ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ (Διανυσματικός Χώρος)

Έστω σύνολο Δ μη κενό και έστω ένα σώμα K.
Το Δ καλείται διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολ/σμού $\left[\begin{array}{l} \text{δηλαδή} \\ \forall x,y \in \Delta \quad x+y \in \Delta \\ \forall x \in \Delta, \kappa \in K \quad \kappa x \in \Delta \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} \\ \text{πρόσθεση} \\ \text{βαθ. πολ/σμω} \end{array}$

αν και μόνο αν ισχύουν όλα τα ακόλουθα:

1. $\forall x, y, z \in \Delta \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ προσεταιριστική
2. $\forall x, y \in \Delta \quad x+y = y+x$ αντιμεταθετικότητα
3. $\forall x \in \Delta \ \exists 0 \in \Delta: \quad x+0 = 0+x = x$ ύπαρξη ουδετέρου πρ.
4. $\forall x \in \Delta \ \exists -x \in \Delta: \quad x+(-x) = 0$ ύπαρξη αντιστρόφου
5. $\forall x \in \Delta \ \exists 1 \in K: \quad 1 \cdot x = x$ ύπαρξη μοναδιαίου πολ/σμού
6. $\forall x, y \in \Delta \ \forall \kappa \in K: \quad \kappa(x+y) = \kappa x + \kappa y$ αριστ. επιμεριστική
7. $\forall x \in \Delta \ \forall \kappa, \lambda \in K: \quad (\kappa+\lambda)x = \kappa x + \lambda x$ δεξ. επιμεριστ.
8. $\forall x \in \Delta \ \forall \kappa, \lambda \in K \quad (\kappa\lambda)x = \kappa(\lambda x)$

- Τα στοιχεία του Δ ονομάζονται διανύσματα
- Το σώμα K είναι συνήθως το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$

ΟΡΙΣΜΟΣ (ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΧΩΡΟΣ)

Ένα μη κενό υποσύνολο E του διανυσματικού χώρου Δ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του Δ ακριβώς τότε όταν είναι το E διανυσματικός χώρος με πράξεις αυτές που έχουν οριστεί στο Δ. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι:

$$\boxed{\forall x, y \in E, \ \forall \kappa, \lambda \in K \quad \kappa x + \lambda y \in E}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω διανυσματικός χώρος Δ και έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Delta$

Το σύνολο $E = \{ x : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n, \lambda_i \in K\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του Δ και συμβολίζεται με $\text{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ λέγονται γεννήτορες του E ενώ το διάνυσμα x ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν E_1, E_2 είναι υπόχωροι του Δ τότε και το $E_1 \cap E_2$ είναι υπόχωρος του Δ. Προσοχή το $E_1 \cup E_2$ δεν είναι εν γένει υπόχωρος του Δ.

Παραδείγματα (διανυσματικών χώρων)

1. Τα σημεία μιας ευθείας (ε) ή ενός επιπέδου (π) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι διανυσματικός χώρος με τις γνωστές πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολ/σμού. Προσοχή εάν η ευθεία (ε) ή το επίπεδο (π) δεν περνούν από την αρχή των άξόνων τότε ΔΕΝ αποτελούν διανυσματικό χώρο αφού δεν περιέχουν το μηδενικό διάνυσμα **0**.

2. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου στο πρώτο τεταρτημόριο $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος. Αν $x = (1, 1)$ τότε το διάνυσμα $(-1) \cdot x = (-1, -1)$ δεν ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο.

3. Το σύνολο Π_ν των πολυωνύμων βαθμού το πολύ ν είναι διανυσματικός χώρος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/σμού.

4. Το σύνολο των πινάκων $m \times n$ με πράξεις την πρόσθεση πινάκων και τον πολ/σμο πίνακα επί σταθερά είναι διανυσματικός χώρος.

2. Το σύνολο $E_1 + E_2 = \{ x_1 + x_2 : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \}$ ονομάζεται άθροισμα των υπόχωρων E_1 και E_2 και είναι με τη σειρά του διανυσματικός υπόχωρος του Δ.

3. Αν E_1, E_2 υπόχωροι του Δ τέτοιοι ώστε $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$ μηδενικό στοιχείο

τότε ο υπόχωρος $E_1 + E_2$ ονομάζεται <u>ευθύ</u> άθροισμα των E_1 και E_2 και συμβολίζεται με $E_1 \oplus E_2$

Παραδείγματα διανυσματικών υπόχωρων

1. Τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,1)^T$ είναι γεννήτορες του $\mathbb{R}^3$ γιατί για κάθε διάνυσμα $x = (\alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$x = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3$$

Αν $\gamma = 0$, το σύνολο των διανυσμάτων

$$x = (\alpha, \beta, 0)^T$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

2. Τα μονώνυμα $1, x, x^2, \ldots, x^n$ είναι γεννήτορες του Π_n (διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n)

3. Στο επίπεδο Oxy το σύνολο των σημείων του μοναδιαίου δίσκου έχουν την ιδιότητα $x^2+y^2 \leq 1$. Το σύνολο αυτό δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί το σημείο $(\frac{1}{2}, 0)$, $3(\frac{1}{2}, 0) = (\frac{3}{2}, 0)$ είναι εκτός δίσκου.

4. Αν W είναι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής $(\kappa+3\lambda, \ \kappa-\lambda, \ 2\kappa-\lambda, \ 4\lambda)^T$ έχουμε ότι:

$\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{bmatrix} \kappa+3\lambda \\ \kappa-\lambda \\ 2\kappa-\lambda \\ 4\lambda \end{bmatrix} = \kappa \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\eta_1} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\eta_2}$$

Η παραπάνω ισότητα δείχνει ότι:
$$W = \text{span}\{\eta_1, \eta_2\}$$
είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, καθώς $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^4$

5. Το σύνολο $E = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
Πράγματι: για οποιαδήποτε στοιχεία $(x, -x)$ και $(y, -y) \in E$ έχουμε ότι: $(x, -x) + (y, -y) = (x+y, -x-y) =$

$= (x+y, -(x+y)) \in E$ και

$$k(x,-x) = (kx, -kx) \in E \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Ο υπόχωρος E είναι το σύνολο των συγγραμμικών διανυσμάτων του $(1,-1)$. [βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=-x$]

6. Το σύνολο των πινάκων $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των 2×2 πινάκων. Δοκιμάστε να το αποδείξετε.

7. Έστω A $m\times n$ πίνακας, το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $Ax = \mathbb{0}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Για να το διαπιστώσουμε αυτό θεωρούμε δύο λύσεις x_1, x_2 του ομογενούς συστήματος $Ax=\mathbb{0}$

Τότε: $\quad A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \mathbb{0}+\mathbb{0} = \mathbb{0}$

$\forall k \in \mathbb{R}$: $\quad A(kx_1) = k(Ax_1) = k\cdot\mathbb{0} = \mathbb{0}$

Συμπεραίνουμε ότι οι x_1+x_2 και κx_1 είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος, οπότε όντως το σύνολο λύσεων του $Ax=\mathbb{0}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ο υπόχωρος αυτός ονομάζεται <u>μηδενικός χώρος</u> ή <u>πυρήνας</u> του πίνακα $A_{m\times n}$. [συμβολίζεται με $Ker(A)$ ή $N(A)$]

<u>Προσοχή!</u> Το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος $Ax=b$ όπου $b\neq \mathbb{0}$ <u>δεν είναι(!)</u> υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Γιατί? Το $\mathbb{0}$ (μηδενικό διάνυσμα) δεν ανήκει στο σύνολο των λύσεων του $Ax=b$ αφού $b\neq \mathbb{0}$

<u>Παράδειγμα 8:</u> Για ποιά τιμή του θ το διάνυσμα:

$(4,-3,\theta)^T \in \text{span}\{x_1, x_2, x_3\}$ όπου

$x_1=(1,-1,2)^T$, $x_2=(5,-4,7)^T$, $x_3=(-3,1,0)^T$.

<u>ΛΥΣΗ:</u> Θα πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (4,-3,\theta)^T$

Ισοδύναμα θα έχουμε:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 4 \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 &= -3 \\ 2\lambda_1 + 7\lambda_2 \quad &= \theta \end{aligned}\right\} (\Sigma)$$

Ο επαυξημένος πίνακας του (Σ) είναι:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 4 \\ -1 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & \theta \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \theta-5 \end{array}\right]$$

Θα πρέπει $\theta - 5 = 0 \Rightarrow \theta = 5$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> (γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα).

Έστω διανυσματικός χώρος Δ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Delta$ (διανύσματα του Δ). Λέμε ότι τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του Δ αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \mathbb{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Εάν δεν συμβαίνει αυτό τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ λέγονται <u>γραμμικά εξαρτημένα</u>.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο γιατί $\forall \lambda \neq 0 \quad \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

2. Κάθε σύνολο διανυσμάτων που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ αποτελείται από γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα.