$$g(x) = x^2$$

$$f(x) = 3x - 2$$

$$\psi(x) = \sqrt{3x - 2}$$

$$F(x) = e^x$$

Συναρτήσεις

$$G(x) = \ln x$$

$$T(x) = \ln x^2$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$H(x) = \frac{1}{x}$$

$$h(x) = \sqrt{x}$$

Σύνολα

- Γενικά ένα σύνολο είναι μία συλλογή καλώς ορισμένων και διακεκριμένων αντικείμενων, πραγματικών ή της νόησης μας. Εμείς όμως θα ασχοληθούμε μόνο με σύνολα αριθμών.
- Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται στοιχεία του συνόλου.
- Ένα σύνολο αριθμών λοιπόν είναι μια συλλογή καθορισμένων και διακεκριμένων αριθμών και συμβολίζονται συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα $A,B,\Gamma,\ldots$ ή $A,B,C,\ldots$ Για παράδειγμα

$$A=\{1,2,3\}$$

$$B=\{0\}$$

- Ένα σύνολο μπορεί να περιέχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών ή άπειρο. Για παράδειγμα τα σύνολα των φυσικών αριθμών,

$$\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$$

των ακεραίων,

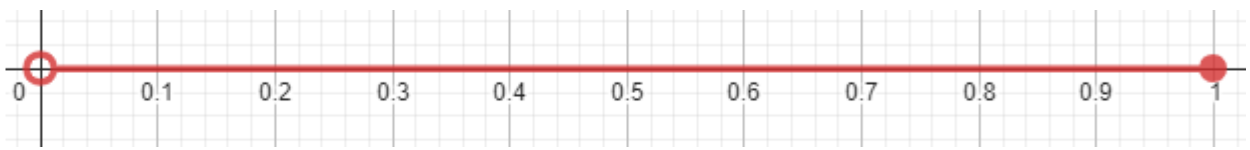
$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

των ρητών και των πραγματικών είναι όλα άπειρα σύνολα.

Διαστήματα

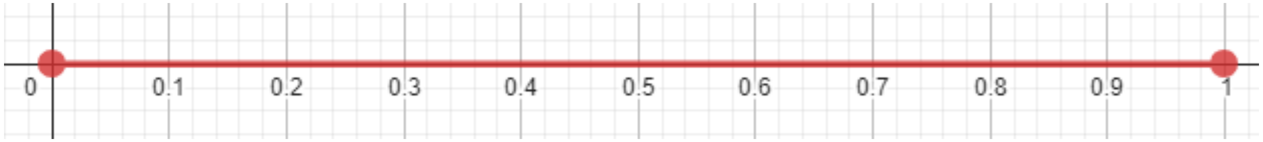
- Τα ανοιχτό διάστημα (0,1) περιέχει όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 0 και μικρότεροι του 1.

- Το ημιανοιχτό διάστημα (0,1] περιέχει όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 0 και μικρότεροι ή ίσοι του 1.



- Το ημιανοιχτό διάστημα [0,1) περιέχει όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και μικρότεροι του 1.

- Το κλειστό διάστημα [0,1] περιέχει όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και μικρότεροι ή ίσοι του 1.



- Οι αριθμοί 0 και 1 ονομάζονται άκρα των παραπάνω διαστημάτων και όπως είδατε μπορεί να ανήκουν ή όχι σε αυτά.
- Τα άκρα ενός διαστήματος μπορεί να είναι οποιοιδήποτε αριθμοί συμπεριλαμβανομένων και του **-∞** ή **+ ∞**. Για παράδειγμα το διάστημα

$$(-\infty, 0)$$

  περιέχει τους αρνητικούς αριθμούς και το διάστημα

$$(0, +\infty)$$

  τους θετικούς αριθμούς.
- Μαντέψτε ποιοι αριθμοί ανήκουν στα παρακάτω διαστήματα,

$$(-\infty, 0), \left(\sqrt{2}, +\infty\right), (-\infty, \pi], \left[3^{\sqrt{3}}, +\infty\right), (-\infty, +\infty)$$

Υποσύνολα

- Αν κάθε στοιχείο του συνόλου *A* είναι στοιχείο του συνόλου *B*, τότε λέμε ότι το σύνολο *A* είναι υποσύνολο του συνόλου *B* και γράφουμε

$$A \subset B$$

- Δεχόμαστε την ύπαρξη ενός συνόλου που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και είναι υποσύνολο όλων των συνόλων. Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\emptyset$
- Παρατηρείστε ότι για κάθε σύνολο *A* ισχύει

$$A \subset A$$

και

$$\emptyset \subset A$$

Παραδείγματα,

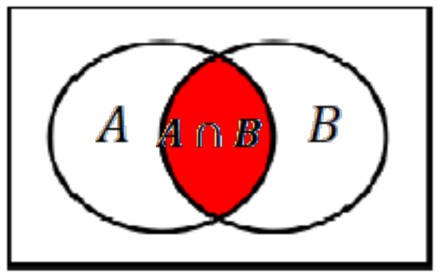
$$(-\infty, 1) \subset (-\infty, 10]$$
$$(1,2) \subset [1,2]$$
$$(0,1) \subset (-1,1)$$

Πράξεις με σύνολα

- Η **τομή** δύο συνόλων *A*,*B* είναι ένα σύνολο που περιέχει τα στοιχεία εκείνα που ανήκουν και στο *A* και στο *B*. Συμβολίζεται με

$$A \cap B$$

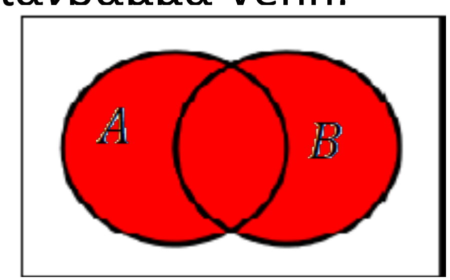
και χρησιμοποιώντας το διάγραμμα Venn



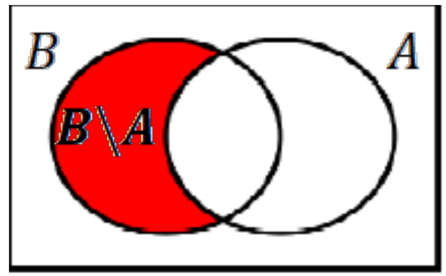
- Η **ένωση** δύο συνόλων *A*,*B* είναι ένα σύνολο το οποίο περιέχει στοιχεία του συνόλου *A* ή του συνόλου *B*. Συμβολίζεται με

$$A \cup B$$

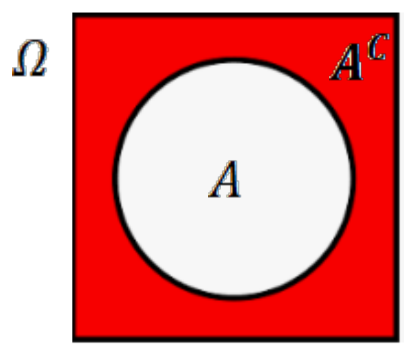
και χρησιμοποιώντας το διάγραμμα Venn.



- Μπορούμε να **αφαιρέσουμε** ένα σύνολο *A* από ένα σύνολο *B* και να πάρουμε το σύνολο $B \backslash A$ ή $B-A$ το οποίο περιέχει τα στοιχεία του *B* που δεν ανήκουν στο *A*.



- Επίσης όταν μελετάμε υποσύνολα ενός ευρύτερου συνόλου *Ω*, τότε μπορούμε να πάρουμε το συμπληρωματικό ενός συνόλου *A* το οποίο περιέχει τα στοιχεία εκείνα τα οποία δεν ανήκουν στο *A* και συμβολίζεται με A^c



- Παραδείγματα πράξεων με σύνολα

$$\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$$
$$\{1,2,3\}\cap\{2,3,4\}=\{2,3\}$$
$$\{1,2,3\}\setminus\{2,3,4\}=\{1\}$$
$$\{2,3,4\}\setminus\{1,2,3\}=\{4\}$$
$$\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{N}$$
$$\mathbb{N}\setminus\mathbb{Z}=\varnothing$$
$$\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}=\{\ldots,-2,-1,0\}$$
$$[0,2]\cup(1,3]=[0,3]$$
$$[0,2]\cap(1,3]=(1,2]$$
$$(-\infty,3)\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}$$
$$(-\infty,3)\cap(1,+\infty)=(1,3).$$

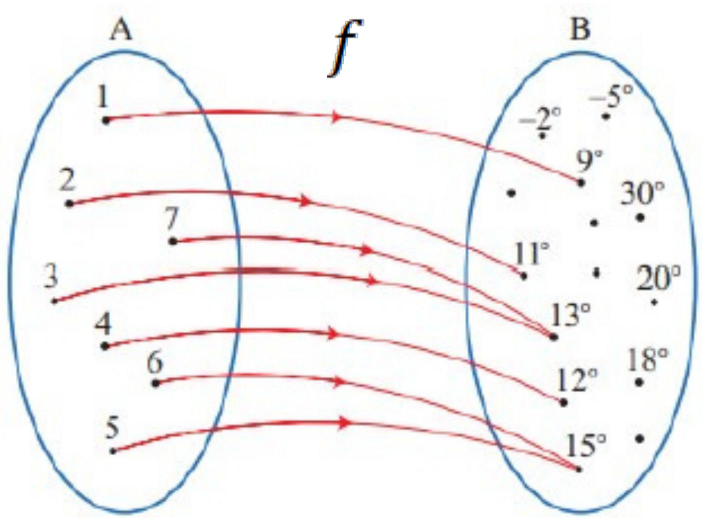
$$(0,1)^C=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$$
$$[0,1)^C=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$$
$$(0,1]^C=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$$
$$(-\infty,1)^C=[1,+\infty)$$
$$[1,+\infty)^C=(-\infty,1)$$

Τι είναι συνάρτηση;

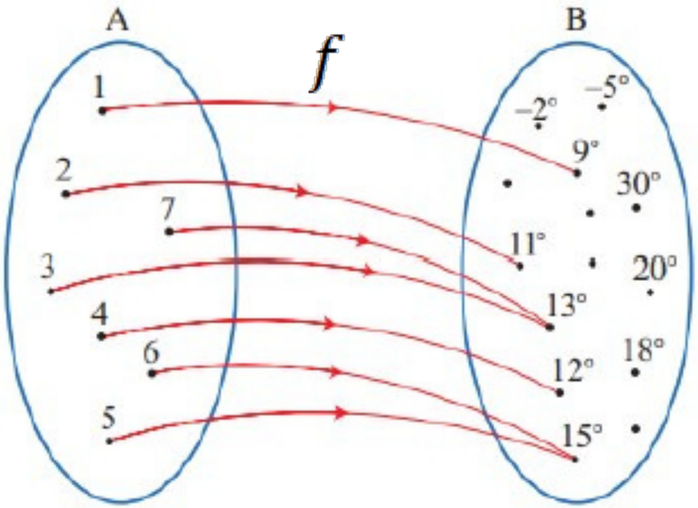
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *Α* και πεδίο τιμών ένα σύνολο *Β* είναι ένας «κανόνας» με τον οποίο σε **κάθε** στοιχείο του συνόλου *Α* αντιστοιχούμε ένα **μοναδικό** στοιχείο του συνόλου *Β*. Συμβολικά γράφουμε

$$f: A \to B$$

- Για παράδειγμα πάρτε τις μέσες θερμοκρασίες μίας εβδομάδας του χειμώνα στην Σητεία,



- Παρατηρείστε ότι στο πεδίο τιμών *Β* υπάρχουν θερμοκρασίες που δεν έχουν αντιστοιχηθεί σε κανένα στοιχείο του πεδίου ορισμού *Α*.



- Η τιμή *y* μίας συνάρτησης *f* στο *x* συμβολίζεται με *f*(x) και συνεπώς,

$$y=f(x)$$

- Έτσι για το παράδειγμα μας

$$f(1)=9$$

$$f(2)=11$$

$$f(3)=13$$

$$f(4)=12$$

$$f(5)=15$$

$$f(6)=15$$

$$f(7)=13$$

Παραδείγματα συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

- Η *f* αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό αριθμό το τετράγωνο του, έτσι για παράδειγμα *f*(-2)=4, *f*(0)=0, *f*(2)=4,… Παρατηρείστε ότι το 2 και το -2 αντιστοιχούν στον ίδιο αριθμό 4. Αυτό επιτρέπεται σε μία συνάρτηση.
- Αυτό που δεν επιτρέπεται είναι να αντιστοιχεί ένας αριθμός από το πεδίο ορισμού σε περισσότερους του ενός αριθμούς του πεδίου τιμών.
- Η *g* αντιστοιχεί σε κάθε μη αρνητικό αριθμό την τετραγωνική του ρίζα. Έτσι *g*(0)=0, *g*(1)=1, *g*(16)=4, *g*(144)=12…
- Το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης λαμβάνεται ως το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο ο τύπος της έχει νόημα. Έτσι το πεδίο ορισμού της *g* θα είναι το διάστημα [0,+∞) και της *h* θα είναι η ένωση διαστημάτων,

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

ή διαφορετικά

$$\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = \eta\mu\, x \qquad\qquad g(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

- Σε κάθε γωνία *x* αντιστοιχούμε το ημίτονο και το συνημίτονο της. Οι γωνία μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και συνεπώς το πεδίο ορισμού τους είναι όλοι οι αριθμοί.
- Αν την γωνία την μετράμε σε μοίρες οι τιμές τους στις γωνίες των 0, των 30 και των 60 μοιρών θα είναι,

$$f(0) = 0, f(30) = \frac{1}{2}, f(\,60) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ldots$$

$$g(0) = 1, g(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}, g(\,60) = \frac{1}{2} \ldots$$

- Προσέξτε ότι οι τριγωνομετρικές αυτές συναρτήσεις παίρνουν τιμές μέσα στο διάστημα [-1,1].
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι περιοδικές με περίοδο 360 γιατί επαναλαμβάνονται σε κάθε κύκλο.

Η εκθετική συνάρτηση

- Η πιο δημοφιλής και απλή εκθετική συνάρτηση είναι η

$$f(x) = e^x$$

- Σε κάθε αριθμό *x* αντιστοιχεί την δύναμη του *e* με εκθέτη τον *x*.
- Έχει πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς.
- Μπορεί να πάρει μόνο θετικές τιμές
- Είναι αύξουσα συνάρτηση, δηλαδή όταν μεγαλώνει το *x* μεγαλώνει και η τιμή του, *f*(*x*).

$$f(-1) = \frac{1}{e}, f(0) = 1, f(1) = e, \ldots$$

- Από την άλλη μεριά η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x}$$

είναι φθίνουσα. Δηλαδή όσο αυξάνει το *x* το *f*(*x*) μειώνεται. Γιατί; Που παίρνει τιμές;

Η λογαριθμική συνάρτηση

- Η πιο δημοφιλής λογαριθμική συνάρτηση είναι η

$$f(x) = \ln x$$

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα (0,+∞)
- Παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές,

$$f(1/e^2) = -2, f(1/e) = -1, f(0) = 1, f(e) = 1$$

- Είναι αύξουσα συνάρτηση. Γιατί;
- Επίσης δημοφιλής είναι η λογαριθμική συνάρτηση

$$f(x) = \log x$$

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα (0,+ ∞) και είναι αύξουσα,

$$f(0{,}01) = -2, f(0{,}1) = -1, f(1) = 0, f(10) = 1$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων,

$$(i).\quad f(x) = 3x^2 - 12x + 30$$

$$(ii).\quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(iii).\quad h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(iv).\quad F(x) = \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 3}$$

$$(v).\quad G(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}}$$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

(i). $f(x)=\sqrt{3x-2}+\sqrt{7-x}$

(ii). $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{7x-5}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

(iii). $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(iv). $F(x)=\sqrt{3x^2-30}$

(v). $G(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}$

(vi). $H(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$(i).\quad f(x)=e^{3x-2}$

$(ii).\quad g(x)=e^{\sqrt{x}}$

$(iii).\quad h(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$

$(iv).\quad F(x)=e^{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$

$(v).\quad G(x)=\log(3x-4)$

$(vi).\quad H(x)=\log\left[(x-1)(x-2)\right]$

$(vii).\quad L(x)=\log(e^{x}-1)$