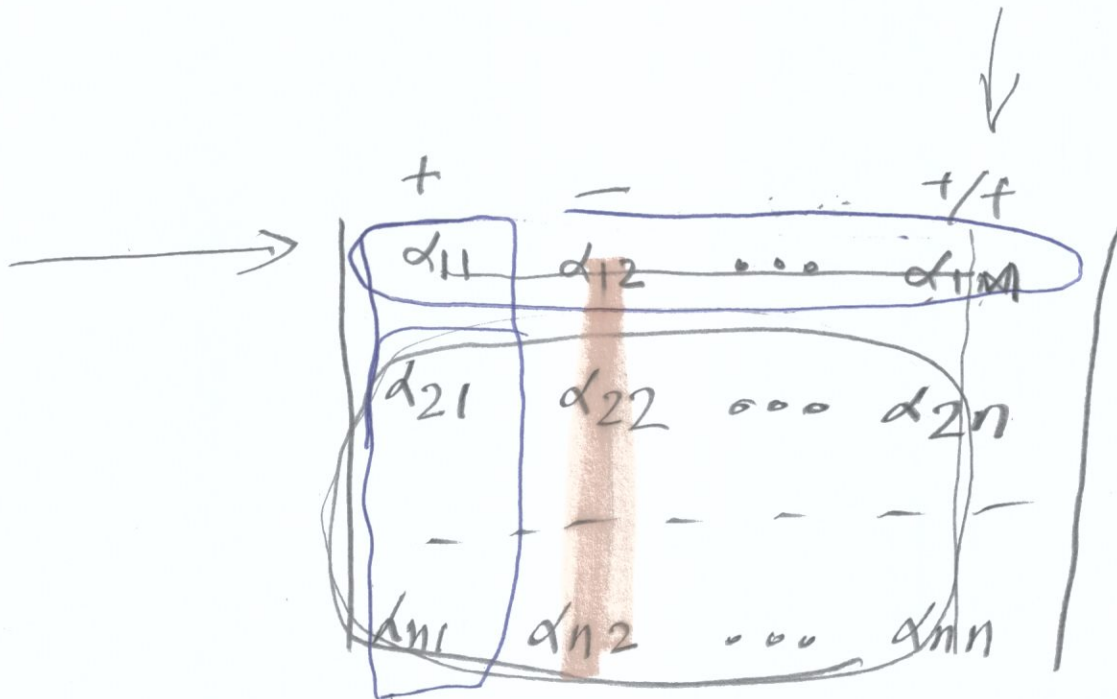
n x n ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩ

Ορισμός: Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας
 Η ορίζουσα του A ορίζεται ως ακολούθως:

i) αν $n=1$, δηλαδή $A = [a_{11}]$ τότε $|A| = a_{11}$

ii) αν $n > 1$, $|A| = (-1)^{(1+1)} a_{11} A_{11} + (-1)^{(1+2)} a_{12} A_{12} + \dots +$
 $+ (-1)^{(1+n)} a_{1n} A_{1n}$

$$\alpha_{11} A_{11} - \alpha_{12} A_{12} + \dots + \alpha_{1n} A_{1n}$$



$n \times n$ ανάγεται σε υπολογισμό n ανήκοντος
 $n-1 \times n-1$ ορίσμων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{array}{c|cc|c} -6 & 2 & 4 & 0 \\ \hline & 6 & 8 & +0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cc|c} 2 & 3 & 0 \\ \hline & 6 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{2} n!$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΩΝ

$$1. |A| = |A^T|$$

2. Αν αλλάξουμε δυο γραμμές (ή δυο στήλες) η ορίσουδα αλλάξει πρόσημο.

$$\text{Π. Χ.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Αν δυο γραμμές (ή δυο στήλες) της ορίσουδας είναι ίδιες η ορίσουδα είναι μηδέν.

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = 0$$

4. Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) με μια σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε η ορίζουσα πολλαπλαιάζεται με αυτή τη σταθερά λ .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή μιας στήλης) είναι άθροισμα δύο αριθμών τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δύο ορίσμενων ήτοι:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \gamma_1 & b_2 + \gamma_2 & b_3 + \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix}$$

6. ~~Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής~~
~~(ή~~

Αν προσθέσουμε σε μια γραμμή
 (ή μια στήλη) το πολλαπλάσιο
 μιας άλλης γραμμής (ή στήλης)
 η ορίζουσα παραμένει η ίδια.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 + \lambda \alpha_1 & b_2 + \lambda \alpha_2 & b_3 + \lambda \alpha_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda \alpha_1 & \lambda \alpha_2 & \lambda \alpha_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \rightarrow 0$$

$$\textcircled{\lambda} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \rightarrow 0$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε την ορίζουσα

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & x & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \cancel{x} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & x \end{vmatrix}$$

Λύση:

Αφαιρούμε την 1^η στήλη από τις υπόλοιπες

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x & \alpha-x & \alpha-x & \alpha-x \\ \alpha & x-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & x-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & x-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (x-\alpha) \begin{vmatrix} x & -1 & \alpha-x & \alpha-x \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & x-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & x-\alpha \end{vmatrix} = (x-\alpha)^2 \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & \alpha-x \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & x-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (x-\alpha)^3 \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-\alpha)^3 \cdot \left[\begin{matrix} 3 \\ 1+2 \\ (-1) \cdot (-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{matrix} 4 \\ 22 \\ (-1) \cdot 1 \end{matrix} \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= (x-\alpha)^3 \cdot \left[\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (x-\alpha)^3 \left[1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} x & -1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (x-\alpha)^3 \left[\alpha - (-1) \cdot \alpha + x - (-\alpha) \right] =$$

$$= (x-\alpha)^3 (\alpha + \alpha + x + \alpha) = (x-\alpha)^3 (x+3\alpha).$$

Οπότε:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x(x-2)[(x+1)^2+1] = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=2).$$

ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ Α.

ΜΕΘΟΔΟΣ 1^η: ΓΡΑΜΜΟΤΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟΝ ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΑ.

Έστω Α n×n πίνακας. Ο παρακάτω αλγόριθμος αποφαίνεται ότι είτε ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος, είτε βρίσκεται τον Α⁻¹.

Βήμα 1^ο: Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα n×2n Μ=(Α|Ι_n)

Βήμα 2^ο: Με γραμμοπράξεις ανάγουμε τον Μ σε κανονική μορφή. Αν εμφανιστεί μηδενική γραμμή στο 1^ο μισό του πίνακα Μ σταματάμε καθώς δεν υπάρχει αντιστροφος.

Βήμα 3^ο: Βρίσκουμε την κανονική μορφή (Ι_n|Β)

Βήμα 4^ο: Α⁻¹ = Β.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2^η: ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ:

$$|A| \neq 0 \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{2+1} A_{21} & \dots & (-1)^{n+1} A_{n1} \\ (-1)^{1+2} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & \dots & (-1)^{n+2} A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{1+n} A_{1n} & (-1)^{2+n} A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n} A_{nn} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3: Υπολογίστε τον ορίζοντα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Είναι $\det(A) = 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 1600$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΩΝ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

1. $|A| = |A^T|$
2. Αν αλλάξουμε δύο γραμμές ή στήλες η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο
3. Αν δύο γραμμές (ή στήλες) της ορίζουσας είναι ίδιες η ορίζουσα είναι μηδέν.
4. Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) με μια σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με αυτή τη σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή μιας στήλης) είναι άθροισμα δύο αριθμών τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δύο ορίζουσών.
6. Αν προσθέσουμε σε μια γραμμή (ή μια στήλη) το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) η ορίζουσα παραμένει ίδια.

* 7. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

* 8. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

* 9. Αν ο A είναι άνω ή κάτω τριγωνικός η ορίζουσα του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Είναι:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - \Sigma_1, \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_1 \\ \Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - \Sigma_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & x-1 \\ -1 & 1 & x+1 & 2 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & x-1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ x & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 = \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{vmatrix} -2 & -1 & x-1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ x-2 & 0 & x-2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & x-1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 = \Sigma_3 - \Sigma_1} \begin{vmatrix} -2 & -1 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & x+1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix} = x(x-2) \left[-1 - (x+1)^2 \right] = -x(x-2) \left[(x+1)^2 + 1 \right]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί αν υπάρχει ο A^{-1} .

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_1}]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_3}]{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3 \\ \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3}]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right] = (I_3 | A^{-1})$$

2) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5$$

$$|B| = 24$$

$$|\Gamma| = 12$$

$$A_{11} = 1 \quad A_{21} = -1 \quad A_{31} = -2$$

$$B_{11} = 6 \quad B_{21} = 0 \quad B_{31} = 0$$

$$A_{12} = 1 \quad A_{22} = 4 \quad A_{32} = -1$$

$$B_{12} = 0 \quad B_{22} = 12 \quad B_{32} = 0$$

$$A_{13} = 1 \quad A_{23} = 4 \quad A_{33} = -2$$

$$B_{13} = 0 \quad B_{23} = 0 \quad B_{33} = 8$$

$$\text{Οπότε } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{11} = 3 \quad \Gamma_{21} = 0 \quad \Gamma_{31} = 0$$

$$\Gamma_{12} = 0 \quad \Gamma_{22} = 4 \quad \Gamma_{32} = -4$$

$$\Gamma_{13} = 0 \quad \Gamma_{23} = 4 \quad \Gamma_{33} = 8$$

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \underline{\underline{R_3 \rightarrow R_3 + R_2}}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & -6 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \underline{\underline{\text{Stop}}}$$

Δεν υπάρχει ο A^{-1} . $\det(A) = 0$.

2^η Μέθοδος: Με χρήση στοιχειωμάτων πίνακα.

Έστω $A_{n \times n}$ πίνακας με $\det(A) \neq 0$.

Τότε ο A^{-1} δίνεται από:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{1+2} A_{21} & \dots & (-1)^{1+n} A_{n1} \\ (-1)^{2+1} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & \dots & (-1)^{2+n} A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} A_{1n} & (-1)^{n+2} A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n} A_{nn} \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα ο 3×3 Αντιστροφος

7.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΕΩΝ

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$8. \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$\left(A^{-1} \text{ υπάρχει} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \quad |A^{-1} \cdot A| = |I_n| = 1 \right. \\ \left. \xRightarrow{7} |A^{-1}| \cdot |A| = 1 \xRightarrow{|A| \neq 0} |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \right)$$

* 9. Αν ο πίνακας A είναι άνω (ή κάτω) τριγωνικός τότε η ορίζουσα του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

Παράδειγμα 3: Υπολογίστε την ορίζουσα του

πίνακα

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}_{4 \times 4}$$

$$\det(A) = 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10$$

$$|A| = \overset{1}{\cancel{(-1)^{1+1}}} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 4 \cdot \overset{1}{\cancel{(-1)^{1+1}}} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}_{2 \times 2} =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot (8 \cdot 10 - 9 \cdot 0) = 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10$$

Παράδειγμα 4: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix}_{4 \times 4} = 0$$

ΛΥΣΗ:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - \Sigma_1 \\ \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_1 \\ \Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - \Sigma_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & x-1 \\ -1 & 1 & x+1 & 2 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim x \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & x-1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ x & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1} x \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & x-1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ x-2 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$\sim x(x-2) \begin{vmatrix} -2 & -1 & x-1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_1} x(x-2) \begin{vmatrix} -2 & -1 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sim (-1) \cdot 1 \cdot x(x-2) \begin{vmatrix} -1 & x+1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix} = x(x-2) \begin{bmatrix} -1 - (x+1)^2 \\ - (1 + (x+1)^2) \end{bmatrix} =$$

$$= -x(x-2) \left[(x+1)^2 + 1 \right].$$

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x(x-2) \left[(x+1)^2 + 1 \right].$$

$$\Delta(x) = 0 \iff -x(x-2) \underbrace{\left[(x+1)^2 + 1 \right]}_{>1} = 0. \iff$$

$$\iff -x(x-2) = 0 \quad (\text{καθώς } (x+1)^2 + 1 > 1). \iff$$

$$\iff (x=0 \text{ ή } x=2)$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

$$|A| = \begin{cases} \neq 0, & \text{υπάρχει } A^{-1} \\ 0, & \text{δεν υπάρχει } A^{-1} \end{cases}$$

1^η Μέθοδος : ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline \end{array} \right)_{n \times 2n}$$

Επαυξημένος πίνακας

με στοιχειώδεις πράξεις

να καταλήξω

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline \end{array} \right)$$

Κανονική μορφή
του επαυξημένου
πίνακα

Τότε $B = A^{-1}$.

Αν κατά τη διαδικασία εμφανιστεί στο πρώτο
μέλος του επαυξημένου πίνακα μηδενική γραμμή,
τότε σταματά η διαδικασία καθώς δεν υπάρχει
αντίστροφος.

Παράδειγμα 5: Να βρεθεί αν υπάρχει ο
αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

ΛΥΣΗ:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_3 \\ \hline \end{array} \right) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2 \\ \hline \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\underline{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \underline{\Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \textcircled{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\underline{\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_3} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A}$$

Παράδειγμα 6: Να βρεθεί αν υπάρχει ο
αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{4} & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_1 \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -1$$

$$A_{31} = -2$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = 4$$

$$A_{32} = -7$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = 4$$

$$A_{33} = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 4/5 & 7/5 \\ 1/5 & -4/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπάρχουν οι B^{-1} , Γ^{-1} ή όχι

βρείτε τους.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ - ΛΥΣΗ

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_n$$

$$AX = B$$

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1^η ΜΕΘΟΔΟΣ: Με ορίσους (Cramer, $m=n$).

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$X_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$D = \det(A) = \begin{cases} \neq 0, & \text{μοναδική λύση} \\ = 0, & \text{δεν έχει λύση ή άπειρες λύσεις.} \end{cases}$$

i) $D = \det(A) \neq 0$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$$

Μέθοδος Cramer.

ii) $D=0$ και υπάρχει κάποια $Dx_k \neq 0$
 $1 \leq k \leq n$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο

iii) $D=0$ και $Dx_k=0$ για κάθε $k=1,2,\dots,n$
τότε το σύστημα είναι αδύνατο (ή πολλές λύσεις).

Παράδειγμα 7: Να λυθεί το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} 5x + 11y - 21z &= -22 \\ x + 2y - 4z &= -4 \\ 3x - 2y + 3z &= 11 \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

ΛΥΣΗ:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 11 & -21 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} -22 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 11 & -21 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -22 & 11 & -21 \\ -4 & 2 & -4 \\ 11 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -14$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & 11 & -22 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -22 & -21 \\ 1 & -4 & -4 \\ 3 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{-7} = -1$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

Παράδειγμα, 8: Να διερευνηθεί αν υπάρχουν
τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το
ακόλουθο σύστημα να έχει λύση

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + 3z &= \alpha \\ 4x + 5y + 6z &= \beta \\ 7x + 8y + 9z &= \gamma \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

Λύση: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$

$$D_x = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 3 \\ \beta & 5 & 6 \\ \gamma & 8 & 9 \end{vmatrix} = \dots \Rightarrow D_x = 3 \cdot (2\beta - \alpha - \gamma)$$

Για να έχει λύση το (Σ) πρέπει $D_x = 0$.

ή ισοδύναμα $2\beta - \alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{2\beta = \alpha + \gamma} *$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 4 & \beta & 6 \\ 7 & \gamma & 9 \end{vmatrix} = \dots = 6(\alpha + \gamma - 2\beta) \stackrel{(*)}{=} 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 4 & 5 & \beta \\ 7 & 8 & \gamma \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 3 & 3 & \beta - \alpha \\ 0 & 0 & \alpha + \gamma - 2\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 3 & 3 & \beta - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$DZ = 0.$$

Άρα το (Σ) έχει λύση αν και μόνο αν $2b = a + \gamma$.

Στην περίπτωση που $2b \neq a + \gamma$ το (Σ) είναι αδύνατο.

Στην περίπτωση $2b = a + \gamma$, βρεγίτ τις λύσεις

2^η ΜΕΘΟΔΟΣ : Με αντιστρεφόμενο πίνακα ($m=n$)

$$\underset{n \times n}{A} \underset{n \times 1}{X} = \underset{n \times 1}{B} \quad (\Sigma)$$

$$ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$$

$$x = a^{-1} \cdot b$$

$$\boxed{\frac{1}{a} = a^{-1}}$$

→ Αν ο πίνακας A αντιστρέφεται υπάρχει

ο A^{-1} . Τότε το σύστημα (Σ) έχει

μοναδική λύση: $\underbrace{A^{-1}A}_I X = A^{-1}B \Rightarrow$

$$\Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Παράδειγμα 9: Να λυθεί το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

ΛΥΣΗ:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \det(A) = 4 \neq 0$$

Αφού $\det(A) \neq 0$ υπάρχει ο A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{4}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

3^η ΜΕΘΟΔΟΣ : Gauss-Jordan (η και η τυχάλα)

ΟΡΙΣΜΟΣ (κανονική μορφή κλιμακωτού Πίνακα)

Θα αποκαλούμε πίνακα σε κανονική κλιμακωτή μορφή κάθε πίνακ του οποίου :

i) το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι το 1.

ii) με εξαίρεση τις εξ ολοκλήρου μηδενικές γραμμές τα 1 βαίνουν κατερχόμενα προς τα δεξιά

iii) οι μηδενικές γραμμές έπονται αυτών που περιέχουν το 1.

* iv) το μόνο μη μηδενικό στοιχείο κάθε στήλης ενός κλιμακωτού πίνακα είναι το 1 τότε ο πίνακας μας καλείται ανηχημένος κλιμακωτός

ή Gauss κλιμακωτός.

$$\begin{array}{l} \text{αδω} = \text{αδηγί} \\ \text{ανδ} + \uparrow = \text{ανδω} \end{array} , \quad \begin{array}{l} \text{η} \text{ γαρον} = \text{αδηγούδα} \\ \text{ανδ} + \uparrow = \text{ανηγρον} \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{c|c} I & A \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} I & Y \end{array} \right)$$

Παράδειγμα

Ο μοναδιαίος πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

είναι Gauss κλιμακωτός.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \rightarrow 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Δεν είναι σε κανονική κλιμακωτή μορφή.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} \end{bmatrix}$

κλιμακωτός όχι

$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

κλιμακωτός ναι!