Παράδειγμα 11: Να λυθεί, με τη μέθοδο Gauss-Jordan το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\Sigma)$$

ΛΥΣΗ:

$$\underset{3\times4}{A}\ \underset{4\times1}{X} = \underset{3\times1}{b}$$

1) Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|b]$ ήτοι

2) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\quad A' \qquad\qquad b'$$

3) Το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο το:

$$(\Sigma') \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_3 - 7x_4 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\ x_3 = -7 + 7x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - x_2 + 2(-7 + 7x_4) - 4x_4 \\ x_3 = -7 + 7x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -9 - x_2 + 10x_4 \\ x_3 = -7 + 7x_4 \end{cases}$$

Άπειρες λύσεις x_2, x_4 (ελεύθεροι άγνωστοι) αυθαίρετες σταθερές

Παράδειγμα 12: Να λυθεί το σύστημα $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{3\times 4}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X_{4\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b_{3\times 1}}$

με τη μέθοδο Gauss-Jordan

Λύση:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 5\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A' \qquad\qquad b'$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad + \tfrac{7}{2}x_4 &= \tfrac{9}{2} \\ x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_4 \\ x_2 &= \tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2}x_4 \\ x_3 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_4 \end{aligned}$$

Άπειρες λύσεις $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \left(0, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^T + \left(1, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T x_4$

$x_4 \in \mathbb{R}$.

Κριτήριο Παραγοντοποιήσης **LU** και Αλγόριθμοι

Η παραγοντοποιήση LU ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι δυνατή όταν δεν παρουσιάζονται μηδενικά οδηγά στοιχεία. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την παρουσία μη μηδενικών κυρίων υποοριζουσών του A, όπως αποδεικνύεται και στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1

Ένας πίνακας $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *έχει παραγοντοποίηση* LU *όταν για κάθε* $\mathrm{k} = 1,2,\ldots,\nu-1$, *η κύρια υποορίζουσα* $\det(\mathrm{A}(1:\mathrm{k},1:\mathrm{k}))$, *που σχηματίζεται από τις* k *πρώτες γραμμές και τις* k *πρώτες στήλες του* A, *είναι μη μηδενική. Επιπλέον, αν η παραγοντοποιηση* LU *υπάρχει και ο* A *είναι αντιστρέψιμος, τότε η παραγοντοποίηση* LU *είναι μοναδική.*

-3-

Εφαρμογές και Σχόλια

Αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ έχει παραγοντοποιηθεί στη μορφή LU, $A = LU$, τότε κάθε γραμμικό σύστημα

$$Ax = \beta \ \Leftrightarrow \ LUx = \beta$$

επιλύεται εύκολα σε δύο βήματα. Αρχικά λύνουμε το κάτω τριγωνικό σύστημα $Ly = \beta$, και στη συνέχεια, το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = y$. Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι οι υπολογιστικές απαιτήσεις της παραγοντο- ποίησης LU και της απαλοιφής Gauss ταυτίζονται. Το κέρδος της παραγοντοποί- ησης LU είναι σημαντικό όταν πρέπει να λύσουμε ταυτόχρονα περισσότερα από ένα συστήματα με τον ίδιο πίνακα A.

–4–

Ανάλυση LU

Η τριγωνοποίηση ενός πίνακα A στην απαλοιφή Gauss μπορεί να διατυπωθεί ως ανάλυση του A σε γινόμενο πινάκων.

Αν υποθέσουμε ότι **δεν** γίνονται εναλλαγές γραμμών τότε

$$A = LU$$

όπου L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικός πίνακας

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ 0 & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_{nn} \end{pmatrix}}_{U}$$

Ανάλυση LU

$$A = LU$$

Ο πίνακας U θα είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας $A^{(n)}$ που προκύπτει από τη διαδικασία της τριγωνοποίησης

Ο κάτω τριγωνικός πίνακας L θα περιέχει τους πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιήσαμε κατά τη διαδικασία της απαλοιφής Gauss.

Ανάλυση LU

Στην περίπτωση που χρειάζονται να γίνουν εναλλαγές γραμμών κατά τη διαδικασία της απαλοιφής Gauss, αυτές αναπαραστώνται με έναν πίνακα μετάθεσης P.

Ενας πίνακας μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ προκύπτει αν εφαρμόσουμε εναλλαγές γραμμών στο μοναδιαίο πίνακα $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Π.χ. αν στον $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, μεταθέσουμε την 1η με την 3η γραμμή, τότε

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και το γινόμενο PA, δίνει έναν νέο πίνακα στον οποίο έχει γίνει μετάθεση ανάμεσα στην 1η γραμμή και 3η γραμμή του A.

Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις εναλλαγές γραμμών που πρέπει να εφαρμόσουμε για να ολοκληρωθεί η απαλλοιφή Gauss, τότε $PA = LU$

Ανάλυση LU

Για ευκολία ας υποθέσουμε ότι για τον $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ολοκληρώνεται η απαλοιφή Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών.

Θέτουμε $M_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου m_{i1}, $i = 2, \dots, n$ οι πολλαπλασιαστές του 1ου βήματος της απαλοιφής Gauss. Τότε ισχύει

$$M_1 A = A^{(2)}$$

Ανάλυση LU

Παράδειγμα

Ας δούμε ένα παράδειγμα για ένα πίνακα 2×2

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - m_{21} a_{12} \end{pmatrix}$$

Ανάλυση LU

Στη συνέχεια για το επόμενο βήμα της τριγωνοποίησης, θέτουμε $M_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου m_{i2}, $i = 3, \dots, n$, οι πολλαπλασιαστές του 2ου βήματος της απαλοιφής Gauss.

$$M_2 A^{(2)} = M_2 M_1 A = A^{(3)}$$

Ανάλυση LU

Συνεχίζοντας,

$$M_{n-1} \dots M_2 M_1 A = A^{(n)}$$

όπου ο $M_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $r = 1, \dots, n-1$ έχει στοιχεία

$$(M_r)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -m_{ir}, & i = r+1, r+2, \dots, n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ανάλυση LU

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι πίνακες M_r, $r = 1, 2, \ldots, n-1$ είναι αντιστρέψιμοι ($\det(M_r) \neq 0$)

$$(M_r^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ m_{ir}, & i = r+1, r+2, \ldots, n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε η σχέση

$$M_{n-1} \ldots M_1 A = A^{(n)}$$

οδηγεί

$$A = M_1^{-1} \ldots M_{n-1}^{-1} A^{(n)}$$

Ανάλυση LU

Γνωρίζουμε ότι ο $A^{(n)}$ είναι άνω τριγωνικός. Επίσης μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

$$M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο. Οπότε θέτουμε $U = A^{(n)}$ και $L = M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$ και ισχύει

$$A = LU$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι οι L, U είναι μοναδικοί. (Ασκηση)

Ανάλυση LU

Ως "ανάλυση LU" του πίνακα A καλούμε την ιδιότητα $A = LU$, με L κάτω τριγωνικό με 1 στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικό με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ 0 & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_{nn} \end{pmatrix}}_{U}$$

Ανάλυση LU

Λόγω αυτής της ιδιότητας, θα πρέπει τα στοιχεία των $L = (l_{ij})_{i,j=1}^{n}$ και $U = (v_{ij})_{i,j=1}^{n}$ να ικανοποιούν

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} v_{kj}, i, j = 1, \ldots, n$$

και επειδή ο L είναι κάτω τριγωνικός και ο U άνω τριγωνικός

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} v_{kj}, i, j = 1, \ldots, n$$

Ανάλυση LU

Αλγόριθμος ανάλυσης LU

Επειδή L κάτω τριγωνικός και ο U άνω τριγωνικός μπορούμε να βρούμε τα στοιχεία τους σύμφωνα με τον ακόλουθο αλγόριθμο.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ 0 & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_{nn} \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}$$

Θα υπολογίσουμε τα στοιχεία των L και U κατά γραμμές.

- 1η γραμμή

$$l_{11}v_{11} = a_{11} \Rightarrow v_{11} = a_{11}$$

$$l_{11}v_{12} = a_{12} \Rightarrow v_{12} = a_{12},$$

κ.ο.κ. για τα στοιχεία της 1ης γραμμής του A.

Ανάλυση LU

Αλγόριθμος ανάλυσης LU

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ 0 & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_{nn} \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}$$

- Εχουμε ήδη δημιουργήσει τα στοιχεία της 1ης γραμμής των L και U και συνεχίζουμε να βρούμε αυτά της 2ης γραμμής

$$\begin{aligned} l_{21}v_{11} = a_{21} &\Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{v_{11}} \\ l_{21}v_{12} + l_{22}v_{22} = a_{22} &\Rightarrow v_{22} = a_{22} - l_{21}v_{12}, \\ & \quad v_{2j} = a_{2j} - l_{21}v_{1j}, \quad j = 3, \dots, n \end{aligned}$$

Ανάλυση LU

Αλγόριθμος ανάλυσης LU

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ 0 & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_{nn} \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}$$

- Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τα στοιχεία της 3ης γραμμής κ.ο.κ.

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{v_{11}}, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}v_{12}}{v_{22}}$$

$$v_{3j} = a_{3j} - l_{31}v_{1j} - l_{32}v_{2j}, \quad j = 3, \dots, n$$

-8-

Αλγόριθμος ανάλυσης LU

κατά γραμμές

Για $i = 1, 2, ..., n$

Για $j = 1, 2, ..., i-1$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\upsilon_{kj})/\upsilon_{jj}$$

$l_{ii} = 1$

Για $j = i, i+1, ..., n$

$$\upsilon_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\upsilon_{kj}$$

Μπορούμε να γράψουμε και έναν ανάλογο αλγόριθμο, όπου υπολογίζουμε τα στοιχεία των πινάκων L και U κατά στήλες.

<u>Παράδειγμα 14:</u> Έστω $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε την ανάλυση LU του A.

<u>ΛΥΣΗ:</u> Επειδή έχω μηδενικό στην κύρια διαγώνιο αντιμεταθέτω τις δύο πρώτες γραμμές του πίνακα A και μετά κάνω τον αλγόριθμο της παραγοντοποίησης LU. Δηλαδή

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = LU =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21}u_{12}+u_{22} & \ell_{21}u_{13}+u_{23} \\ \ell_{31}u_{11} & \ell_{31}u_{12}+\ell_{32}u_{22} & \ell_{31}u_{13}+\ell_{32}u_{23}+u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} u_{11}=1, & u_{12}=-2, & u_{13}=4 \\ \ell_{21}u_{11}=0, & \ell_{21}u_{12}+u_{22}=2 & \ell_{21}u_{13}+u_{23}=1 \\ \ell_{31}u_{11}=4, & \ell_{31}u_{12}+\ell_{32}u_{22}=-1 & \ell_{31}u_{13}+\ell_{32}u_{23}+u_{33}=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} u_{11}=1 & u_{12}=-2 & u_{13}=4 \\ \ell_{21}=0 & u_{22}=2 & u_{23}=1 \\ \ell_{31}=4 & -8+2\ell_{32}=-1 & 16+\ell_{32}+u_{33}=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} u_{11}=1 & u_{12}=-2 & u_{13}=4 \\ \ell_{21}=0 & u_{22}=2 & u_{23}=1 \\ \ell_{31}=4 & \ell_{32}=7/2 & u_{33}=2-16-\frac{7}{2}=-\frac{35}{2} \end{array} \right\}$$

Άρα $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7/2 & 1 \end{bmatrix}$ και $U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -35/2 \end{bmatrix}$.

Προσοχή ξανά! Εδώ $P \cdot A = L \cdot U$!

Ορισμός 1: Έστω πίνακας A $n \times n$ με στοιχεία (a_{ij}) $i,j = 1, 2, \ldots, n$. Λέμε ότι ο A έχει <u>ΑΥΣΤΗΡΑ</u> ΚΥΡΙ<u>ΑΡΧΙΚΗ</u> <u>ΔΙΑΓΩΝΙΟ</u>

όταν:
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}| \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots n.$$

Ορισμός 2: Ένας πίνακας A $n \times n$ λέγεται <u>ΘΕΤΙΚΑ</u> <u>ΟΡΙΣΜΕΝΟΣ</u> όταν για κάθε $n \times 1$ διάνυσμα $x \neq 0$ ισχύει

$$x^T A x > 0.$$

(Θετικά ημιορισμένος όταν $x^T A x \geq 0$).

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u>

1) Αν ο A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος.

2) Αν ο A είναι θετικά ορισμένος τότε είναι αντιστρέψιμος

3) Τα διαγώνια στοιχεία των θετικά ορισμένων πινάκων είναι <u>θετικά</u>.

<u>Ανάλυση</u> <u>Cholesky</u> = (ανάλυση LU για συμμετρικούς nxn πίνακες) και θετικά ορισμένους πίνακες.

Συμμετρικός πίνακας $A = A^T$

$$A = LU \xlongequal{U = L^T} A = L \cdot L^T$$

<u>ανάλυση Cholesky</u>

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Βρείτε την ανάλυση LU του A.

ΛΥΣΗ Εναλλάσσω τις δύο πρώτες γραμμές: $A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ επειδή $\det(A') \neq 0$

και δεν έχω μηδέν στη κύρια διαγώνιο μπορώ να βρω L και U ώστε $A' = LU$.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(P) = -1$$

$$P \cdot A = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{P} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}}^{A} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A'$$

$$PA = A' = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} U_{11} = 1, & U_{12} = -2, & U_{13} = 4 \\ l_{21} U_{11} = 0, & l_{21} U_{12} + U_{22} = 2, & l_{21} U_{13} + U_{23} = 1 \\ l_{31} U_{11} = 4, & l_{31} U_{12} + l_{32} U_{22} = -1, & l_{31} U_{13} + l_{32} U_{23} + U_{33} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} U_{11} = 1, & U_{12} = -2, & U_{13} = 4 \\ l_{21} = 0, & U_{22} = 2, & U_{23} = 1 \\ l_{31} = 4, & l_{32} = 7/2, & U_{33} = -\frac{35}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\overset{4}{l_{31}} \overset{-2}{U_{12}} + l_{32} \overset{2}{U_{22}} = -1 \Rightarrow 4(-2) + 2 l_{32} = -1$$

$$\Rightarrow -8 + 2 l_{32} = -1 \Rightarrow 2 l_{32} = 7 \Rightarrow l_{32} = 7/2$$

Άρα

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{35}{2} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς $P \cdot A = L \cdot U$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$