Εξισώσεις

$$c = \lambda \cdot f \qquad F = G\frac{M \cdot m}{r^2} \qquad E = h \cdot f$$

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2 \qquad E = m \cdot c^2$$

$$K = \frac{1}{2} m \cdot u^2 \qquad N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad \vec{p} = m \cdot \vec{u} \qquad F = k\frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Εξισώσεις πρώτου βαθμού

- **Γενική μορφή**: $\alpha \cdot x = \beta$, $\alpha \neq 0$
- **Μία μοναδική λύση**: $x = \beta/\alpha$

- Εμφανίζονται σε πολύ απλά προβλήματα όπου στις σχέσεις των φυσικών μεγεθών δεν εμφανίζονται δυνάμεις (όλες οι «μεταβλητές» είναι υψωμένες στην πρώτη δύναμη).

- **Παραδείγματα**: ανάμιξη διαλυμάτων, κίνηση με σταθερή ταχύτητα, σχέση ενέργειας και συχνότητας ή μήκους κύματος στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και άλλα.

Πορεία προς την λύση

- Αφού κατανοήσουμε το πρόβλημα και τα μεγέθη που εμπλέκονται καταλήγουμε σε μία εξίσωση, μία έκφραση που περιέχει τον άγνωστο x.

- Θα πρέπει εμείς να φέρουμε την εξίσωση στην μορφή

$$\alpha \cdot x = \beta, \ \alpha \neq 0$$

κάνοντας πράξεις και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες τους.

- Η λύση τότε θα είναι $x=\beta/\alpha$.

Παραδείγματα

- Ανάμιξη διαλυμάτων:

  Διάλυμα Α: Περιεκτικότητα 50%w/v, όγκος 80ml

  Διάλυμα Β: Περιεκτικότητα 10%w/v, όγκος 100ml

  Ποια η περιεκτικότητα του τελικού διαλύματος;

$$180 \cdot x = 0{,}5 \cdot 80 + 0{,}1 \cdot 100.$$

- Σχέση ενέργειας-μήκους κύματος

  Όταν γνωρίζουμε ένα από τα Ε ή λ,

$$E = (h \cdot c)/\lambda$$

$$\lambda = (h \cdot c)/E$$

- **Στον νόμο στου Snell**

  όταν γνωρίζουμε τις γωνίες ανάκλασης και διάθλασης,

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2$$

Άσκηση 1.

$$\frac{1-4x}{5}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-4}{20}+\frac{5}{4}\Leftrightarrow$$

$$20\cdot\left(\frac{1-4x}{5}-\frac{x+1}{4}\right)=20\cdot\left(\frac{x-4}{20}+\frac{5}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$4(1-4x)-5(x+1)=x-4+5\cdot 5\Leftrightarrow$$

$$4-16x-5x-5=x-4+25\Leftrightarrow$$

$$-16x-5x-x=-4+25-4+5\Leftrightarrow$$

$$-22x=22\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{22}{-22}=-1$$

Άσκηση 2. Να λυθεί η εξίσωση $6378x - \frac{3 \cdot 10^5}{6,28} = 0$

Απάντηση.

$$6378x - \frac{3 \cdot 10^5}{6,28} = 0 \Leftrightarrow$$

$$6378x = \frac{3 \cdot 10^5}{6,28} \Leftrightarrow$$

$$\frac{6378x}{6378} = \frac{\frac{3 \cdot 10^5}{6,28}}{6378} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3 \cdot 10^5}{6,28 \cdot 6378} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{300.000}{40.053,84} \Leftrightarrow$$

$$x = 7,4899$$

Άσκηση 3. Να βρεθεί το λ_2 αν γνωρίζουμε ότι,

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_4}$$

και λ_1=255,4, λ_4=500,4

Απάντηση. Λύνουμε ως προς λ_2

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1 \cdot \lambda_4} - \frac{\lambda_1}{\lambda_4 \cdot \lambda_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_4} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2 = 521{,}6$$

Εναλλακτική λύση

- Αντικαθιστούμε αμέσως τα νούμερα,

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{255{,}4} - \frac{1}{500{,}4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 0{,}002438155 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{0{,}002438155} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2 = 521{,}641469\text{nm} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = 521{,}6\text{nm}$$

Άσκηση 4. Να λυθεί η εξίσωση, $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{4}-\frac{x}{5}-\frac{49}{60}$

Απάντηση.

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{4}-\frac{x}{5}-\frac{49}{60} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=\frac{49}{60} \Leftrightarrow$$

$$\frac{30x-20x-15x+12x}{60}=\frac{49}{60} \Leftrightarrow$$

$$7x=49 \Leftrightarrow$$

$$x=7$$

Πολυωνυμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού

- **Γενική μορφή**: $αx^2+βx+γ=0$
- Μπορεί να έχει δύο λύσεις ή μία λύση ή καμία.
- **Διακρίνουσα**: $Δ=β^2-4αγ$
- **Δ>0**: Δύο διαφορετικές λύσεις,

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- **Δ=0**: Μία (διπλή) λύση,

$$x=-β/2α$$

- **Δ<0**: Αδύνατη

Άσκηση 1. Να λυθεί η εξίσωση $8x^2 - 7x + 1 = 0$

Απάντηση. Βρίσκουμε την διακρίνουσα,

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 7^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 \\
&= 17
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 8}
$$

$$
x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{16}
$$

Άθροισμα και γινόμενο λύσεων δευτεροβάθμιας εξίσωσης

- Αν φέρουμε την εξίσωση στην μορφή

$$x^2 - Sx + P = 0$$

και βρούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα *S* και γινόμενο *P,* τότε αυτοί οι δύο αριθμοί είναι οι λύσεις της.

Άσκηση 2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + x - 12 = 0$

Απάντηση. Βρίσκουμε την διακρίνουσα,

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) \\ &= 49 \end{aligned}$$

Άρα,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$x = -4 \text{ ή } 3$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

- **Δεύτερος τρόπος**: *S*=-1, *P*=-12

  Αναζητούμε αριθμούς με άθροισμα -1 και γινόμενο -12:

-4 και *3*

- Άρα x=-4 ή x=3.

Άσκηση 3. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1$

- **Απάντηση.** Κάνουμε πράξεις για να φέρουμε την εξίσωση σε κάποια γνωστή μορφή.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)(x-1)}=1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{2x}{x^2-1}=1 \Leftrightarrow$$
$$2x=x^2-1 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x-1=0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

- Διακρίνουσα,

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$$
$$= 8$$

- Λύσεις,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

(*). Δεν χάνουμε πολύ χρόνο ψάχνοντας αριθμούς με άθροισμα -2 και γινόμενο -1.

Η εξίσωση $x^n = a$

- n άρτιος και α>0: $x = \pm\sqrt[n]{a}$

- n άρτιος και α<0: Αδύνατη

- n περιττός: $x = \sqrt[n]{\alpha}$,αν $\alpha > 0$

  $x = -\sqrt[n]{|a|}$,αν $\alpha < 0$

Άσκηση 4. Να λυθεί η εξίσωση $x^7 + x^5 = 0$

Απάντηση. Παραγοντοποιούμε,

$$x^7 + x^5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^5(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^5 = 0 \text{ ή } x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ ή } x^2 = -1 \Leftrightarrow$$
$$x = 0$$

Γιατί η εξίσωση $x^2 = -1$είναι αδύνατη.

Άσκηση 5. Να λυθεί η εξίσωση $x^7 + x^4 = 0$

Απάντηση. Παραγοντοποιούμε,

$$
\begin{gathered}
x^7 + x^4 = 0 \Leftrightarrow \\
x^4(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
x^4 = 0 \text{ ή } x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
x = 0 \text{ ή } x^3 = -1 \Leftrightarrow \\
x = 0 \text{ ή } x = -1
\end{gathered}
$$

Δηλαδή έχουμε δύο λύσεις.

Άσκηση 6. Να λυθεί η εξίσωση $x^{2022} - x^{2026} = 0$

Απάντηση. Παραγοντοποιούμε,

$$
\begin{gathered}
x^{2022} - x^{2026} = 0 \Leftrightarrow \\
x^{2022}(1 - x^4) = 0 \Leftrightarrow \\
x^{2022} = 0 \text{ ή } 1 - x^4 = 0 \Leftrightarrow \\
x = 0 \text{ ή } x^4 = 1
\end{gathered}
$$

Όμως η εξίσωση $x^4 = 1$ έχει δύο λύσεις, $x = \pm 1$
οπότε έχουμε συνολικά τρεις λύσεις,

$$x = 0 \text{ ή } x = \pm 1$$

Εκθετικές εξισώσεις

- Ο άγνωστος βρίσκεται στον εκθέτη κάποιας δύναμης. Ας θυμηθούμε το παράδειγμα των τόκων,

$$15.000 \cdot 1{,}03^x = 100.000$$

ή ισοδύναμα

$$1{,}03^x = \frac{100.000}{15.000}$$

Εκθετικές εξισώσεις

- Θυμόμαστε την βασική ιδιότητα των λογαρίθμων να «κατεβάζουν» τον εκθέτη

$$\log \theta^k = k \cdot \log \theta$$

και την χρησιμοποιούμε,

$$\log 1{,}03^x = \log\left(\frac{100}{15}\right)$$

$$x \log 1{,}03 = \log\left(\frac{100}{15}\right)$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{100}{15}\right)}{\log 1{,}03}$$

Άσκηση 1. Να λυθεί η εξίσωση, $2^x = 10.000$

Απάντηση. «Λογαριθμίζουμε» και τα δύο μέλη της εξίσωσης,

$$\begin{aligned} \log 2^x &= \log 10.000 \Leftrightarrow \\ x \log 2 &= 4 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{4}{\log 2} \Leftrightarrow \\ x &= 13{,}2877 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι μόλις λογαριθμίσουμε προκύπτει μία εξίσωση πρώτου βαθμού.

Άσκηση 2. (Χρόνος ημιζωής)

- Γνωρίζουμε ότι αν αρχικά (την χρονική στιγμή $t=0$) είχαμε ένα πλήθος N_0 ραδιενεργών πυρήνων, τότε μετά από χρόνο t θα έχουμε

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο θα έχουμε τους μισούς πυρήνες.

Απάντηση. Θα λύσουμε την εκθετική εξίσωση,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Η εξίσωση γίνεται,

$$N_0 \cdot e^{-\lambda t} = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln e^{-\lambda t} = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\lambda t \cdot \ln e = -\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda t = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

(*). Το 1/*λ* είναι ο αναμενόμενος χρόνος ζωής (μέσος χρόνος ζωής) για τον ένα πυρήνα.

Άσκηση 3. Έχουμε $6,622 \cdot 10^{23}$ πυρήνες ενός ραδιενεργού ισοτόπου με σταθερά διάσπασης λ=0,1months^{-1}.

Να υπολογιστεί μετά από πόσο χρόνο θα έχουμε 10^{22} πυρήνες.

Απάντηση. Λύνουμε την εξίσωση,

$$6{,}622 \cdot 10^{23} e^{-0{,}1 \cdot t} = 10^{22} \Leftrightarrow$$

$$e^{-0{,}1 \cdot t} = \frac{10^{22}}{6{,}622 \cdot 10^{23}} \Leftrightarrow$$

$$-0{,}1 \cdot t = \ln \frac{10^{22}}{6{,}622 \cdot 10^{23}} \Leftrightarrow$$

$$6{,}622 \cdot 10^{23} e^{-0{,}1 \cdot t} = 10^{22} \Leftrightarrow$$

$$e^{-0{,}1 \cdot t} = \frac{10^{22}}{6{,}622 \cdot 10^{23}} \Leftrightarrow$$

$$-0{,}1 \cdot t = \ln \frac{10^{22}}{6{,}622 \cdot 10^{23}} \Leftrightarrow$$

$$-0{,}1 \cdot t = -\ln \frac{6{,}622 \cdot 10^{23}}{10^{22}}$$

$$0{,}1 \cdot t = \ln 6{,}622 \cdot 10 \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\ln 66{,}22}{0{,}1} \Leftrightarrow$$

$$t = 41{,}9268 \text{months}$$

Λογαριθμικές εξισώσεις

- Ο άγνωστος βρίσκεται μέσα σε κάποιον λογάριθμο,

$$\log(3x+1)=1$$

- Προσπαθούμε να «κατασκευάσουμε» και στα δύο μέλη λογάριθμους με την ίδια βάση,

$$\log(3x+1)=\log 10$$

Οπότε θα πρέπει να έχουμε ισότητα των ποσοτήτων μέσα στους λογάριθμους,

$$3x + 1 = 10$$

και καταλήγουμε συνήθως σε μία εξίσωση πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

Άσκηση 1. Να λυθεί η εξίσωση $\log x + \log(x-1) = \log 4x$

Απάντηση. Εφαρμόζουμε ιδιότητες των λογαρίθμων,

$$
\begin{aligned}
\log x + \log(x-1) = \log 4x &\Leftrightarrow \\
\log[x(x-1)] = \log 4x &\Leftrightarrow \\
x(x-1) = 4x &\Leftrightarrow \\
x^2 - x - 4x = 0 &\Leftrightarrow \\
x(x-5) = 0 &\Leftrightarrow \\
x = 0 \text{ ή } x = 5 &
\end{aligned}
$$

Κρατάμε μόνο την λύση x=5. Γιατί;

Άσκηση 2. Να λυθεί η εξίσωση $\log_9(x-5)+\log_9(x+3)=1$

Απάντηση. Εφαρμόζουμε ιδιότητες των λογαρίθμων,

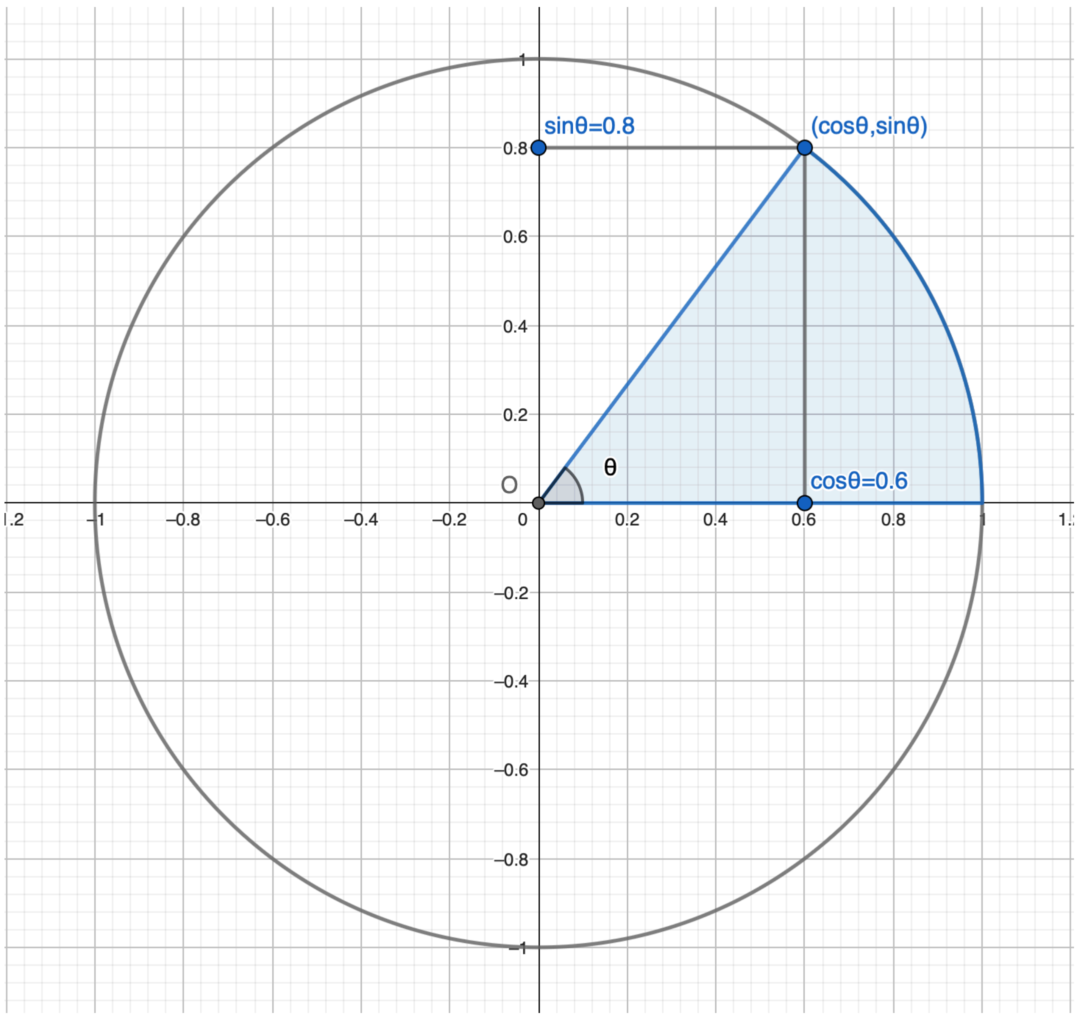
$$\begin{aligned}\log_9(x-5)+\log_9(x+3)=1 &\Leftrightarrow \\ \log_9[(x-5)(x+3)]=\log_9 9 &\Leftrightarrow \\ (x-5)(x+3)=9 &\Leftrightarrow \\ x^2+3x-5x-15=9 &\Leftrightarrow \\ x^2-2x-24=0 &\Leftrightarrow \\ x=-4 \ \text{ή} \ x=6 &\end{aligned}$$

Προσοχή, Κρατάμε και τις δύο λύσεις;

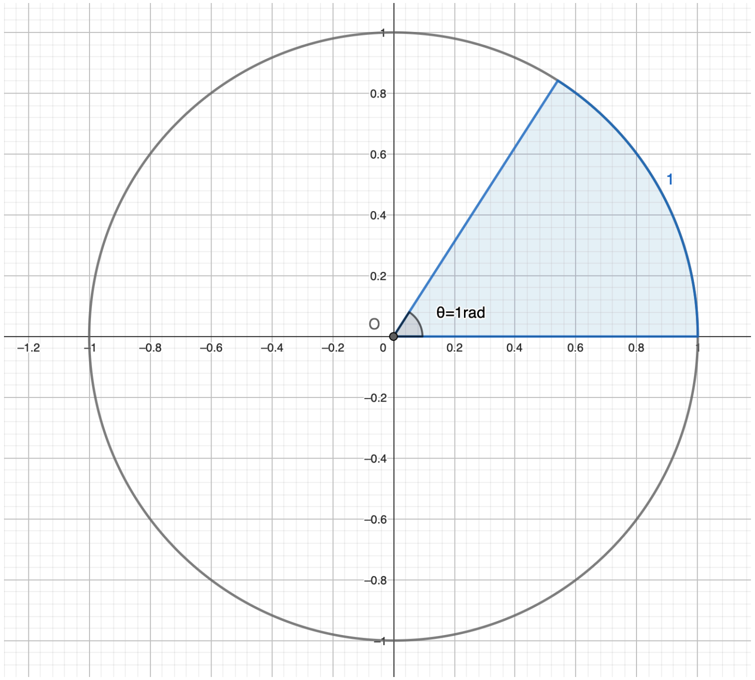
Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Λίγη τριγωνομετρία

Ο τριγωνομετρικός κύκλος



Την γωνία την μετράμε σε μοίρες (°) ή ακτίνια (rad). Γωνία 1rad αντιστοιχεί σε τόξο κύκλου ίσο με την ακτίνα του.



Έτσι η σχέση μεταξύ rad και μοιρών ° είναι:

$$\frac{\theta(\text{rad})}{2\pi} = \frac{\theta(^\circ)}{360}$$

- Στόχος μας είναι να μπορούμε να λύνουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις της μορφής

$$\sin x = a$$

ή της μορφής

$$\cos x = a$$

όπου ο άγνωστος x είναι κάποια γωνία και $-1 \leq a \leq 1$.

- Τέτοιες εξισώσεις μπορούν να προκύψουν από τον νόμο του Snell:

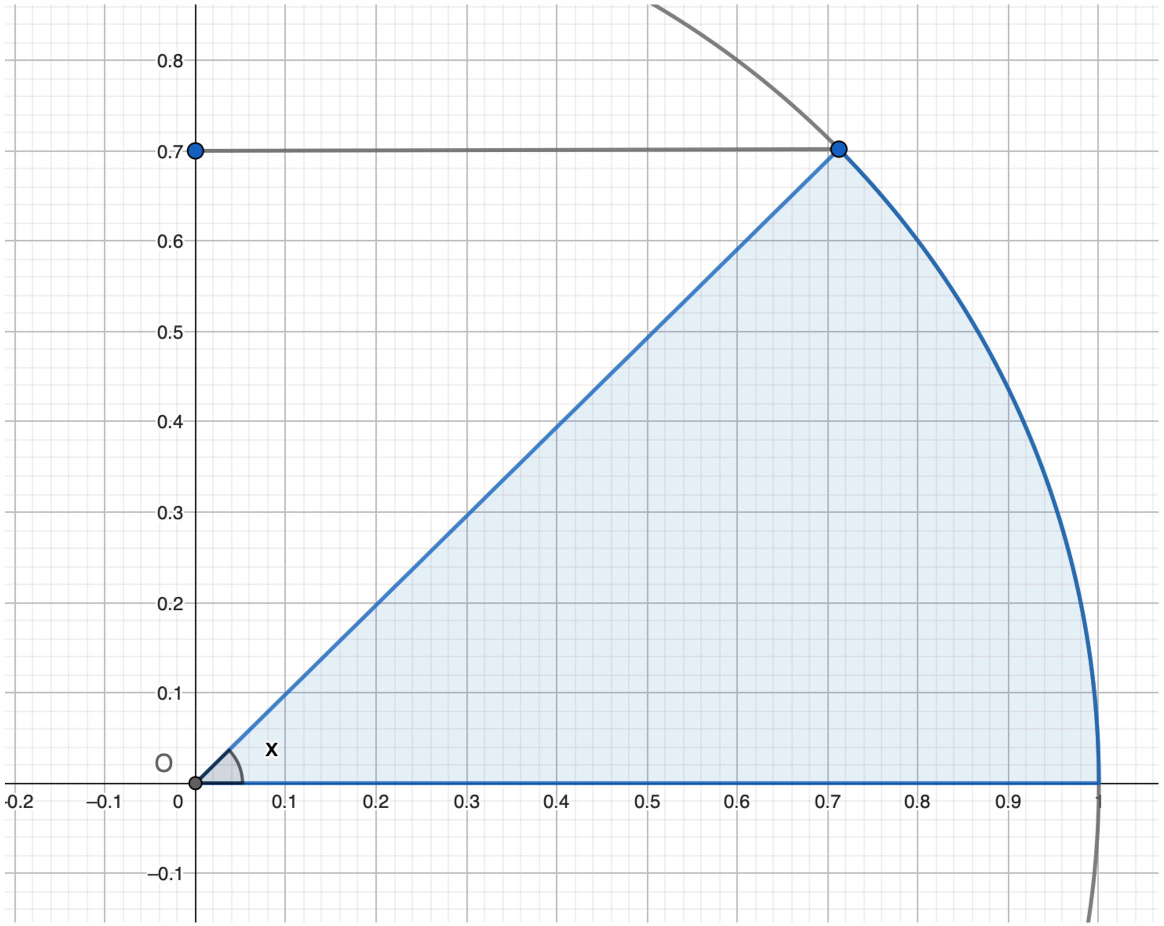
$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$$

ή από τον τύπο που δίνει τα μέγιστα στο διαμόρφωμα που προκύπτει όταν μονοχρωματικό φως περάσει μέσα από ένα φράγμα περίθλασης πολλών λεπτών σχισμών:

$$d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$$

- Δεν υπάρχουν τύποι που να δίνουν την λύση σε τέτοιες εξισώσεις.

Γραφική λύση της $\sin x = 0{,}7$



Μετράμε την γωνία με ένα μοιρογνωμόνιο και την βρίσκουμε $44{,}5^\circ$ περίπου.

- Γωνία αυτή έχει

$$\sin x = 0{,}7$$

και

$$\cos x = 0{,}71$$

- Παρατηρήστε ότι,

$$\begin{aligned}(\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= 0{,}7^2 + 0{,}71^2 \\ &= 0{,}49 + 0{,}5041 \\ &= 0{,}9941 \\ &\approx 1\end{aligned}$$

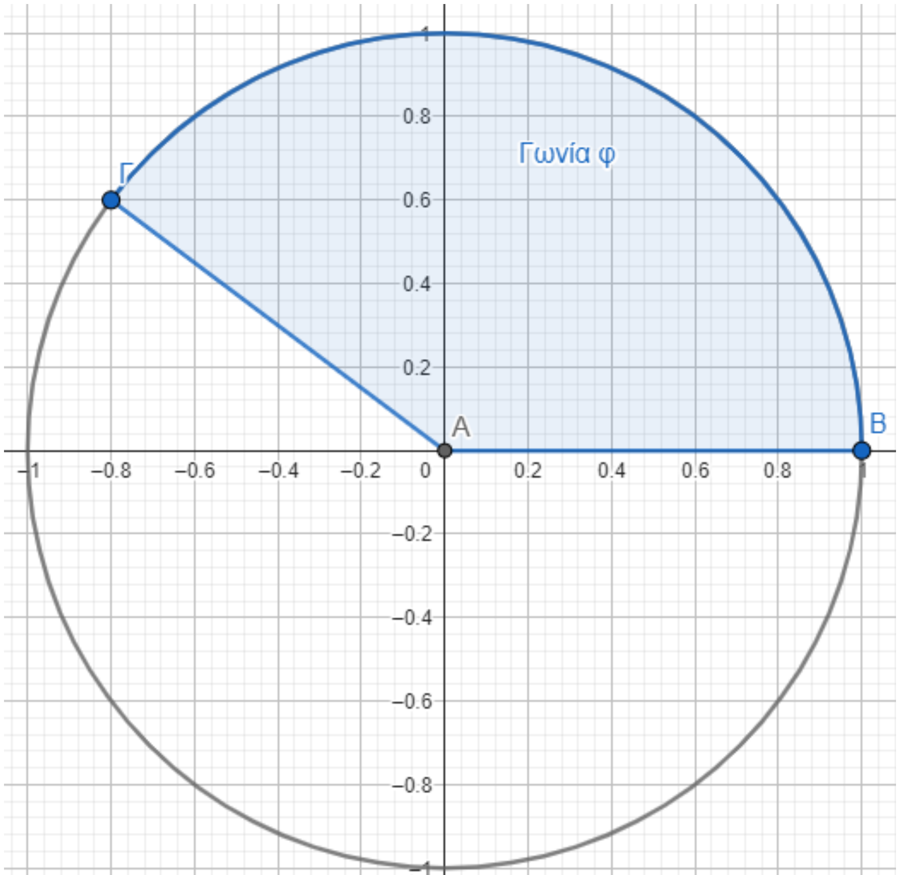
Δηλαδή αν γνωρίζουμε το ημίτονο μίας γωνίας, τότε γνωρίζουμε και το συνημίτονο της.

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών $1^\circ - 89^\circ$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°							
Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751

24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	,01908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,2698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

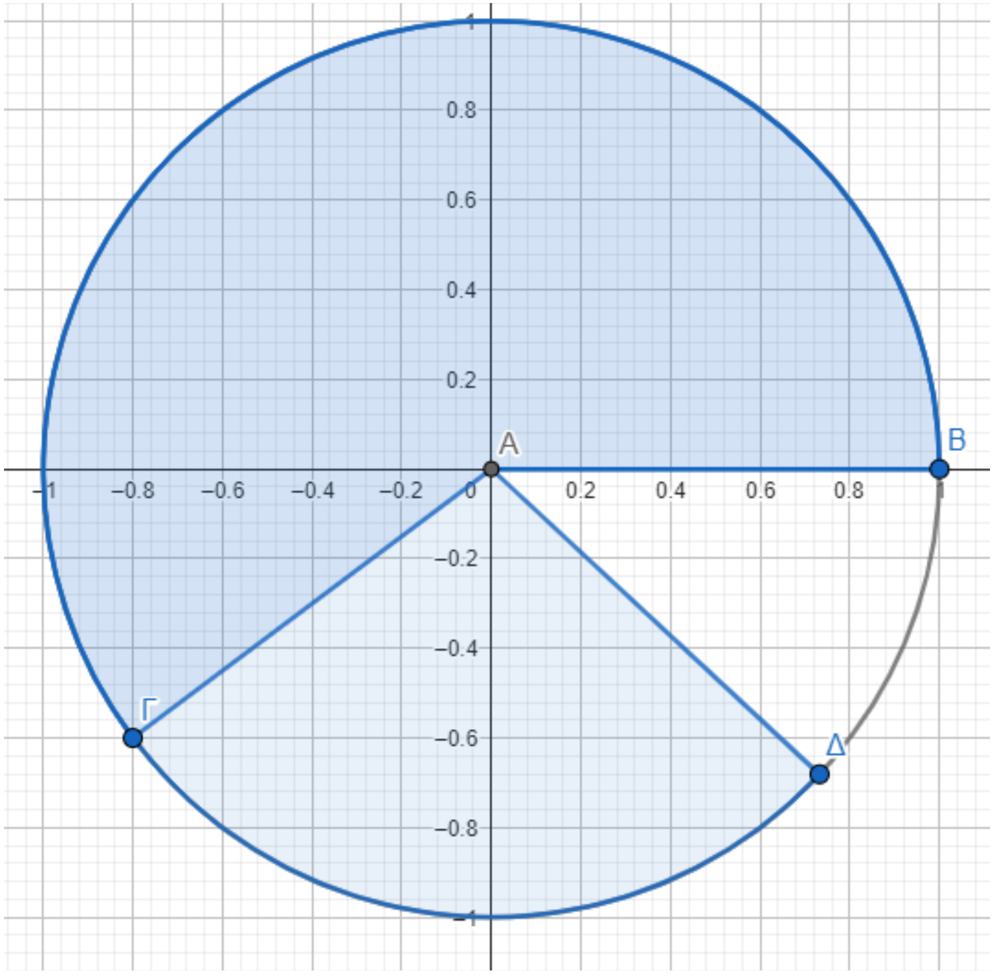
- Όμως υπάρχουν και αμβλείες γωνίες,



- Γιατί αυτές να μην έχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς;
- Αποφασίζουμε ότι $ημφ = 0{,}6$ και $συνφ = -0{,}8$

- Είναι σαφές ότι μπορούμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας,

$$0° \leq \theta \leq 360°$$

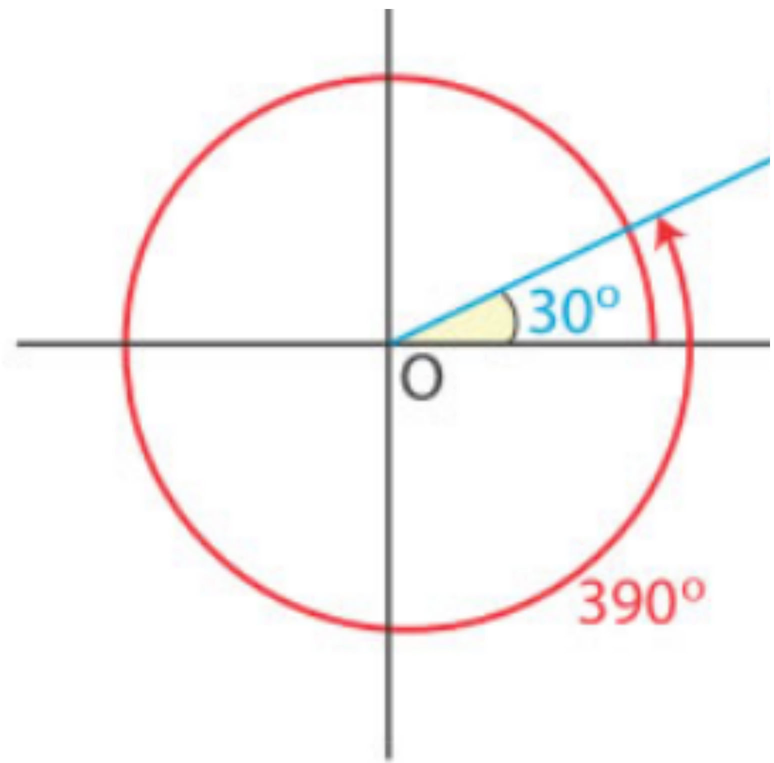


- Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου μπορούμε να ορίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς για οποιαδήποτε γωνία,

$$-\infty < \varphi < +\infty$$

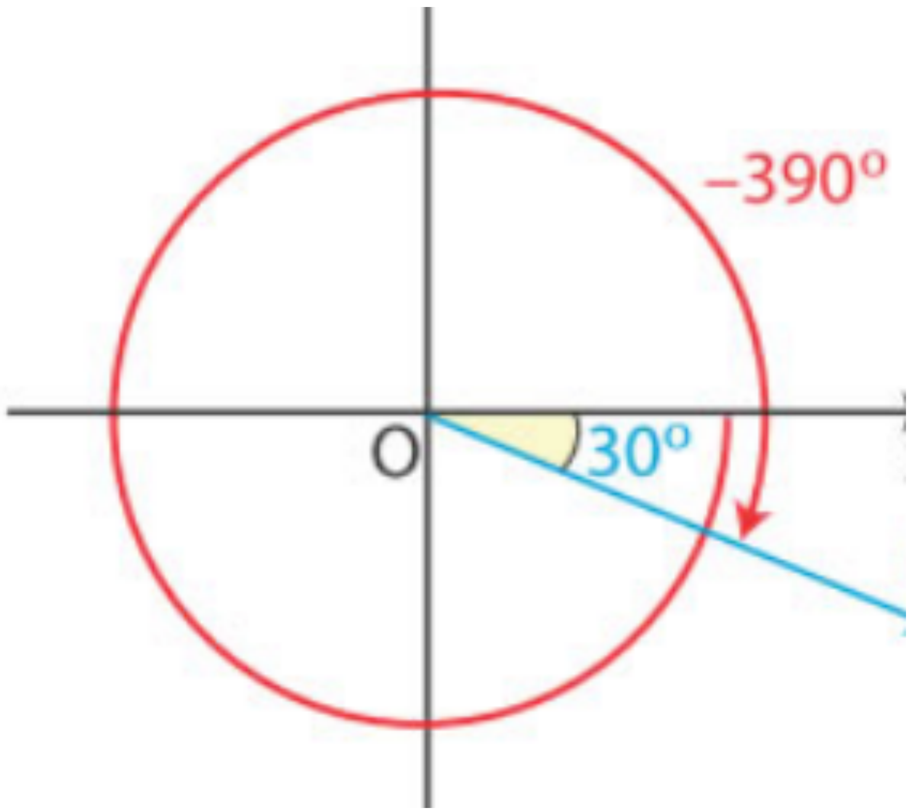
- Ακόμη και για γωνίες μεγαλύτερες των 360 μοιρών, ακόμη και για αρνητικές γωνίες.
- Αρνητικές γωνίες; Γωνίες μεγαλύτερες των 360 μοιρών; Τι είναι αυτά;

- Γωνία 390 μοιρών,



- Έχει τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με την γωνία των 30 μοιρών.

- Γωνία -390 μοιρών,



- Έχει τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με την γωνία των 330 μοιρών.

Φορμαλισμός

$$\text{ημ}(\varphi + k \cdot 360) = \text{ημ}\varphi$$
$$\text{συν}(\varphi + k \cdot 360) = \text{συν}\varphi$$

$$390° = (30 + 360)°$$
$$-390° = (330 - 2 \cdot 360)°$$

$$\Downarrow$$

$$\eta\mu(30° + 360°) = \eta\mu 30°$$
$$\sigma\upsilon\nu(30° + 360°) = \sigma\upsilon\nu 30°$$
$$\text{ημ}(330° - 2 \cdot 360°) = \text{ημ}330°$$
$$\text{συν}(330° - 2 \cdot 360°) = \text{συν}330°$$

- Επίσης η γωνία -390 μοίρες έχει τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με την γωνία -30 μοίρες,

$$-390° = (-30 - 360)°$$

- Επομένως,

$$\etaμ(-30°) = \etaμ(-390°)$$
$$\sigma\upsilon\nu(-30°) = \sigma\upsilon\nu(-390°)$$

- Μπορείτε να μαντέψετε την γωνία;