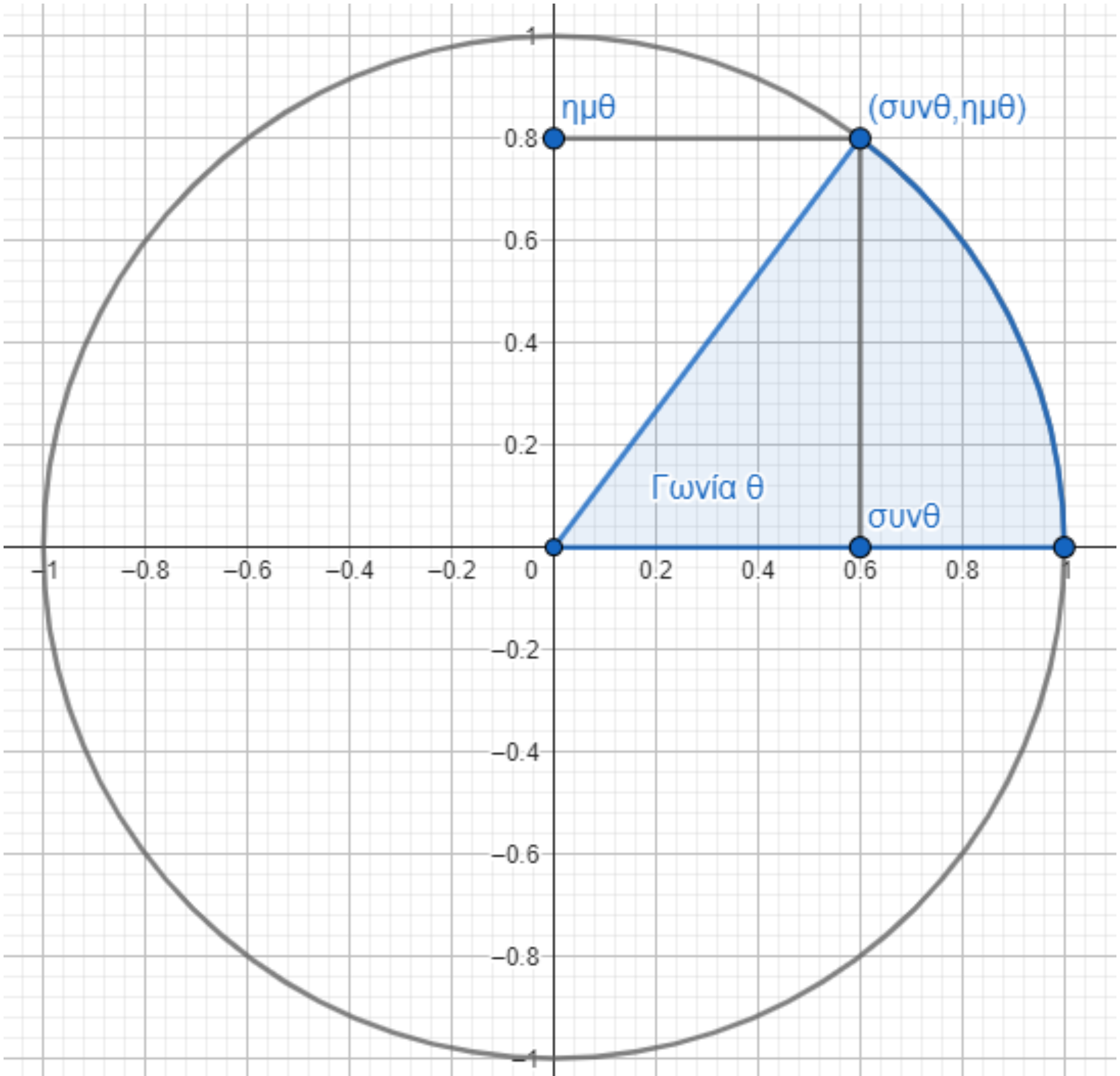
Τριγωνομετρικές εξισώσεις

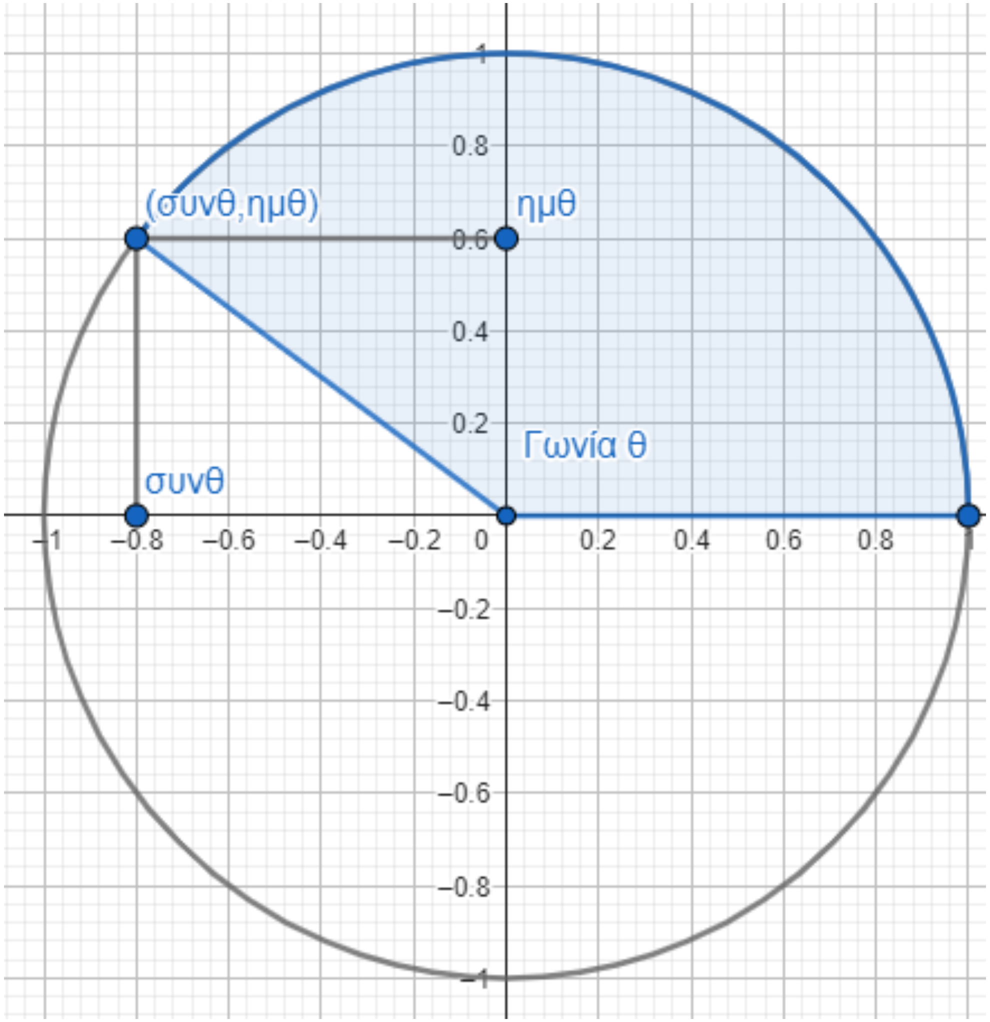
(συνέχεια)

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας



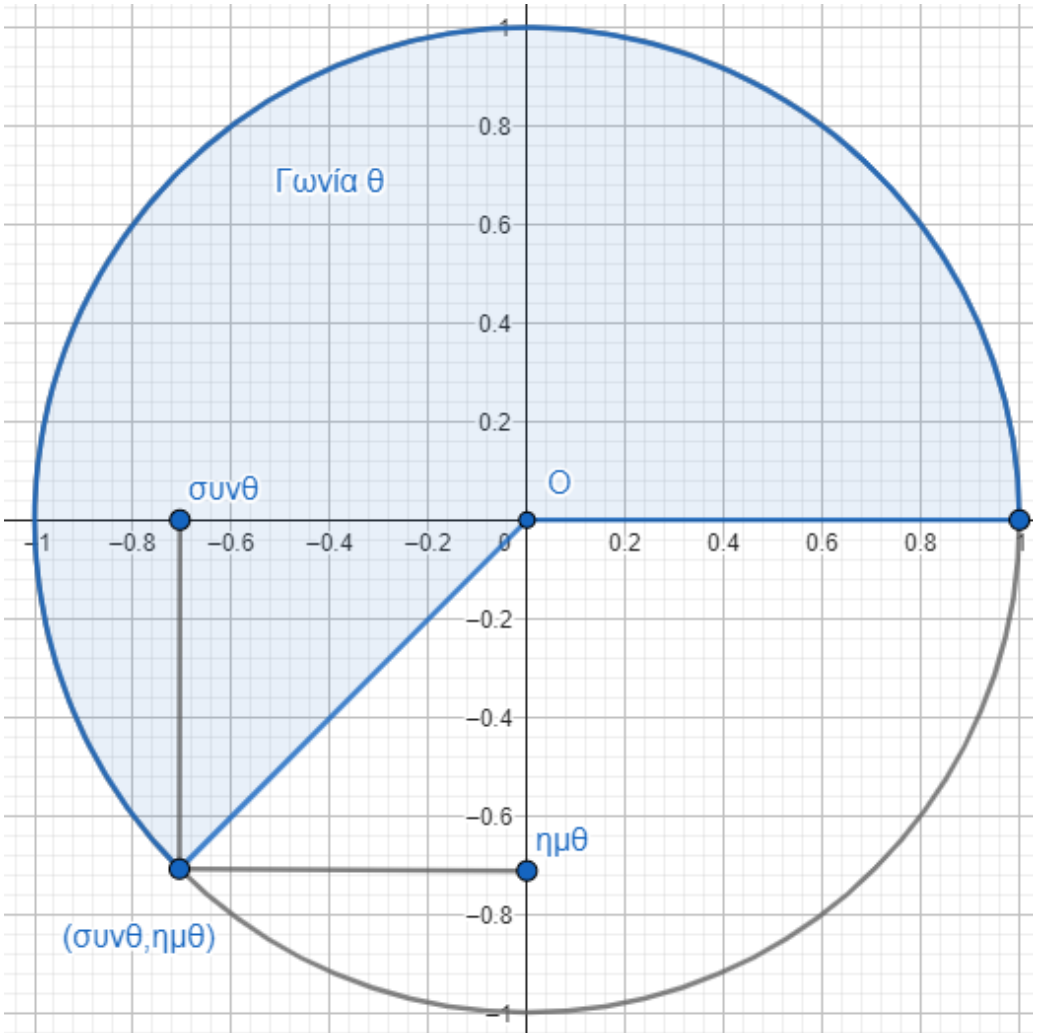
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας από 0 έως 360 μοίρες

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$



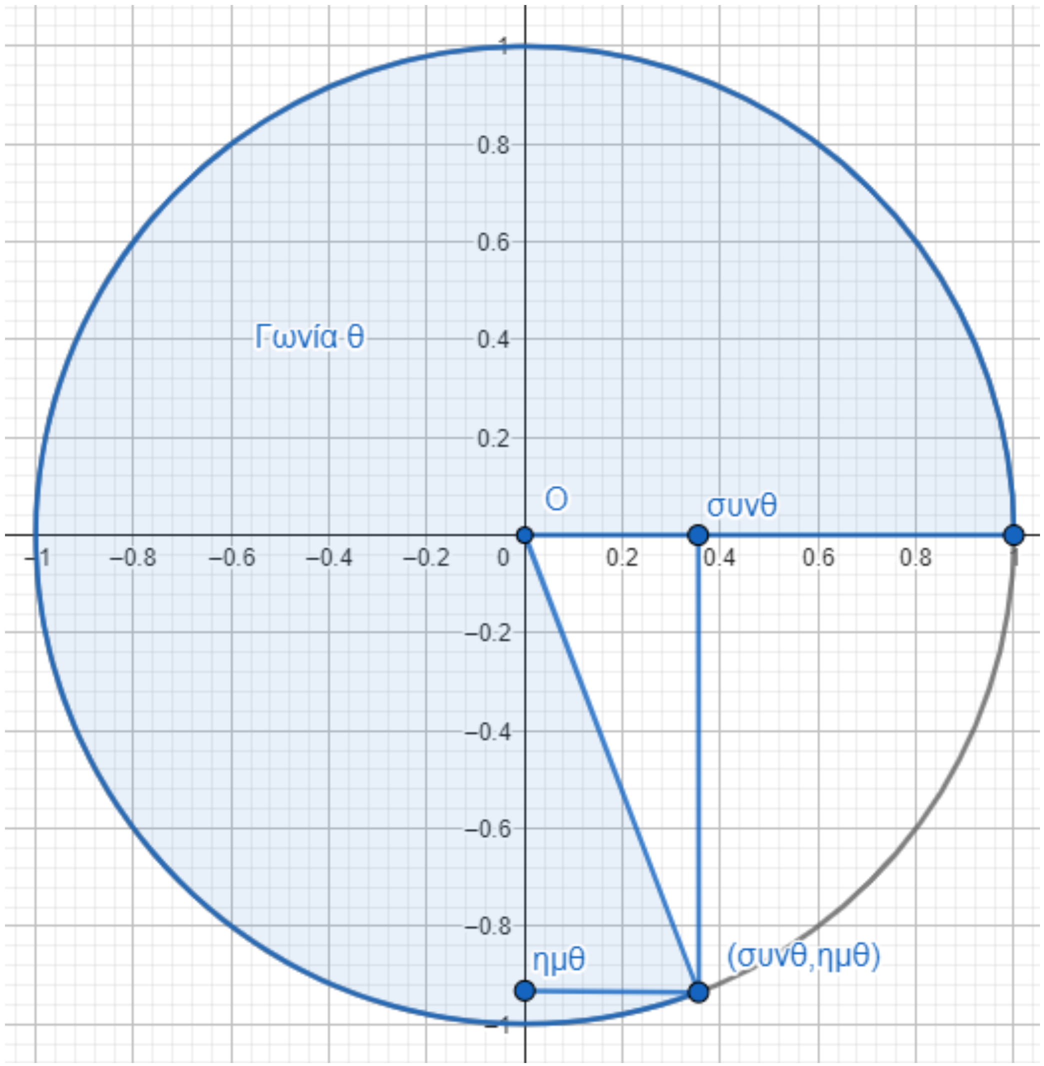
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας από 0 έως 360 μοίρες

$$180° < \theta < 270°$$



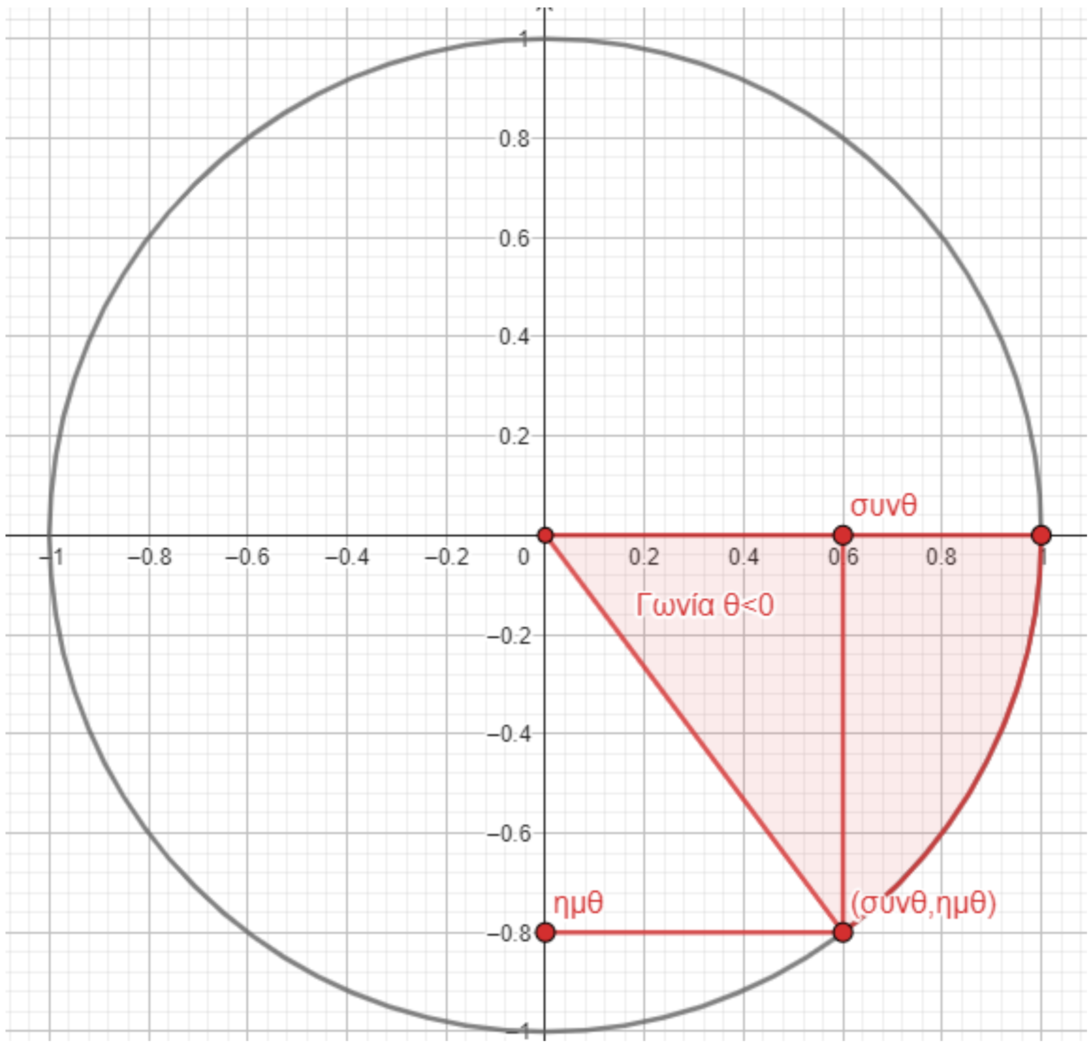
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας από 0 έως 360 μοίρες

$$270^\circ < \theta < 360^\circ$$



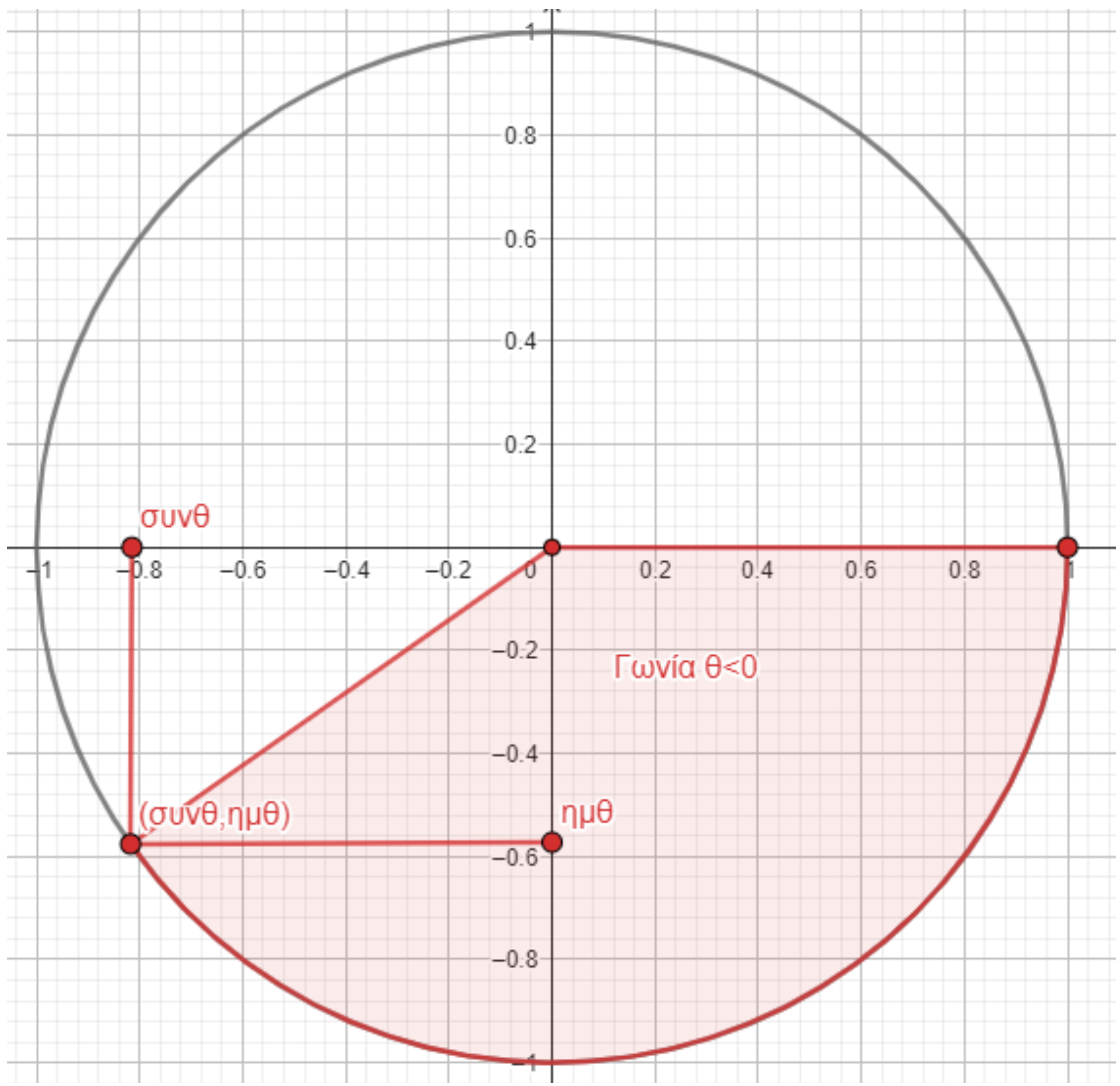
Τριγωνομετρικοί αριθμοί αρνητικής γωνίας

$$-90° < \theta < 0°$$



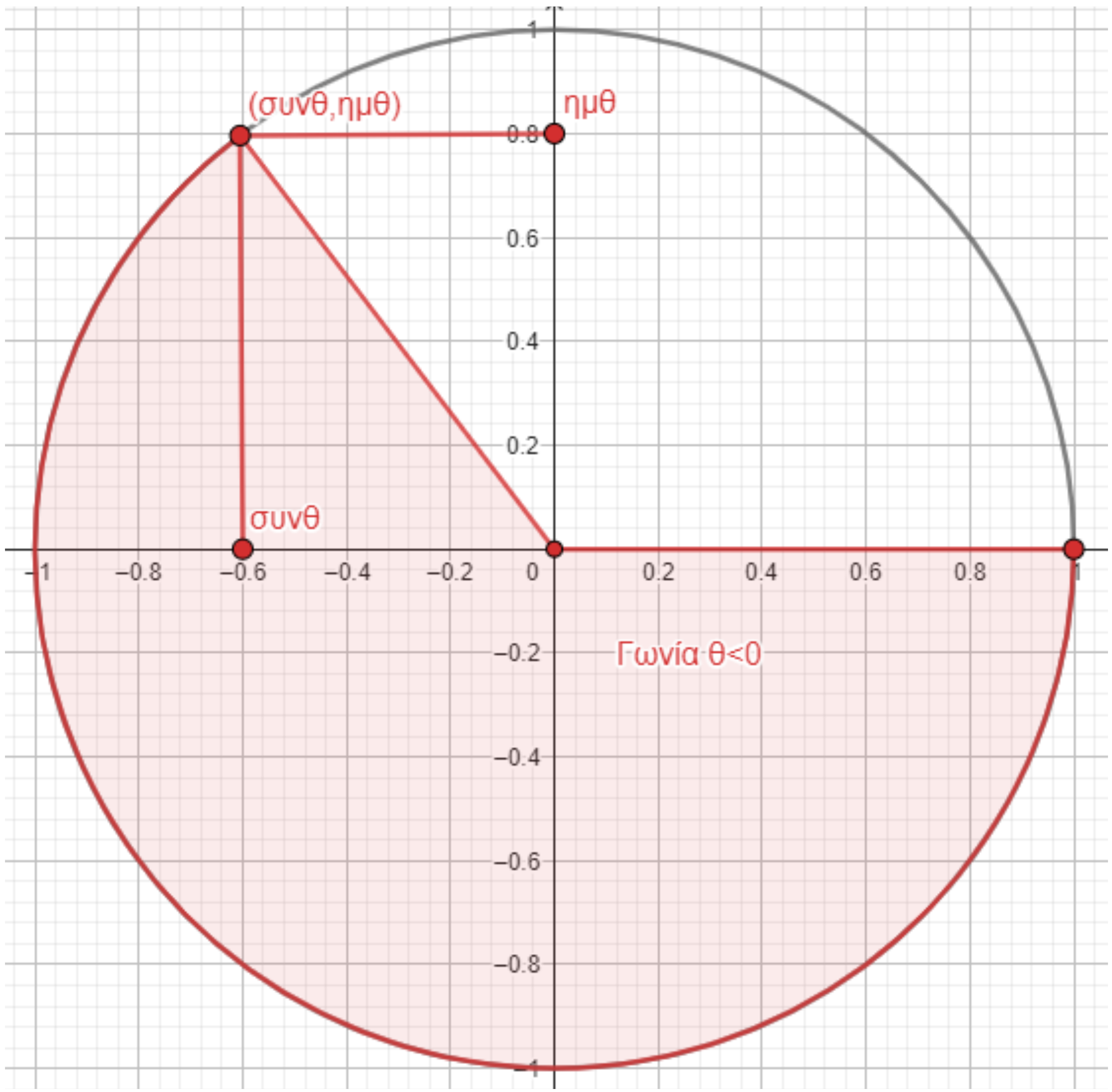
Τριγωνομετρικοί αριθμοί αρνητικής γωνίας

$$-180° < \theta < -90°$$



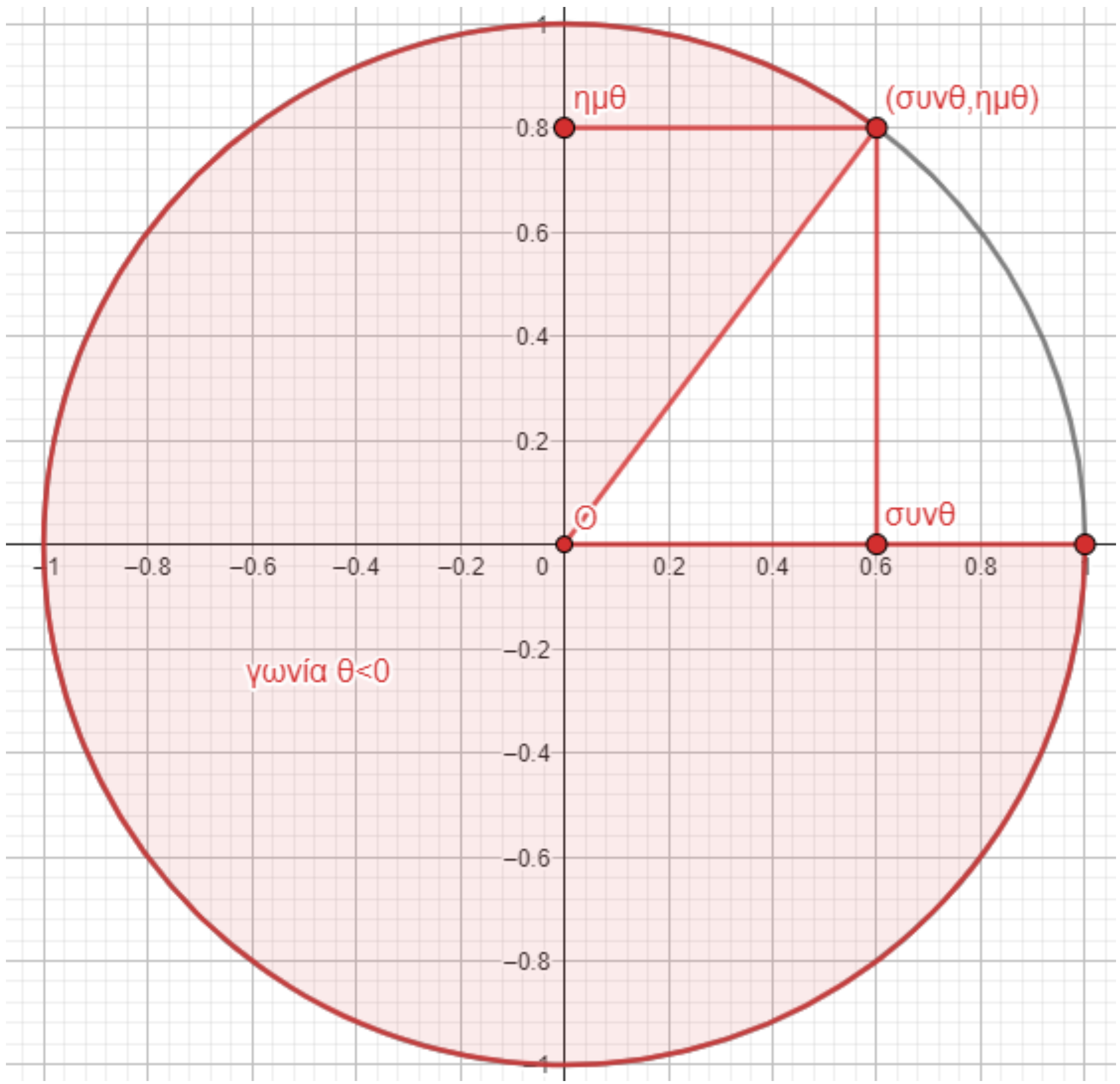
Τριγωνομετρικοί αριθμοί αρνητικής γωνίας

$$-270^{\circ} < \theta < -180^{\circ}$$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί αρνητικής γωνίας

$$-360° < \theta < -270°$$



- Στόχος μας είναι να λύνουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις της μορφής

$$ημx = a$$
$$συνx = a$$

όπου,

$$-1 \leq \alpha \leq 1$$

- Λόγω της περιοδικότητας των τριγωνομετρικών αριθμών, οι λύσεις είναι πάντα άπειρες. Για παράδειγμα η εξίσωση

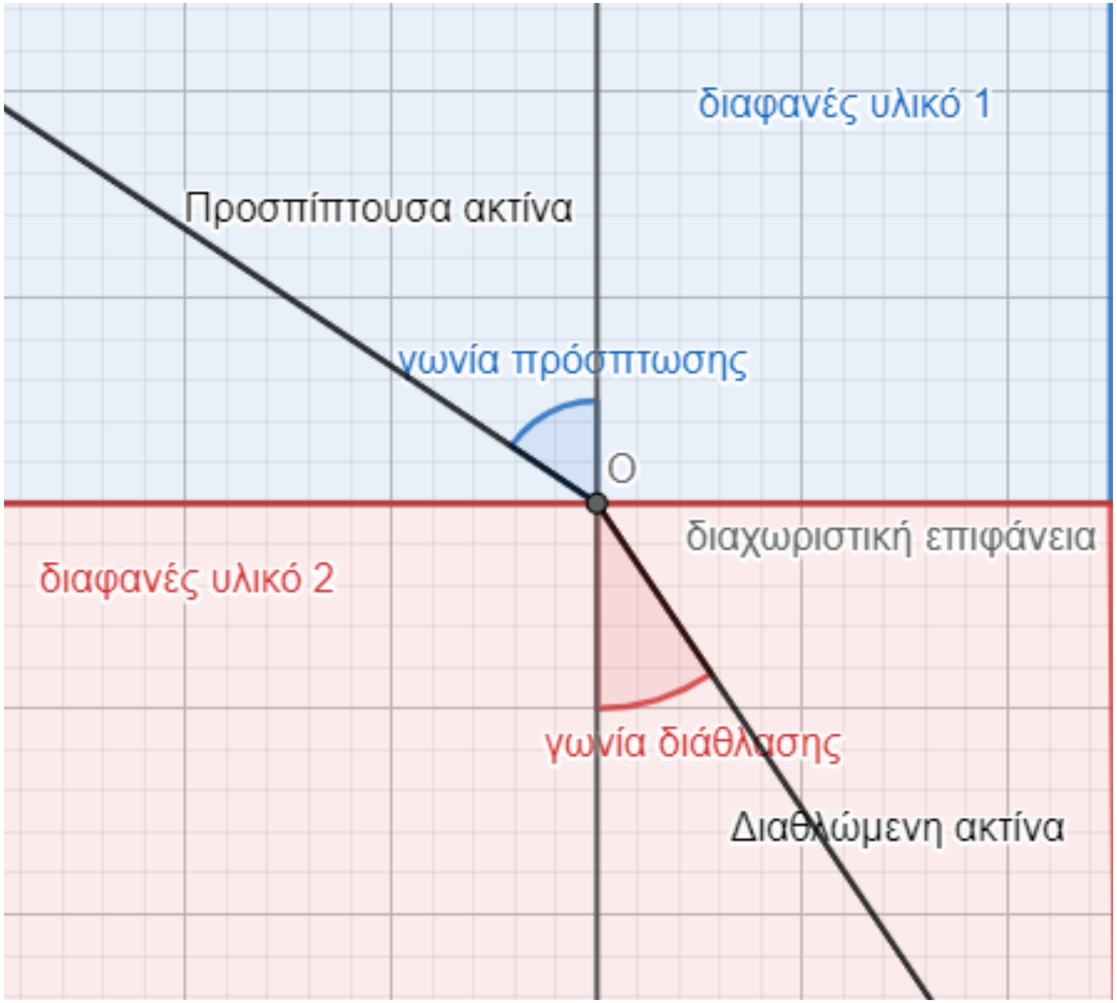
$$ημx = 0$$

έχει λύσεις όλα τα ακέραια πολλαπλάσια των 360 μοιρών.

- Στην πράξη το πρόβλημα είναι αυτό που καθορίζει το διάστημα μέσα στο οποίο αναζητούμε τις λύσεις.

- Στην **διάθλαση** η γωνία πρόσπτωσης και η γωνία διάθλασης βρίσκονται στο διάστημα

$$0° < \theta < 90°$$



- Νόμος του Snell,

$$n_1 \cdot \eta\mu\theta_1 = n_2 \cdot \eta\mu\theta_2$$

- Όταν ο άγνωστος είναι κάποια από τις δύο γωνίες, τότε πρέπει να λύσουμε την αντίστοιχη τριγωνομετρική εξίσωση.
- Για παράδειγμα αν ο άγνωστος είναι η γωνία διάθλασης, τότε θα έχουμε την εξίσωση,

$$\eta\mu\theta_2 = \frac{n_1 \cdot \eta\mu\theta_1}{n_2}$$

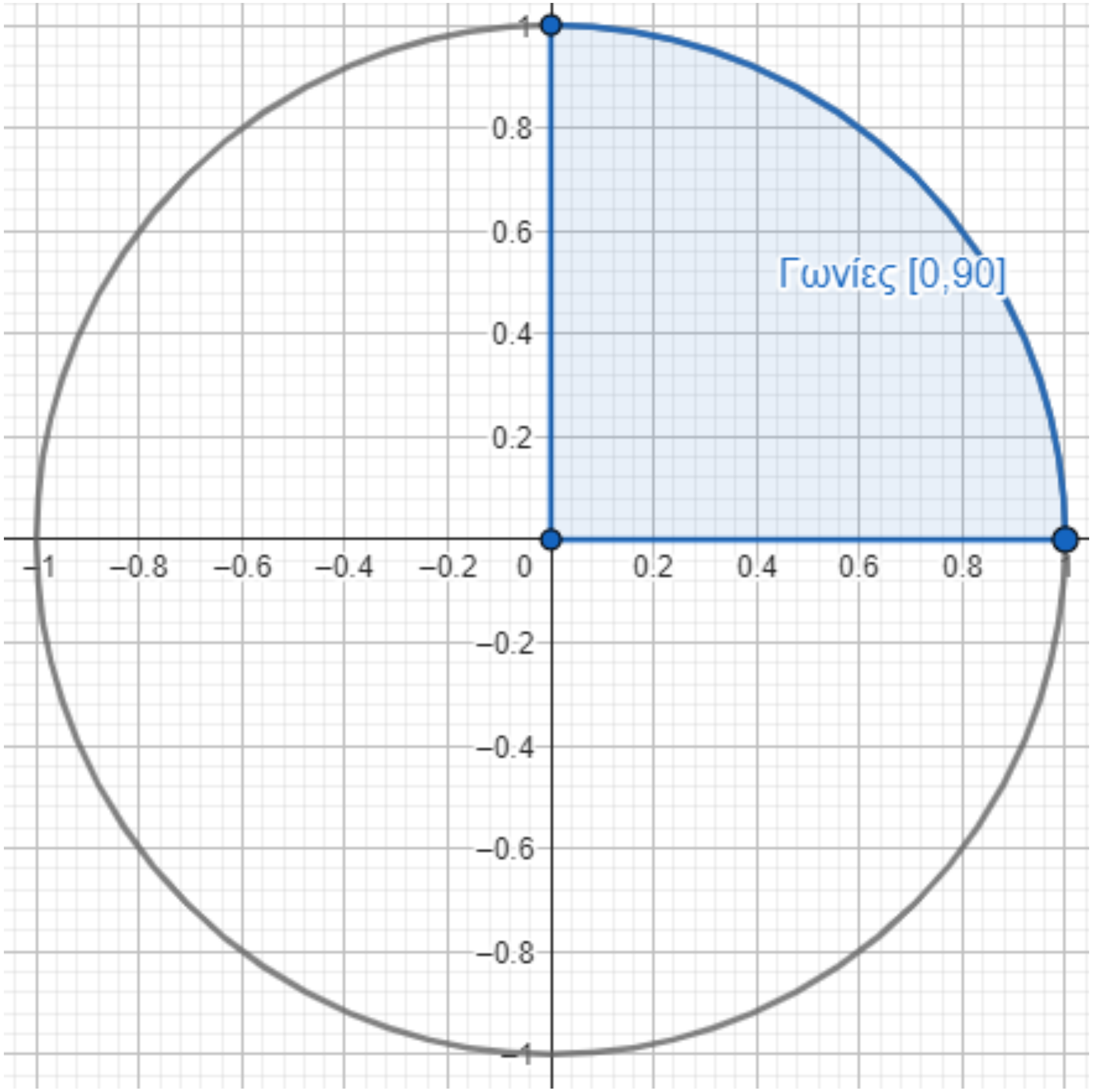
η οποία με τον περιορισμό $0° < \theta_2 < 90°$ έχει μοναδική λύση.

Για την λύση της καταφεύγουμε σε πίνακες μιας και δεν υπάρχει κλειστός τύπος που να την δίνει,

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°							
Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751

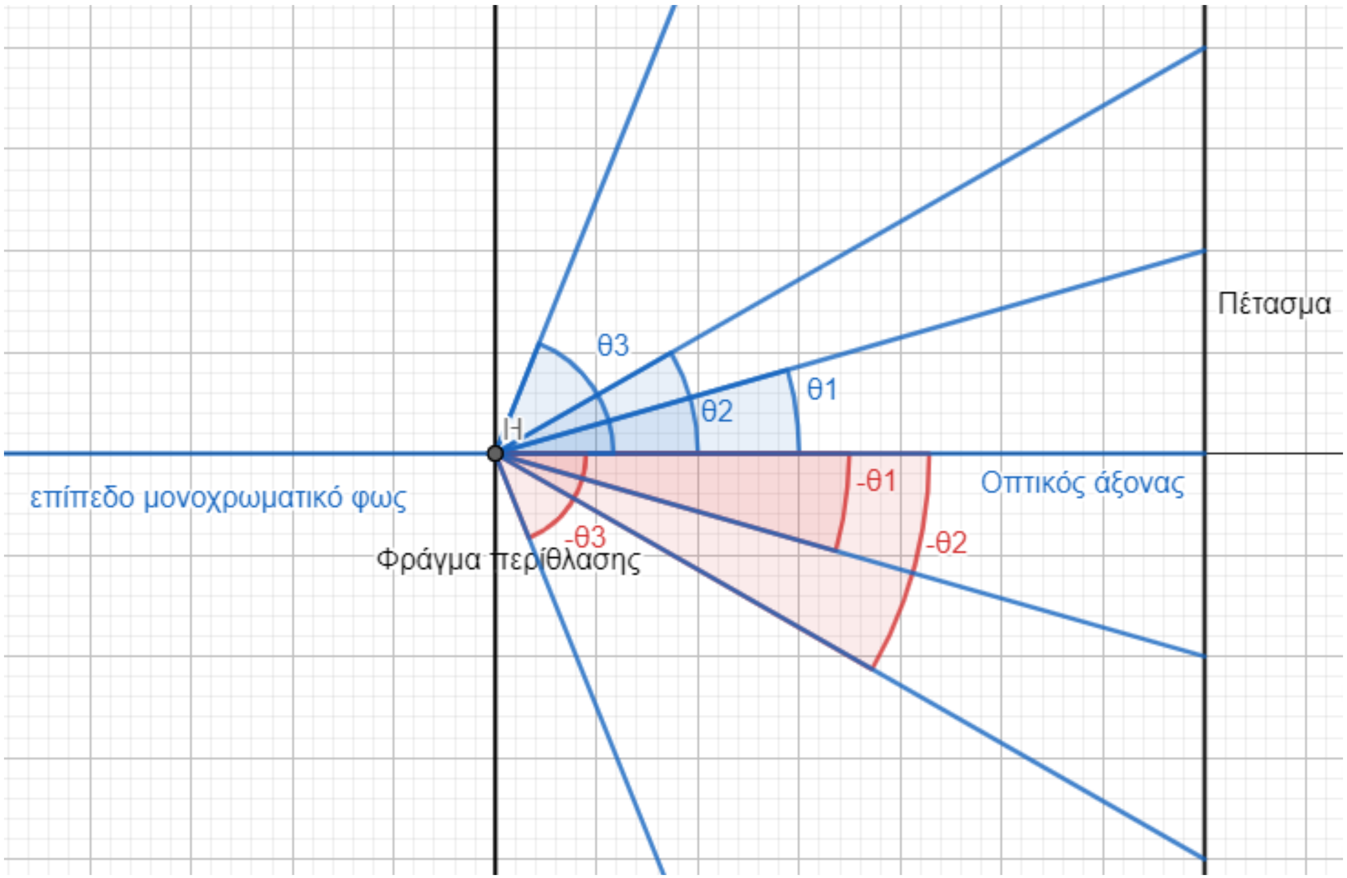
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	,01908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,2698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

- Περιοχή μέσα στην οποία αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης που περιγράφει τον νόμο του Snell,



- Στην περίθλαση το διαμόρφωμα των φωτεινών κροσσών συμβολής πάνω στο πέτασμα παρατηρείται σε ένα σύνολο γωνιών στο διάστημα

$$-90° < \theta < 90°$$



- Οι φωτεινοί κροσσοί στο πέτασμα παρατηρούνται στις γωνίες οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση,

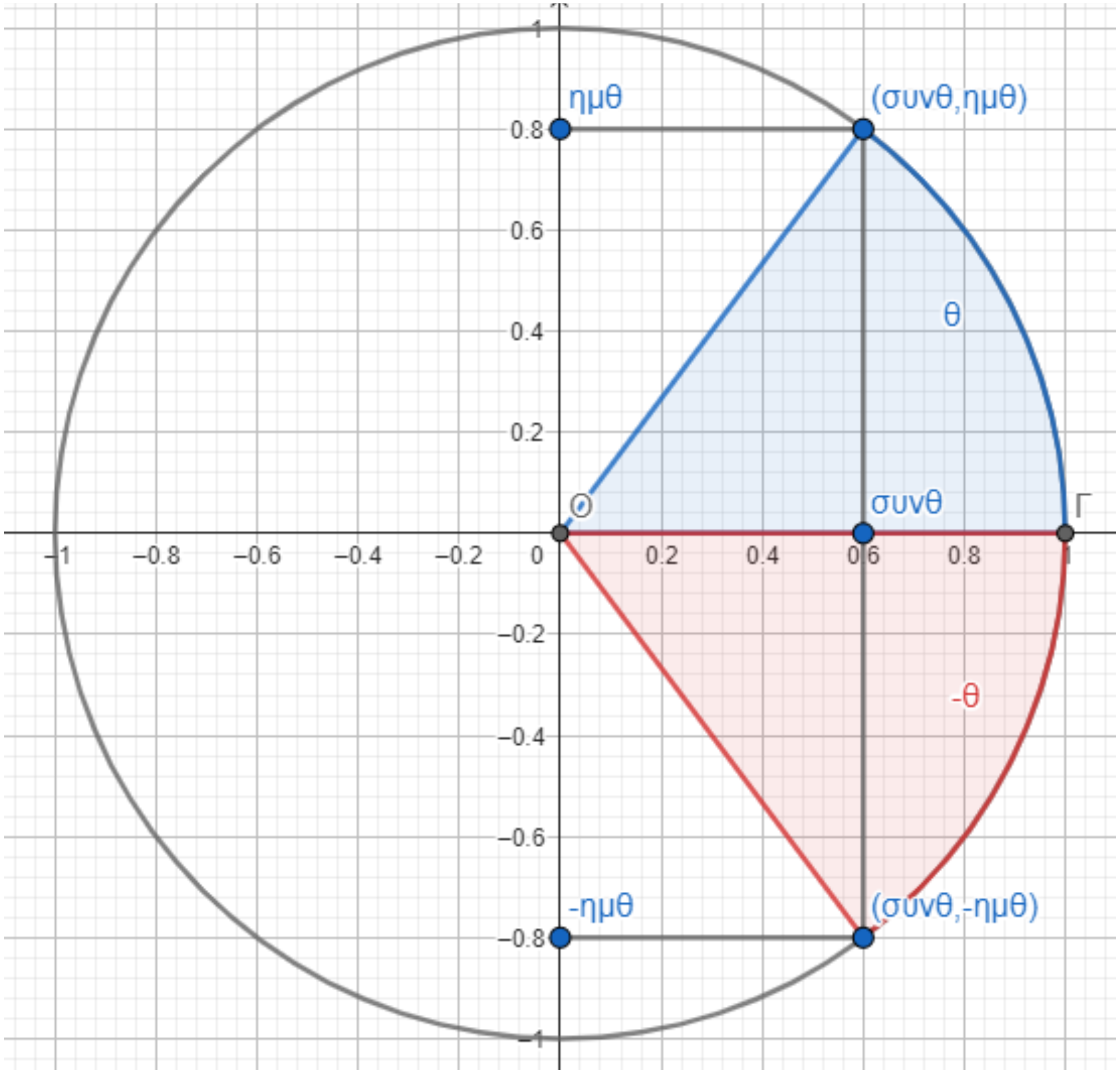
$$d \cdot \text{ημ}\theta = m \cdot \lambda$$

  για τις διάφορες τιμές του ακεραίου *m*,

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  λ είναι το μήκος κύματος του μονοχρωματικού φωτός και *d* είναι η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σχισμών.
- Ο ακέραιος *m* ονομάζεται τάξη της συμβολής.
- Πάντα έχουμε μία λύση για m=0 την θ=0.
- Για θετικές τιμές του *m* παίρνουμε θετικές λύσεις για την γωνία θ.
- Για αρνητικές τιμές του *m* παίρνουμε αρνητικές λύσεις για την γωνία θ.

Λόγω της συμμετρίας της εξίσωσης, κάθε λύση έχει και την συμμετρική της ως προς τον οριζόντιο άξονα. Δηλαδή θ είναι μία λύση αν και μόνο αν $-\theta$ είναι λύση.



- Συνεπώς όταν αναζητούμε τις γωνίες των φωτεινών περιοχών του διαμορφώματος λύνουμε για θετικές τιμές του *m* την εξίσωση,

$$\eta\mu\theta = \frac{m \cdot \lambda}{d}$$

στο διάστημα από 0 έως 90 μοίρες. Για κάθε τάξη συμβολής βρίσκουμε και μία μοναδική λύση

$$\begin{gathered} m = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ m = 1 \Rightarrow \theta = \theta_1 \\ m = 2 \Rightarrow \theta = \theta_2 \\ \vdots \end{gathered}$$

- Τότε γνωρίζουμε και τις γωνίες για τις αρνητικές τάξης συμβολής,

$$\begin{gathered} m = -1 \Rightarrow \theta = -\theta_1 \\ m = -2 \Rightarrow \theta = -\theta_2 \\ \vdots \end{gathered}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να λυθεί η εξίσωση $2 \cdot \eta\mu x = \sqrt{3}$ στο διάστημα από 0 έως 360 μοίρες.

Δίνεται ότι $\eta\mu 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να λυθεί η εξίσωση $2 \cdot \eta\mu x = \sqrt{3}$ στο διάστημα από 0 έως 360 μοίρες.

Δίνεται ότι $\eta\mu 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

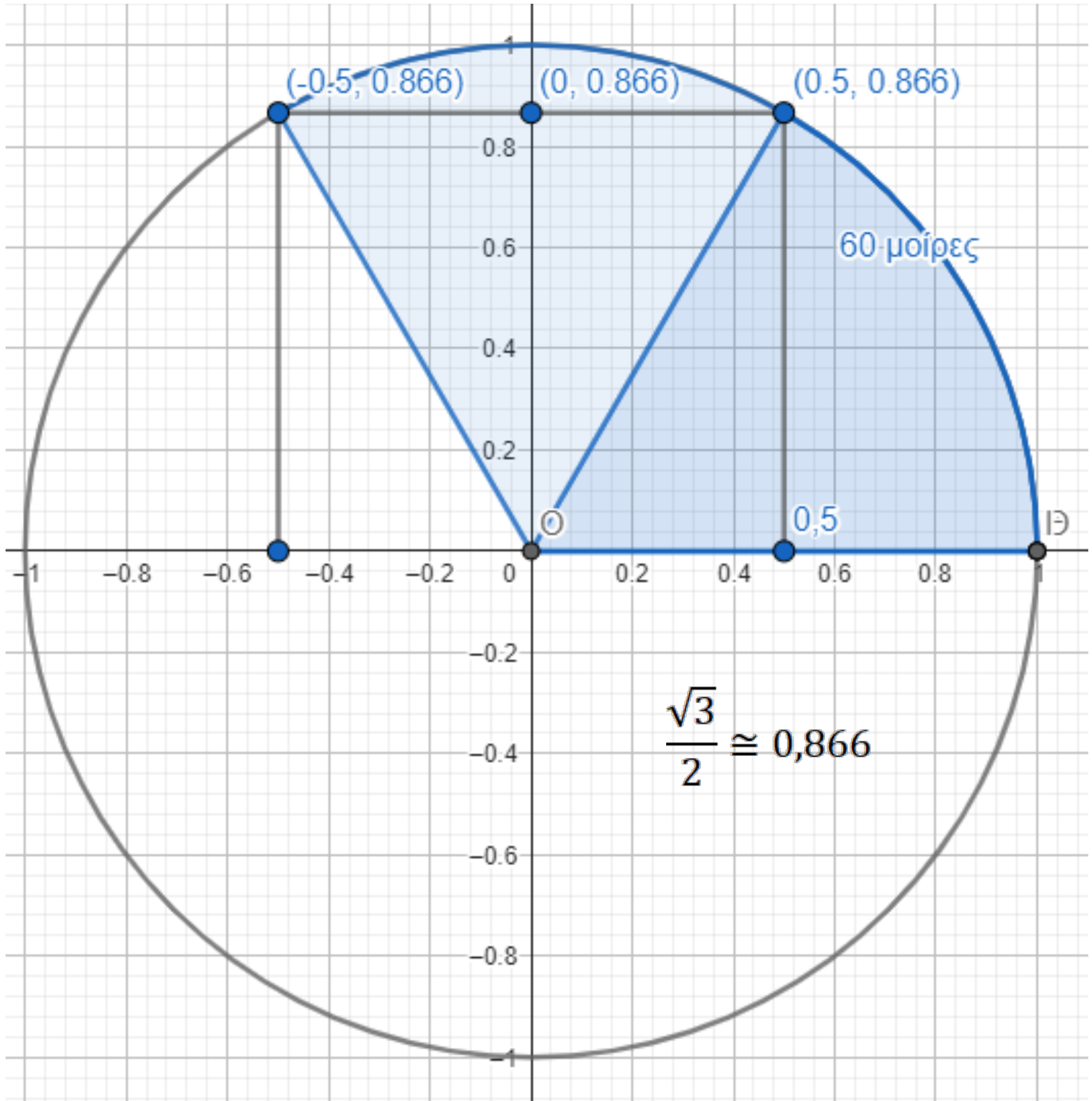
Απάντηση. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 2,

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

και συνεπώς μία λύση είναι σίγουρα η γωνία των 60 μοιρών.

Έχουμε άλλες λύσεις στον κύκλο;

Υπάρχει μία ακόμη γωνία η οποία έχει το ίδιο ημίτονο με την γωνία των 60 μοιρών, μπορείτε να την βρείτε;

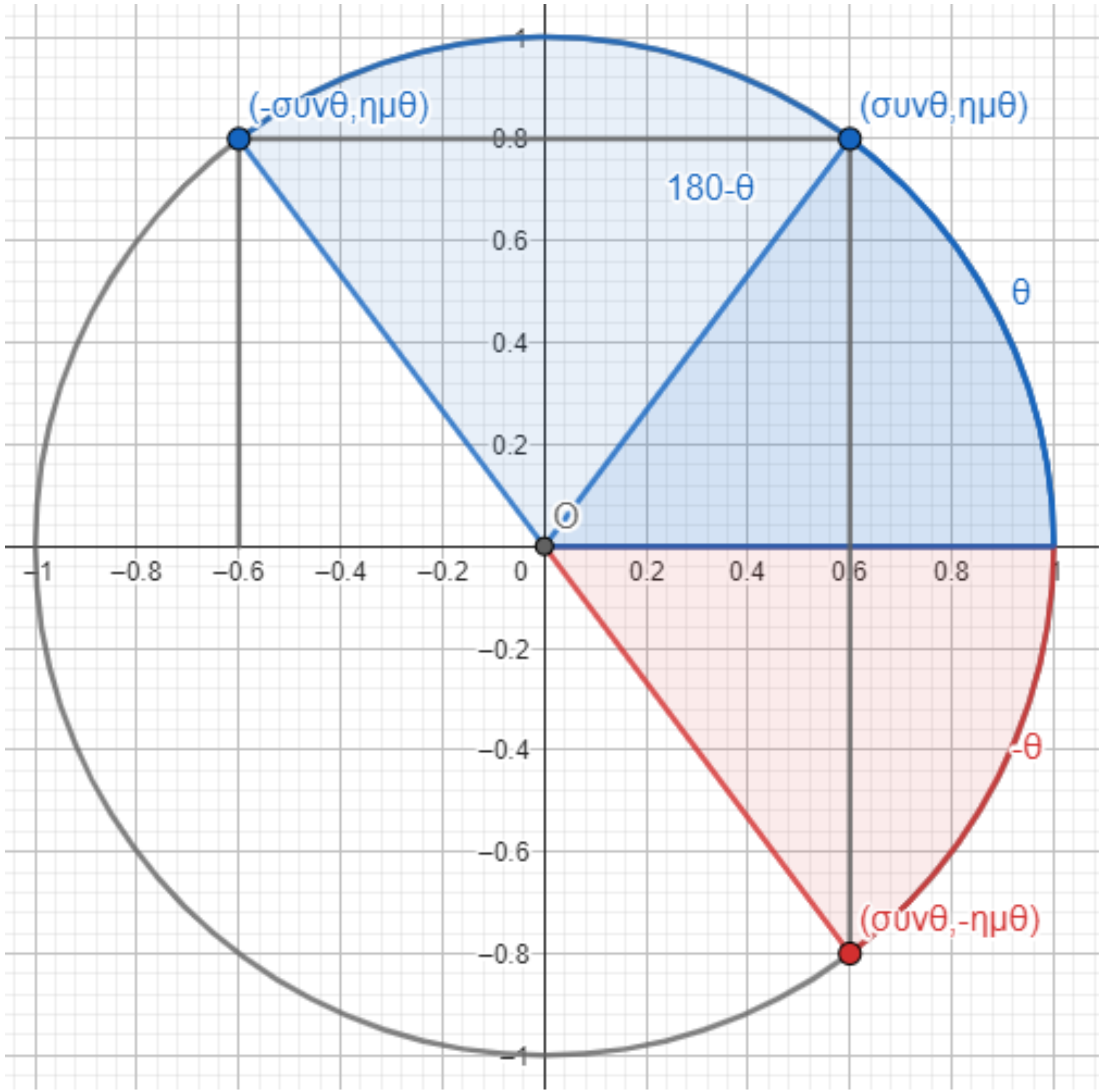


- Γενικά λοιπόν ισχύει ότι

$$\eta\mu\theta = \eta\mu(180 - \theta)$$

- Επίσης γενικά ισχύει ότι,

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu(-\theta)$$



(-συνθ,ημθ)
(συνθ,ημθ)
180-θ
θ
O
-θ
(συνθ,-ημθ)

Άσκηση 2. Να λυθεί η εξίσωση $2^{2023}\eta\mu x = 2^{2022} \cdot 2^{1/2}$ στο Διάστημα από 0 έως 360 μοίρες.

Δίνεται ότι $\eta\mu 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Απάντηση. Έχουμε,

$$2^{2023}\eta\mu x = 2^{2022} \cdot 2^{1/2}$$
$$\eta\mu x = \frac{2^{2022} \cdot 2^{1/2}}{2^{2023}}$$
$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και συνεπώς μία λύση είναι σίγουρα η γωνία των 45 μοιρών.

Έχουμε άλλες λύσεις;

Άσκηση 3. Να λυθεί η εξίσωση $e^{2022\cdot x}\left(2^{1/2}\sigma\upsilon\nu x - 2^{-1/2}\right) = 0$ στο Διάστημα από 0 έως 360 μοίρες.

Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu 60° = \frac{1}{2}$

Απάντηση. Έχουμε,

$$e^{2022\cdot x} = 0 \text{ ή } 2^{1/2}\sigma\upsilon\nu x - 2^{-1/2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$2^{1/2}\sigma\upsilon\nu x - 2^{-1/2} = 0 \text{ γιατί πάντα } e^{2022\cdot x} > 0 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$$

και συνεπώς μία λύση είναι σίγουρα η γωνία των 60 μοιρών.

Έχουμε άλλες λύσεις;

Άσκηση 4. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(2x+45) = \frac{1}{2}$ στο διάστημα από 0 έως 180 μοίρες.

Δίνεται ότι $\eta\mu 30° = \frac{1}{2}$

Απάντηση. Η εξίσωση γράφεται

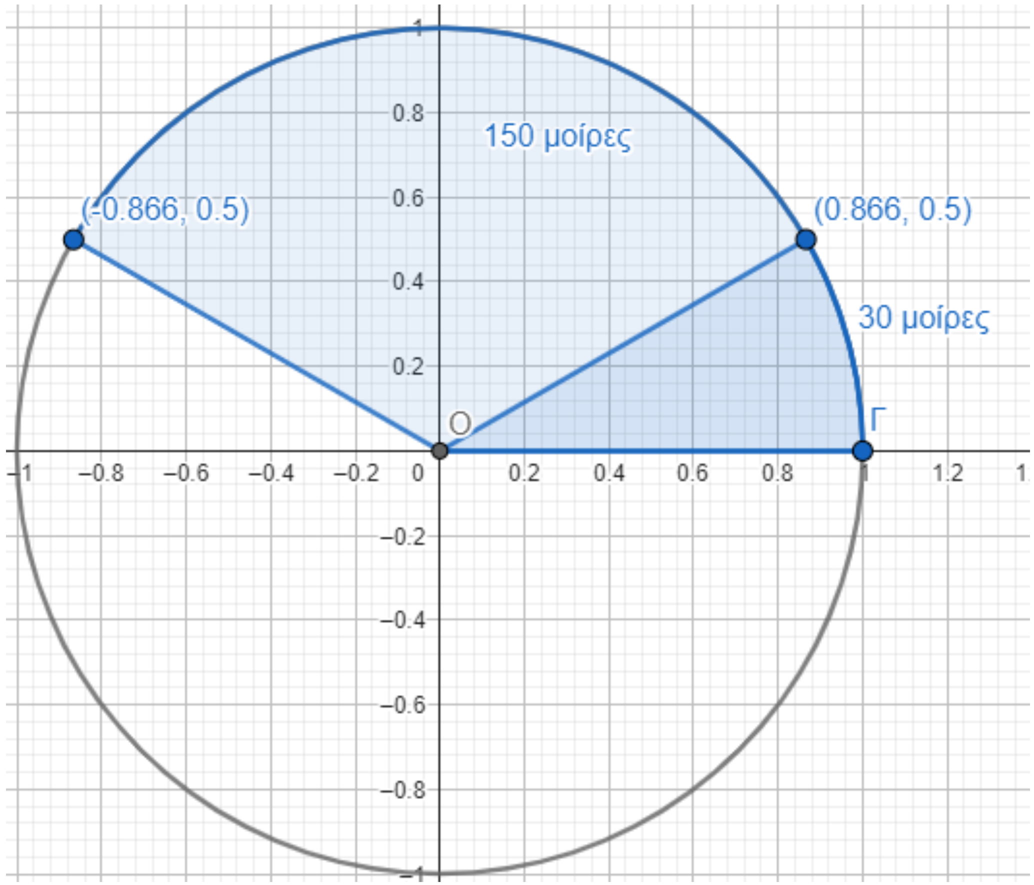
$$\eta\mu(2x+45) = \eta\mu 30°$$

και εξισώνοντας τις ποσότητες μέσα στα ημίτονα παίρνουμε μία λύση που είναι όμως αρνητική,

$$2x + 45 = 30 \Leftrightarrow$$
$$x = -7{,}5°$$

και συνεπώς δεν βρίσκεται στο διάστημα που ψάχνουμε. Αναγκαστικά την απορρίπτουμε.

- Όμως από τις ιδιότητες του ημιτόνου, όπως φαίνεται και στο σχήμα,



ημίτονο 1/2 έχει και η γωνία 150 μοίρες όπως επίσης και η γωνία 360+30=390 μοίρες.

- Τελικά δοκιμάζοντας,

$$2x + 45 = 150$$
$$2x + 45 = 390$$

- Βρίσκουμε δύο λύσεις στο ζητούμενο διάστημα,

$$x = 52{,}5°$$
$$x = 172{,}5°$$