

ΑΡΙΘΜ. ΓΡΑΜ. ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΙΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ 2 & 4 ΤΟ n ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΙ ΤΟΝ ΑΜ ΣΑΤΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 7 ΤΟ μ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΙ ΤΟ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΨΗΦΙΟ ΤΟΥ ΑΜ ΣΑΣ.
ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΤΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΗΣΕΤΕ ΕΞ ΑΡΧΗΣ, ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΘΑ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ n ΚΑΙ μ ΔΕΝ ΘΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΘΟΥΝ!

Θέμα 1 (Κάθε ερώτηση αντιστοιχεί σε 0.5 μονάδες. Για κάθε λάθος θα αφαιρείται 0.25)
Σ(ωστό) ή Λ(άθος) ; απαντήστε χωρίς καμία εξήγηση!

- (α) Αν η **ορίζουσα** πίνακα A είναι $\det A = 0$, τότε ο A **δεν** διαγωνιοποιείται
(β) Όταν ένας (τετραγωνικός) πίνακας έχει κάποια ιδιοτιμή $\lambda = 0$ τότε **δεν** αντιστρέφεται.
(γ) Κάθε πίνακας **αναστρέφεται**.
(δ) Κάθε τετραγωνικός πίνακας έχει και ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Θέμα 2

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$. όπου i η φανταστική μονάδα ($=\sqrt{-1}$).

Αποκλειστικά με το **Θεώρημα Cayley-Hamilton** υπολογίστε (μέχρι τέλους!) τον A^n .

Θέμα 3

Για τον $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-i \\ \sqrt{2}+i & -1 \end{pmatrix}$ βρείτε έναν **αντιστρέψιμο** πίνακα E και ένα **διαγώνιο** πίνακα D , έτσι ώστε $A = EDE^{-1}$ και **επαληθεύστε** την εν λόγω ισότητα.

Θέμα 4

Αν ο **άγνωστος** 3×3 πίνακας A έχει **φάσμα** $\text{sp} A = \{-i, 0, i\}$, όπου i η φανταστική μονάδα ($=\sqrt{-1}$), βρείτε (μέχρι τέλους!) το **ίχνο** και την **ορίζουσα** του $B = 2A^n - 2A + 2I$, όπου I ο ταυτοτικός 3×3 πίνακας.

Θέμα 5

Έστω $\Delta(x)$ η 4×4 **ορίζουσα** με γραμμές $(3x, \mu+x, -2, 1)$, $(\mu+x, -2, 1, 3x)$, $(-2, 1, 3x, \mu+x)$ και $(1, 3x, \mu+x, -2)$. Βρείτε **όλες τις ρίζες** της εξίσωσης $\Delta(x) = 0$, (πραγματικές ή όχι και αν υπάρχει με την πολλαπλότητά τους).

Υπόδειξη: με τις **ιδιότητες** των οριζουσών το πολυώνυμο $\Delta(x)$ **παραγοντοποιείται**