

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}_Q \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_R$$

Επιθυμούμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$Ax = b$$

όπου $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ $b = (3 \ 5 \ 7 \ -3)^T$

μέσω της αναλύσεως QR.

Είναι $Q^T b = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\gamma}$

Το ισοδύναμο σύστημα είναι

$$R \cdot x = \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 2x_2 + 3x_3 &= -6 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 10 = 6 \\ 2x_2 + 6 = -6 \\ x_3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 24 = -4 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ορθομοναδιαίος Πίνακας)

Ένας τετραγωνικός πίνακας A $n \times n$ ονομάζεται ΟΡΘΟΜΟΝΑΔΙΑΙΟΣ (ή ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΣ) ακριβώς όταν όλες οι στήλες του (ή οι γραμμές του) είναι ορθοκανονικά διανύσματα.

Ορθογώνιοι λέγονται οι ορθομοναδιαίοι πίνακες με στοιχεία από το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Παρατήρηση: 1) Αποδεικνύεται ότι οι ορθογώνιοι πίνακες τάξεως 2 είναι της μορφής

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad S_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

2) Το μέτρο των στοιχείων των ορθομοναδιαίων πινάκων είναι πάντοτε μικρότερο ή ίσο στο μονάδες.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΜΟΝΑΔΙΑΙΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ.

$$1) A^T A = A A^T = I$$

$$2) |\det A| = 1$$

$$3) A^{-1} = A^T$$

4) Αν A, B ορθομοναδιαίοι πινάκες τότε AB, BA είναι ορθομοναδιαίοι πινάκες.

Παράδειγμα: Βρείτε τα βροίχια x_1, x_2, x_3

ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/6 & x_1 \\ 4/5 & 3/6 & x_2 \\ 0 & \sqrt{11}/6 & x_3 \end{bmatrix}$$

να είναι ορθογώνιος.

Λύση: $A^T A = I$

$$I = A^T A \Rightarrow \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/6 & 3/6 & \sqrt{11}/6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/6 & x_1 \\ 4/5 & 3/6 & x_2 \\ 0 & \sqrt{11}/6 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 + \sqrt{11}x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2\sqrt{11}}{15} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{11}}{10} \\ x_3 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ

Τα διανύσματα $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$ $(-\frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6})^T$

είναι ορθογώνια με μέτρο 1. Τα επεκτείνουμε σε

βάση του $\mathbb{R}^3$ προσθέτοντας το διάνυσμα $(0, 0, 1)^T$

και μετατρέπουμε τη βάση $\{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T, (-\frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6})^T,$

$(0, 0, 1)^T\}$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο

των Gram-Schmidt Δηλαδή:

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1) - \frac{\sqrt{11}}{6} \left(-\frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right) \dots$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ιδιοδιάνυσμα).

Έστω A ένας τετράγωνος πίνακας και $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{C}^n$) Ο αριθμός λ

που ικανοποιεί την εξίσωση $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ ονομάζεται

ΙΔΙΟΤΙΜΗ του ΠΙΝΑΚΑ A και το $\vec{u}$ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ

(που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ).

ΟΡΙΣΜΟΣ (Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο).

Κάθε τετράγωνος πίνακας A έχει n το πλήθος ιδιοτιμές οι οποίες αποτελούν ρίζες του πολυωνύμου:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Το πολυώνυμο $P(\lambda)$ που σχηματίζεται από των παρεχένω εξίσωση ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A η δε εξίσωση καλείται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A .

Παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο των A είναι:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda^2 - 4\lambda - 5}_{P(\lambda)} = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι: $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 5$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε

$$A \vec{u} = \lambda_1 \vec{u}, \quad \text{όπου } \vec{u} = (u_1, u_2)^T$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \stackrel{\lambda_1 = -1}{=} \vec{u} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_2 = -u_1 \\ 4u_1 + 3u_2 = -u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 4u_1 + 4u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -u_1$$

Οι λύσεις του συστήματος $A\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}$ είναι της μορφής $(u_1, -u_1) = u_1(1, -1)$, $u_1 \in \mathbb{R}$ και το διάνυσμα $(1, -1)$ είναι μια βάση του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ του πίνακα A .

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ έχουμε

$$A u = \lambda_2 u \quad u = (u_1, u_2)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \stackrel{\lambda_2=5}{=} 5u = \begin{bmatrix} 5u_1 \\ 5u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u_1 + 2u_2 &= 5u_1 & -4u_1 + 2u_2 &= 0 \\ 4u_1 + 3u_2 &= 5u_2 & \Rightarrow 4u_1 - 2u_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4u_1 - 2u_2 = 0 \rightarrow 2u_1 = u_2 \rightarrow u_1 = \frac{1}{2}u_2, u_2 \in \mathbb{R}$$

Άρα $(u_1, u_2) = (\frac{1}{2}u_2, u_2) = (\frac{1}{2}, 1)u_2$ οπότε στην

ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $(\frac{1}{2}, 1)$

το οποίο είναι μια βάση του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$.

Αλγεβρική Πολλαπλότητα Ιδιοτιμής = τάξη της ρίζας.
Η ιδιοτιμή είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
Αν η ρίζα είναι απλή η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι 1
Αν η ρίζα είναι διπλή η αλγεβρική —||— είναι 2
κ.ο.κ.

Γεωμετρική Πολλαπλότητα Ιδιοτιμής = η διάσταση
της βάσης του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που ανή-
κουν στην ιδιοτιμή.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Διαγωνιοποίηση Πίνακα)

Εάν $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα
(γραμμές) ενός πίνακα A $n \times n$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Τότε ισχύει ότι $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$
όπου U είναι $n \times n$ πίνακας που σχηματίζεται τοποθε-
τώντας τις διτεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$
ως στήλες του U και D είναι διαγώνιος πίνακας
του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι
οι ιδιοτιμές του πίνακα A .

Παρατήρηση:

- Αν για κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A η αλγεβρική πολλαπλότητα ταιριάζει με την γεωμετρική πολλαπ-

Πρώτη τότε ο A διαγωνοποιείται

- Αν η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη της αλγεβρικής θα κάποια ιδιοτιμή τότε ο A δεν διαγωνοποιείται.

Παράδειγμα: Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A
είναι: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \varphi(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες $P(\lambda)=0$
 $\lambda_1 = 2$ (διπλή) $\lambda_2 = 3$ (απλή).

Αλγεβρική Πολλαπλότητα $\lambda_1 = 2$

Αλγεβρική Πολλαπλότητα $\lambda_2 = 1$.

Για $\lambda_1 = 2$ έχουμε:

$$A \vec{u} = \lambda \vec{u}, \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \stackrel{\lambda_1=2}{=} 2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2u_1 + u_2 = 2u_1 \\ u_2 - u_3 = 2u_2 \\ 2u_2 + 4u_3 = 2u_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_2 = u_3 = 0. \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$(u_1, 0, 0) = u_1 (1, 0, 0) \quad u_1 \in \mathbb{R}.$$

Η βάση του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι η $\{(1, 0, 0)\}^T$

και η διάσκαλη της βάσης είναι 1

Άρα η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 2$ είναι 1. Τότε ο A δεν διαγωνιοποιείται καθώς $\text{γεω.πολ.} = 1 < 2 = \text{αλγ.πολ.}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Caley - Hamilton)

Κάθε $n \times n$ πίνακας A ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Δηλαδή αν $P(\lambda)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A , τότε $P(A) = \mathbf{0}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

- 1) Ένας $n \times n$ πίνακας A και ο ανάστροφός του A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (ΟΧΙ ΟΜΩΣ και τα ίδια ιδιοδιανύσματα!).
- 2) Ιδιοτιμές τριγωνικών πίνακας είναι ίσες με τα διαγώνια στοιχεία του
- 3) Ο πίνακας A $n \times n$ είναι αντιστρέψιμος ακριβώς μόνο αν έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές.
- 4) Αν ο A $n \times n$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$
Τότε $\det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ (Θεώρημα Keta)
 $\text{trace}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ (—||—)

5) Αν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A τότε

Τότε : $k \cdot \lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $k \cdot A$
 λ^k είναι ιδιοτιμή του πίνακα A^k

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος με ιδιοτιμή λ

Τότε $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1} .