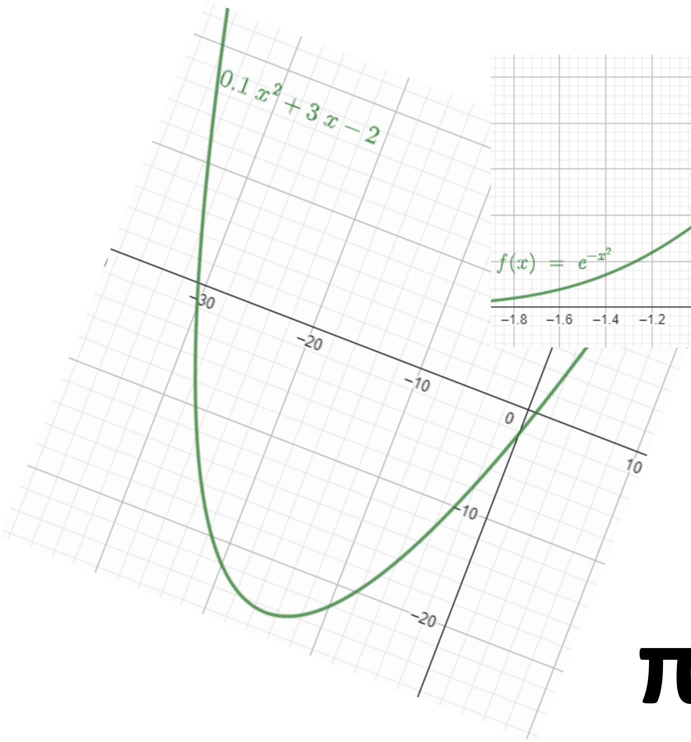
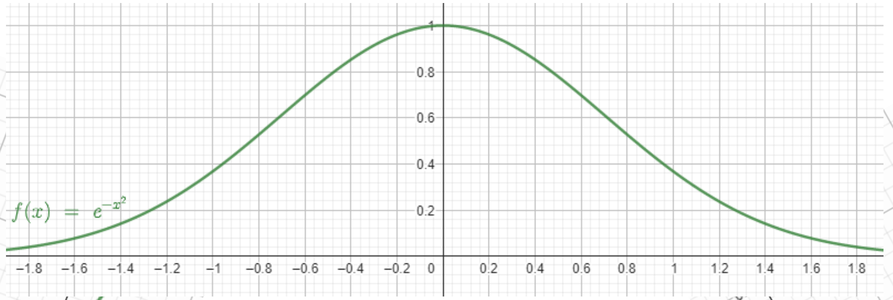
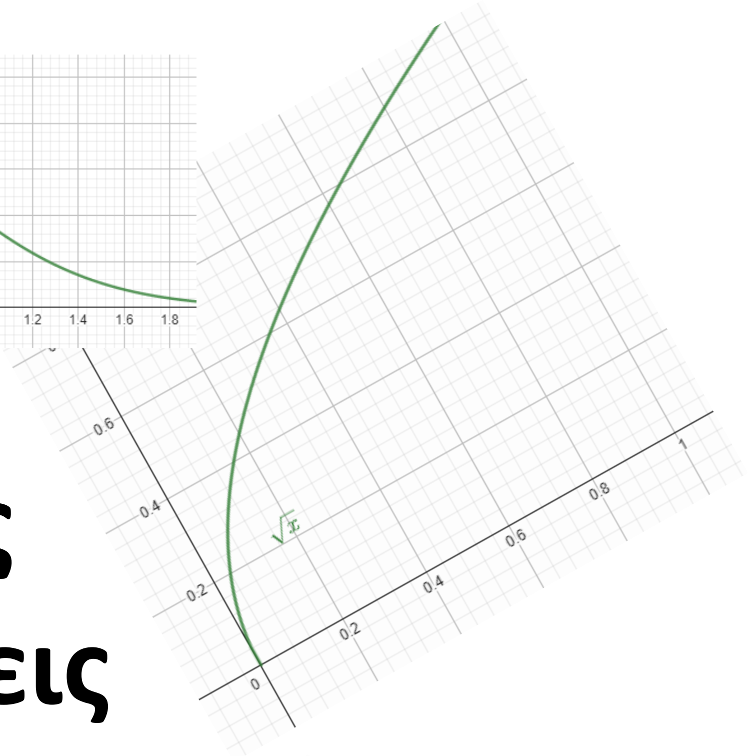
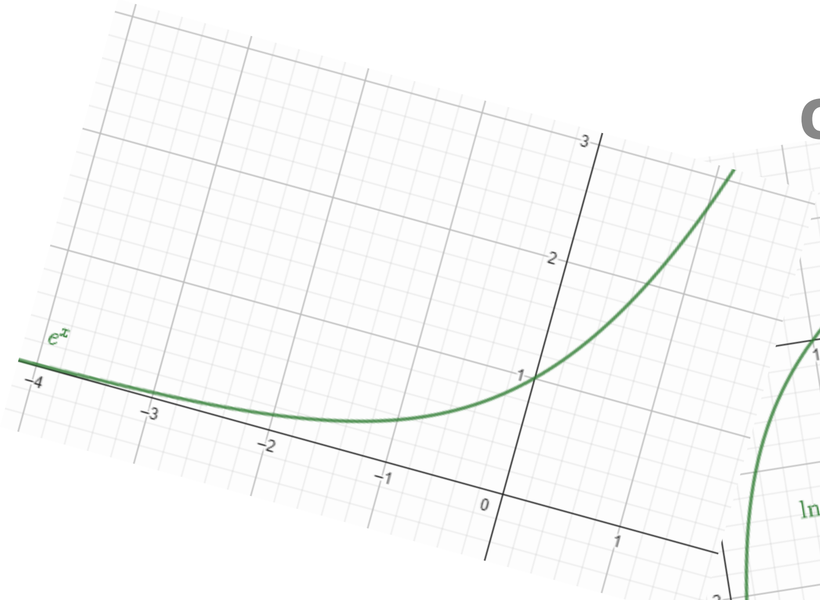


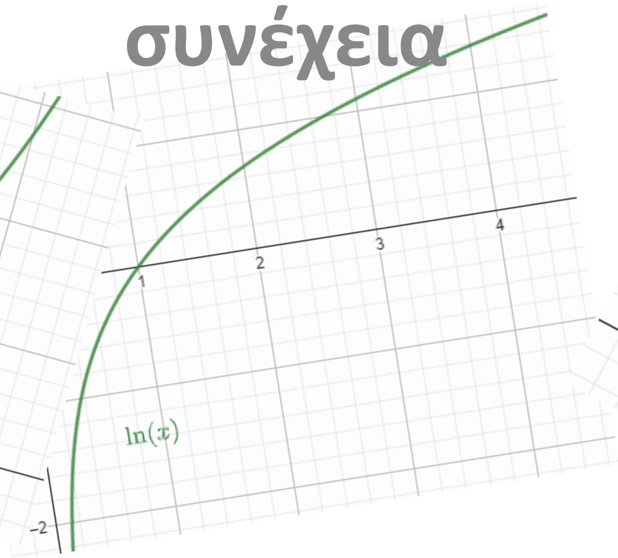


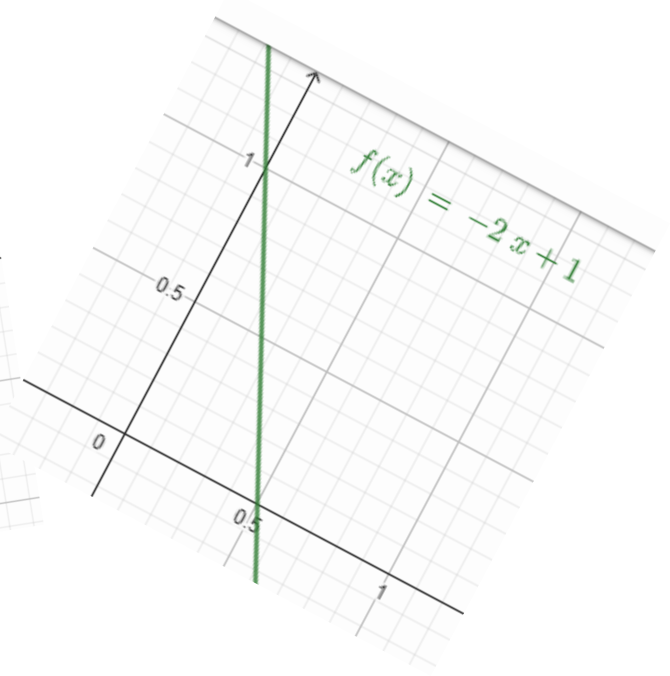


Γραφικές παραστάσεις

συνέχεια



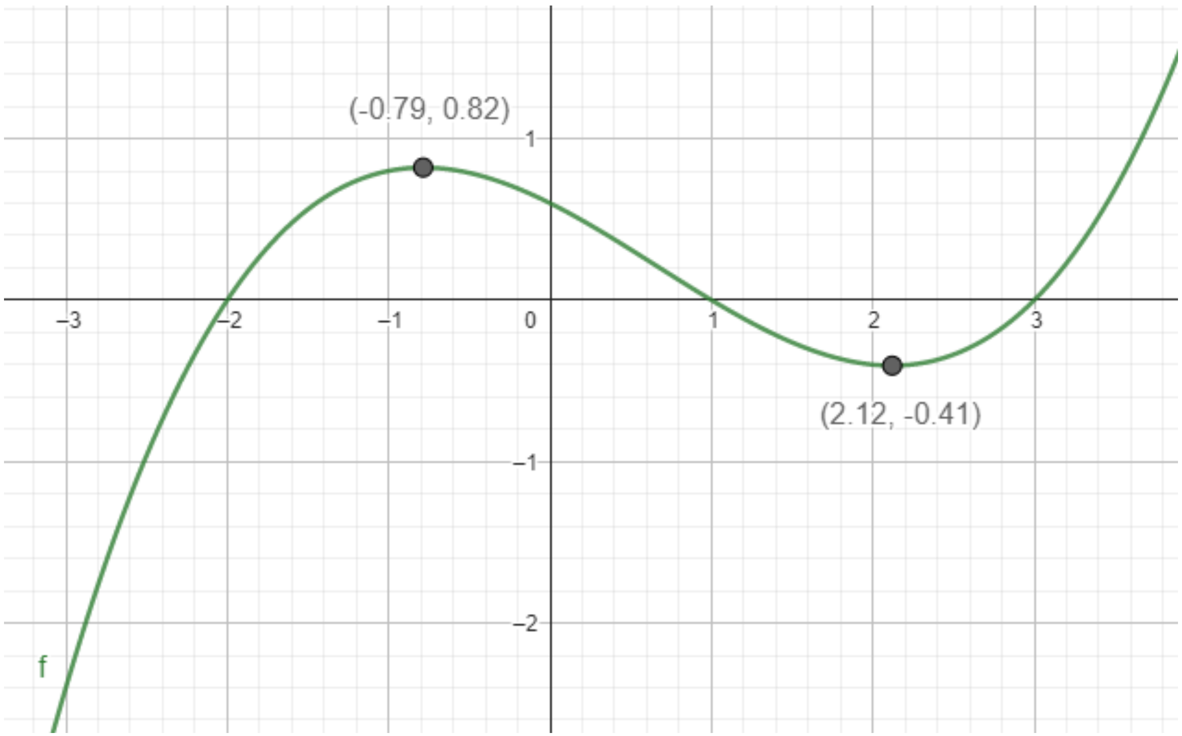




Μονοτονία και ακρότατα

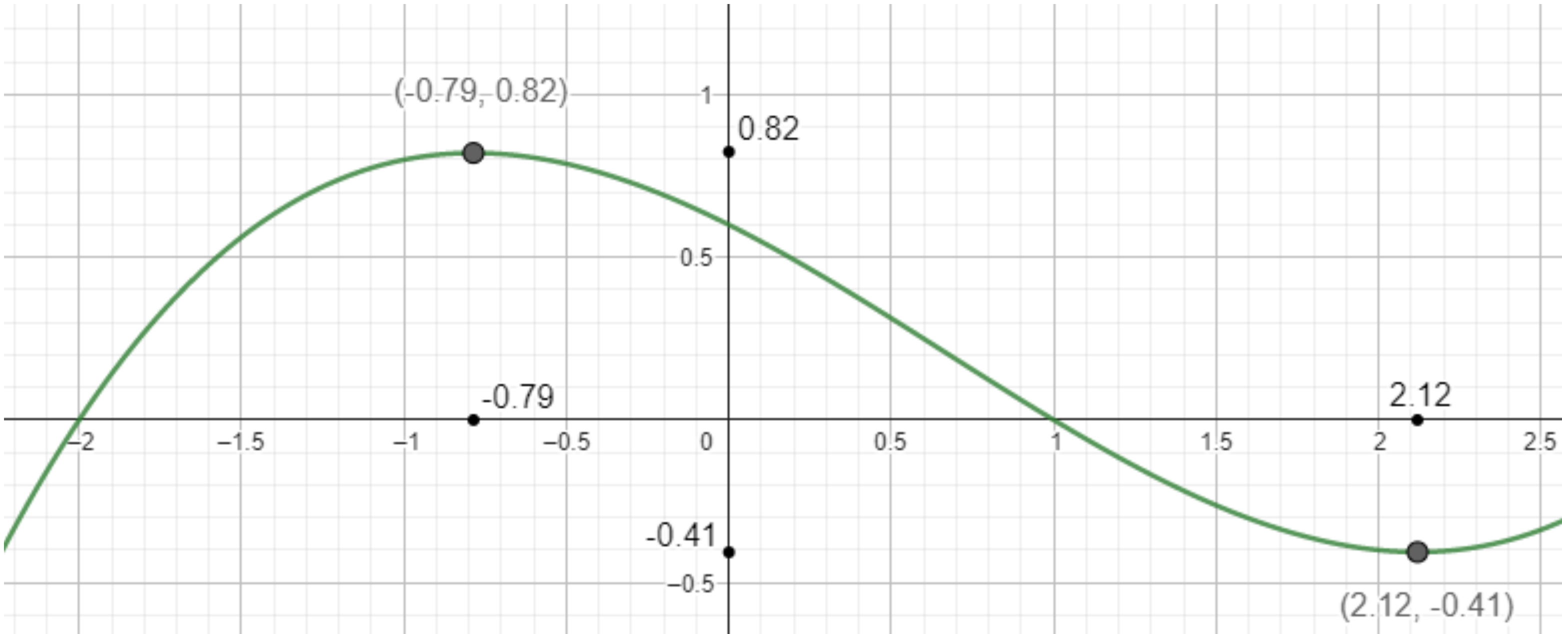
- **Διαστήματα μονοτονίας:** Διαστήματα του πεδίου ορισμού μίας συνάρτησης στα οποία είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Παράδειγμα



- Η f είναι αύξουσα στο διάστημα (-∞ ,-0.79), φθίνουσα στο (-0.79,2.12) και αύξουσα στο διάστημα (2.12,+ ∞)

- **Τοπικά ακρότατα:** Είναι μέγιστες και ελάχιστες τιμές που παίρνουν συναρτήσεις **«τοπικά»** σε περιοχές του πεδίου ορισμού τους.



- Η ην τιμή *f*(-0.79)=0.82, γιατί η τιμή 0.82 της *f* είναι η **μεγαλύτερη** τιμή που παίρνει η συνάρτηση γύρω από το σημείο -0.79.
- Η συνάρτηση *f* παρουσιάζει στο σημείο 2.12 του πεδίου ορισμού της **τοπικό ελάχιστο**, την τιμή *f*(2.12)=-0.41, γιατί η τιμή -0.41 της *f* είναι η **μικρότερη** τιμή που παίρνει η συνάρτηση γύρω από το σημείο 2.12.

Ρυθμός μεταβολής

- Ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** μίας συνάρτησης *f* σε ένα διάστημα [α,β] ποσοτικοποιεί το πόσο γρήγορα αυξάνονται ή μειώνονται οι τιμές της κατά «μέσο όρο» μέσα σε αυτό το διάστημα,

$$\lambda = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

  Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός ή ακόμη και μηδέν:

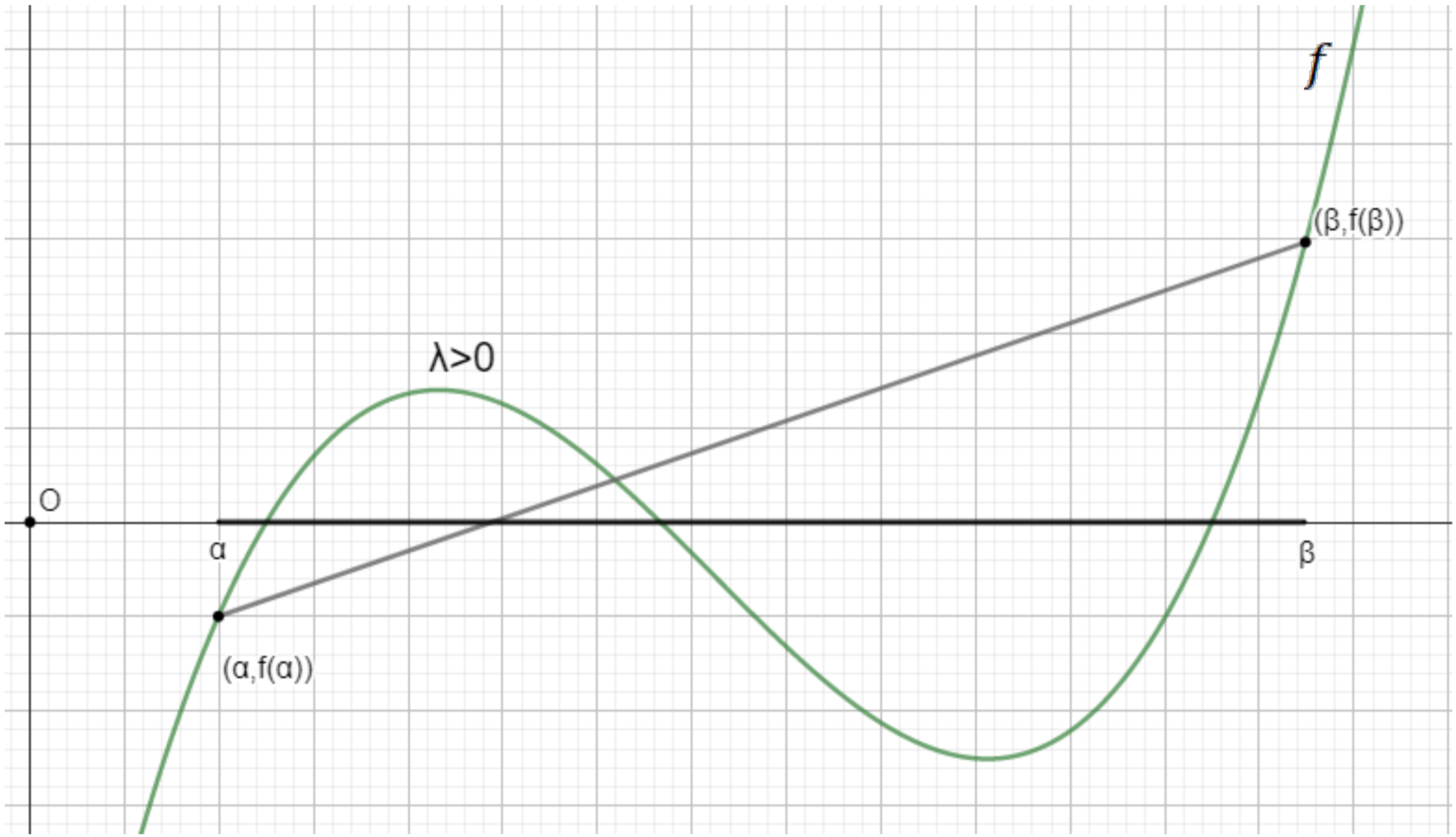
  - $\lambda>0$: Η συνάρτηση κατά μέσο όρο **αυξάνεται** με ρυθμό λ.
  - $\lambda<0$: Η συνάρτηση κατά μέσο όρο **μειώνεται** με ρυθμό $-\lambda$.
  - $\lambda=0$: Η συνάρτηση κατά μέσο όρο παραμένει σταθερή.

- Για όλα τα φυσικά μεγέθη που μεταβάλλονται με τον χρόνο μπορούμε να βρούμε τον μέσο ρυθμό μεταβολής τους μέσα σε ένα χρονικό διάστημα $[t_1,t_2]$

$$\frac{\text{τιμή την χρονική στιγμη } t_2 - \text{τιμή την χρονική στιγμη } t_1}{t_2 - t_1}$$

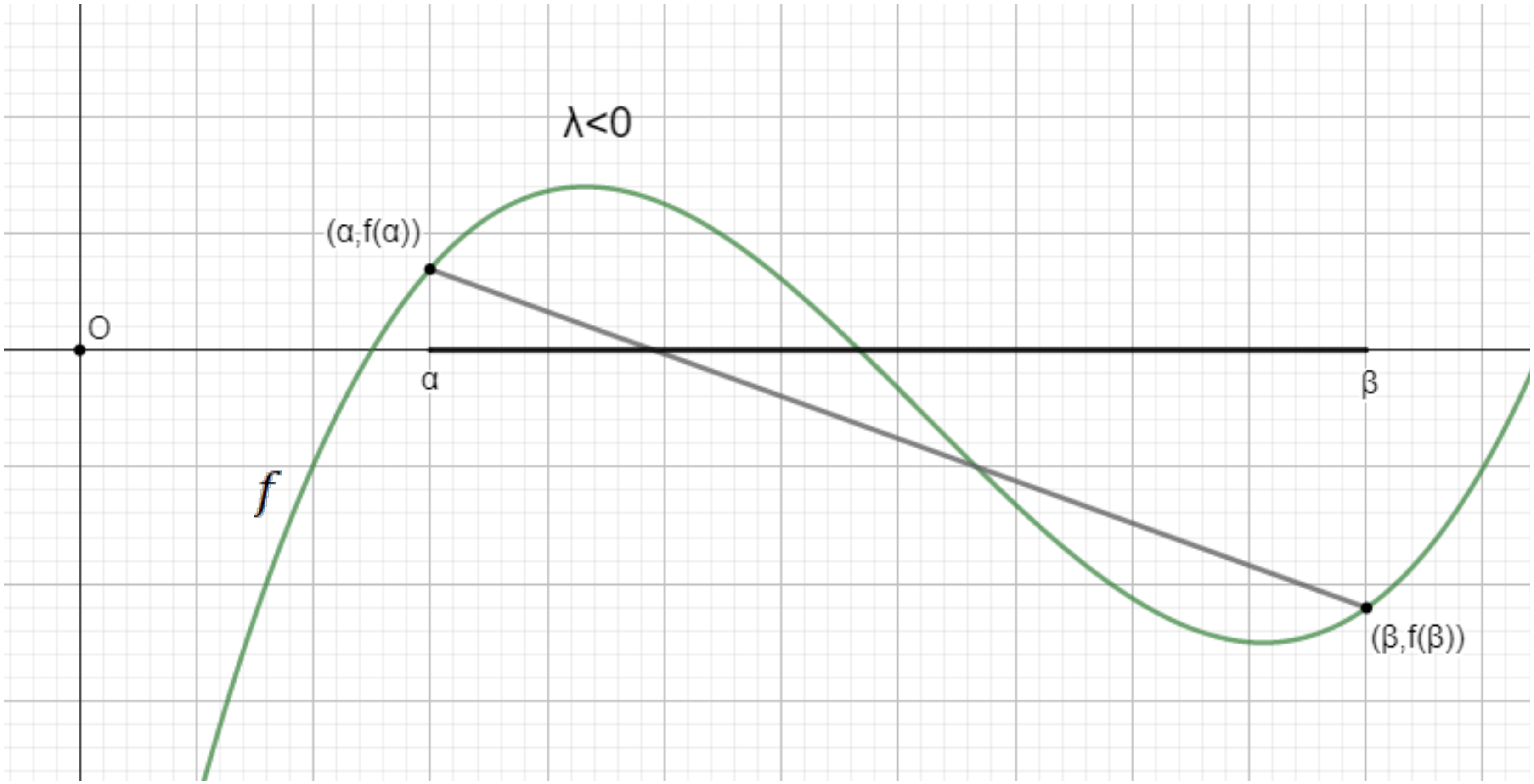
Θετικός μέσος ρυθμός μεταβολής

- Όταν $f(\beta)>f(\alpha)$.
- Παρατηρείστε ότι μπορεί να υπάρχουν μέσα στο $[\alpha,\beta]$ διαστήματα στα οποία η f είναι φθίνουσα. Όμως **«κατά μέσο όρο»** η f αυξάνεται με ρυθμό λ.



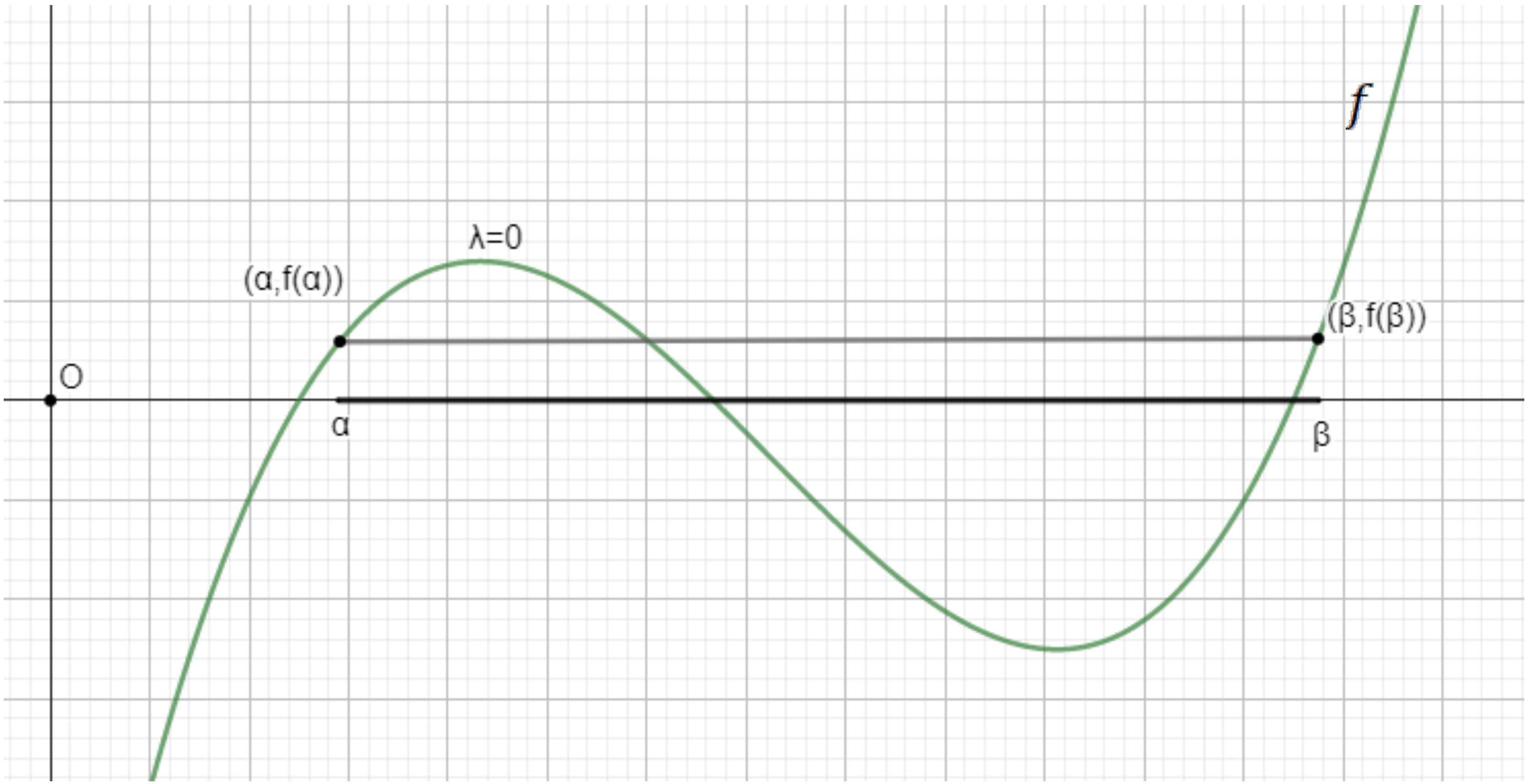
Αρνητικός μέσος ρυθμός μεταβολής

- Όταν $f(\beta)<f(\alpha)$.
- Παρατηρείστε ότι μπορεί να υπάρχουν διαστήματα μέσα στο $[\alpha,\beta]$ στα οποία η f ανεβαίνει. Όμως **«κατά μέσο όρο»** η f μειώνεται με ρυθμό $-\lambda$.



Μηδενικός μέσος ρυθμός μεταβολής

- Όταν $f(\alpha)=f(\beta)$.
- Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση μπορεί να «ανεβοκατεβαίνει» μέσα στο διάστημα [α,β]. Κατά **«μέσο όρο»** όμως θα παραμένει σταθερή.



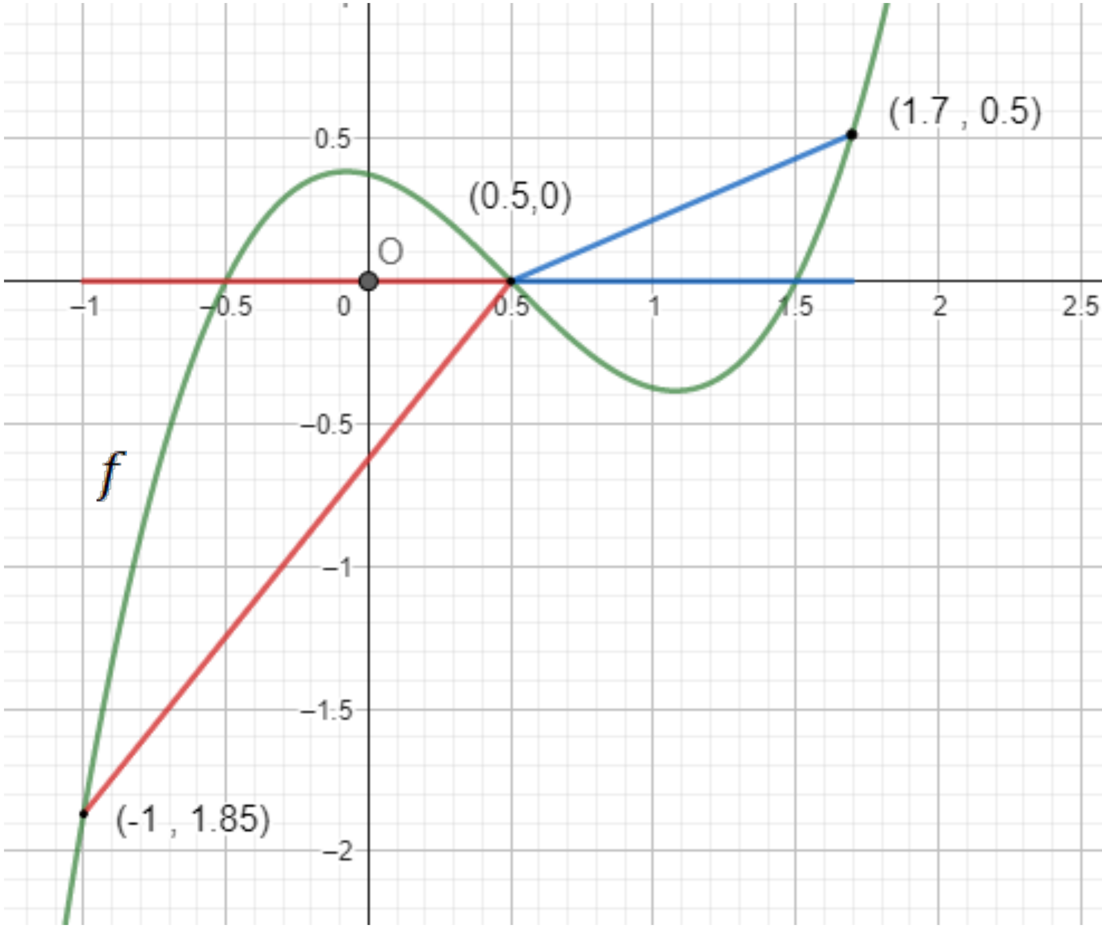
Παράδειγμα. Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στα διαστήματα [-1 , 0,5] και [0,5 , 1,7].

Απάντηση. Στο [-1 , 0,5],

$$\lambda = \frac{f(0{,}5) - f(-1)}{0{,}5 - (-1)} = \frac{0 - (-1{,}85)}{1{,}5} = 1{,}23$$

και στο [0,5 , 1,7],

$$\lambda = \frac{f(1{,}7) - f(0{,}5)}{1{,}7 - 0{,}5} = \frac{0{,}5 - 0}{1{,}2} = 0{,}417$$

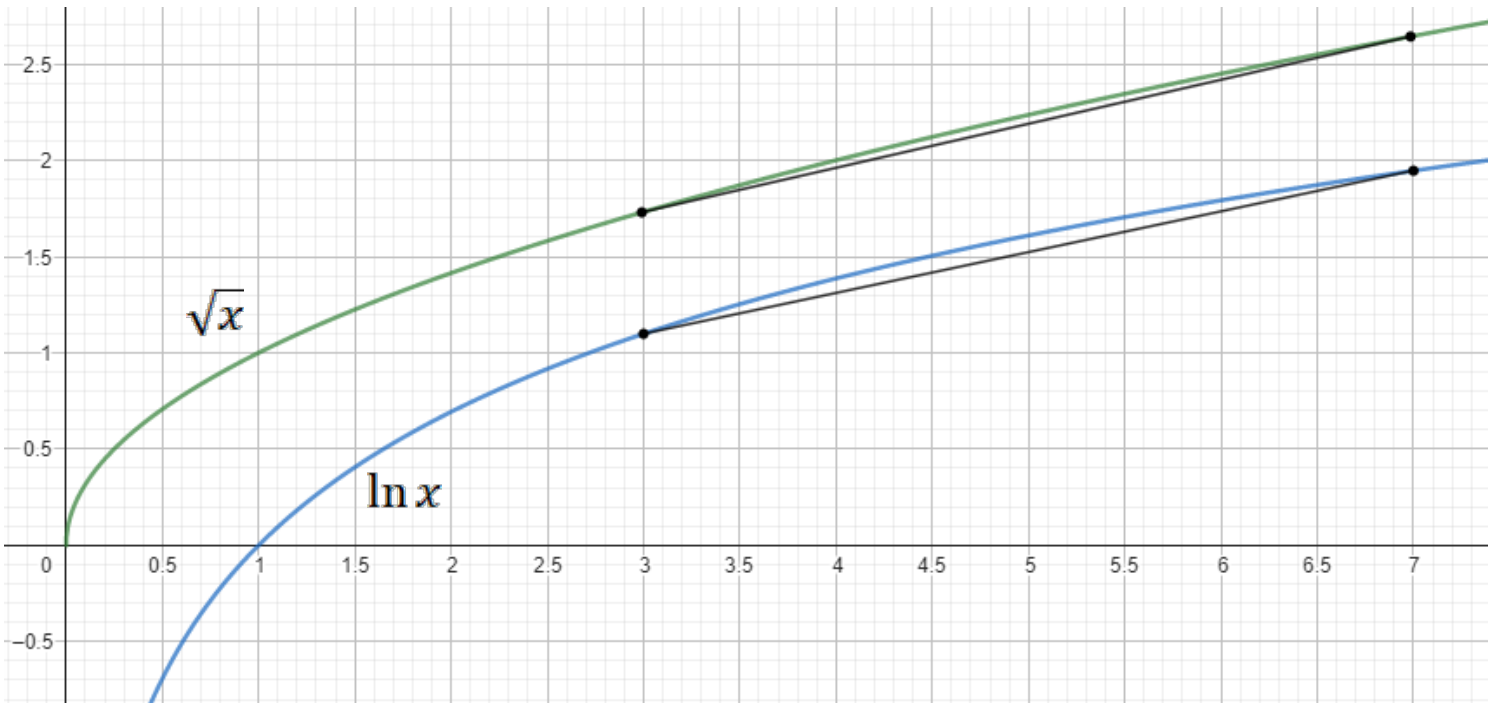


Τι παρατηρείτε σχετικά με την κλίση των δύο ευθειών;

Παράδειγμα. Να συγκρίνετε τον μέσο ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων,

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\ g(x)=\ln x$$

στο διάστημα [3,7].



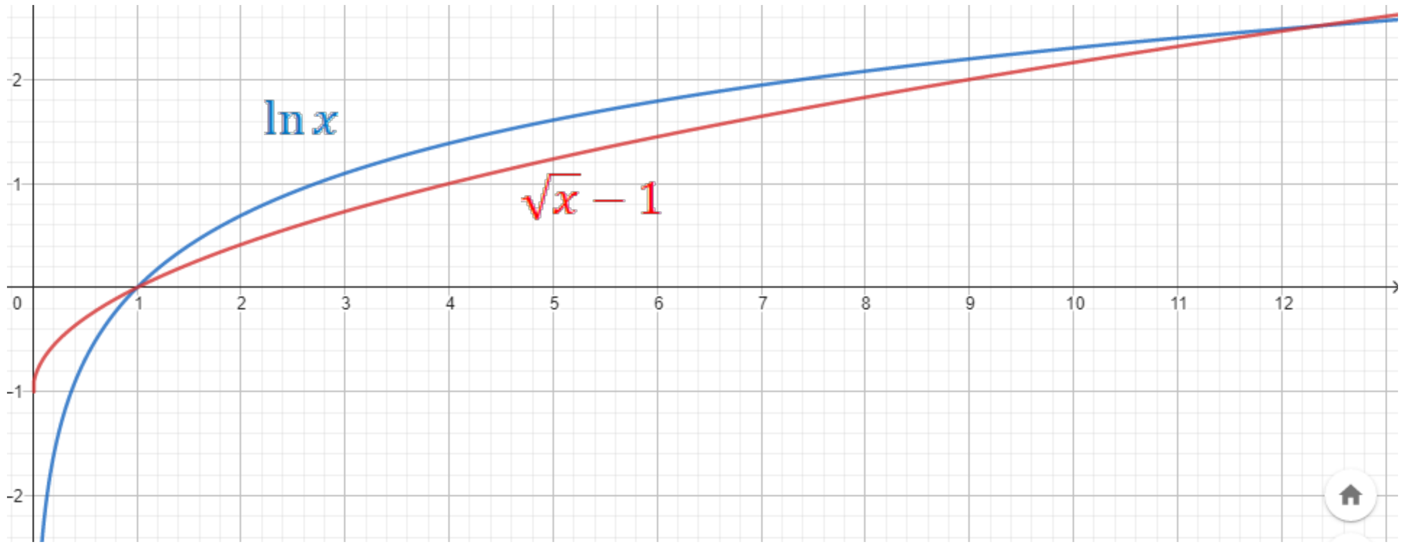
Απάντηση. Κάνουμε πράξεις γιατί από τις γραφικές τους παραστάσεις δεν δεν φαίνεται ποια από τις δύο αυξάνεται γρηγορότερα.(βάλτε τα στοιχ. σας)

Για την *f* θα έχουμε, $$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{7-3}=0{,}228$$

και για την *g*, $$\frac{\ln 7-\ln 3}{7-3}=0{,}212$$

και συνεπώς η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας αυξάνεται ελαφρώς γρηγορότερα από την συνάρτηση του φυσικού λογαρίθμου.

Για να το δούμε αυτό γραφικά «κατεβάζουμε» την συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας μία μονάδα κάτω ώστε να έχουν και οι δύο καμπύλες κοινή αφετηρία. Παρατηρείστε πως αυξάνονται.



Λογαριθμικές κλίμακες

- Η κλίμακα του **pH**,

  $$pH=-\log[H^+]$$

  ή ισοδύναμα

  $$[H^+]=10^{-pH}$$

  Αν το pH μειωθεί κατά μία μονάδα, τότε η συγκέντρωση των κατιόντων H^+ θα αυξηθεί 10 φορές.

- Η κλίμακα **decibel** (dB) είναι μία κλίμακα έντασης του ήχου,

  $$dB=10\cdot\log(I/I_0)$$

  όπου I είναι η ένταση του ήχου (στην γραμμική κλίμακα) και I_0 είναι η ελάχιστη ένταση του ήχου που γίνεται αντιληπτή από τα αυτιά μας.

- Η κλίμακα **Richter** είναι μία λογαριθμική κλίμακα και αυτή με βάση το 10. Κάθε φορά που ανεβαίνουμε μία μονάδα στην κλίμακα Richter το ποσό της ενέργειας που απελευθερώνεται σε έναν σεισμό αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 10.

- Μπορούμε να κατασκευάσουμε λογαριθμική κλίμακα για οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος *x*. Ας πάρουμε για παράδειγμα το μήκος κύματος λ. Θέτουμε

$$\omega = \log\lambda$$

Τότε αν στην νέα κλίμακα έχουμε διαφορά μίας μονάδας μεταξύ δύο τιμών της,

$$\omega_1 - \omega_2 = 1$$

τότε τα μήκη κύματος θα διαφέρουν κατά έναν παράγοντα 10^1,

$$\log\lambda_1 - \log\lambda_2 = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_1 / \lambda_2 = 10.$$

Διαφορά 2 μονάδων αντιστοιχεί σε μήκη κύματος που διαφέρουν κατά έναν παράγοντα 10^2 και ούτω κάθε έξης.

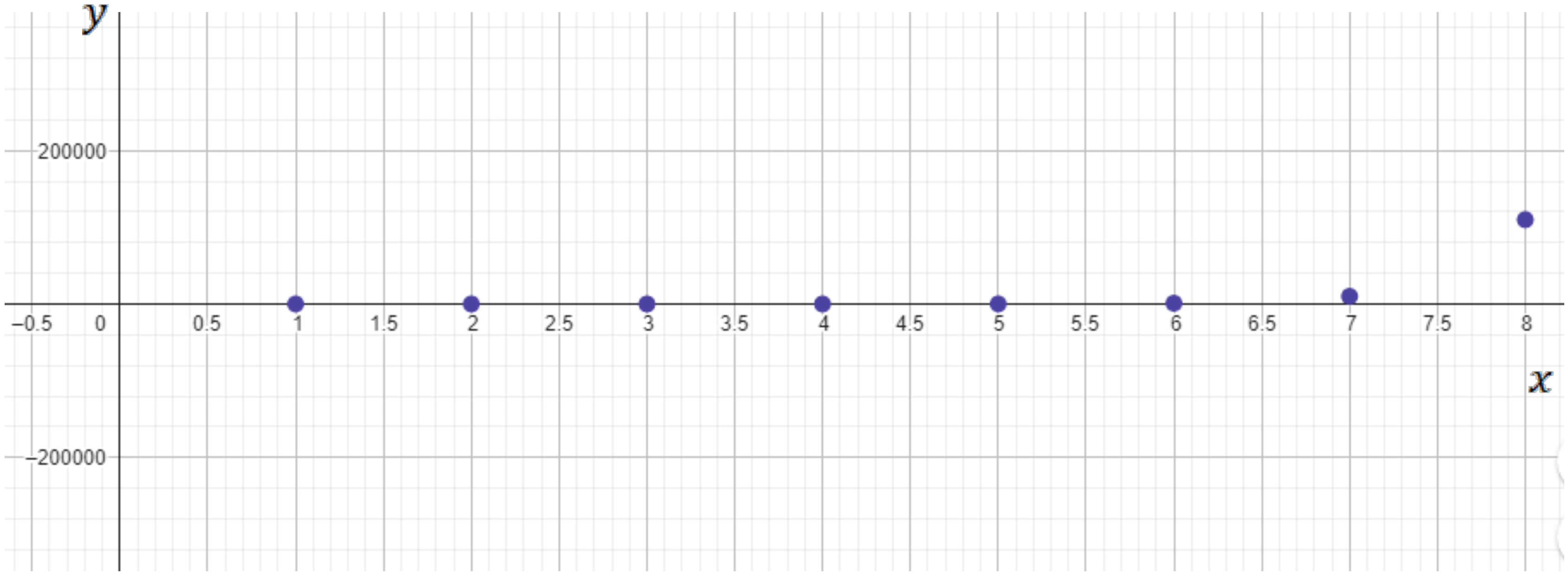
Ημιλογαριθμικά και λογαριθμικά γραφήματα

- Σε μία έρευνα που κάνουμε συλλέγουμε δεδομένα στον ακόλουθο πίνακα παρατηρώντας ότι η μεταβλητή *y* καλύπτει πολλές τάξεις μεγέθους,

x	y
1	0,01
2	0,3
3	1
4	11
5	112
6	1001
7	10004
8	110000
9	1000900

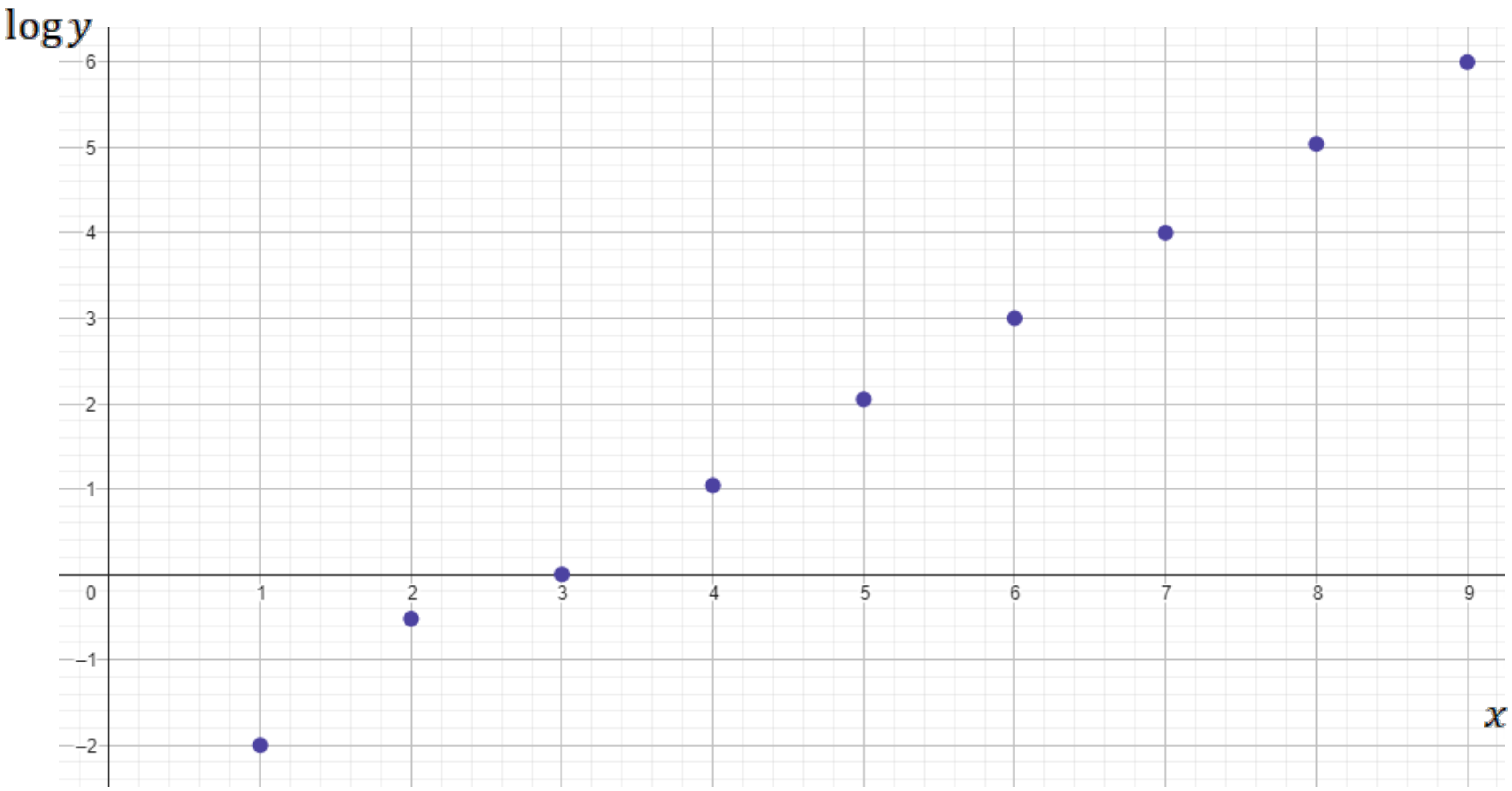
και θέλοντας να οπτικοποιήσουμε τα δεδομένα μας σχεδιάζουμε το διάγραμμα διασποράς των μεταβλητών *x*,*y*.

- Το διάγραμμα διασποράς θα μοιάζει κάπως έτσι, με τα 7 από τα 9 σημεία κολλημένα στον οριζόντιο άξονα.



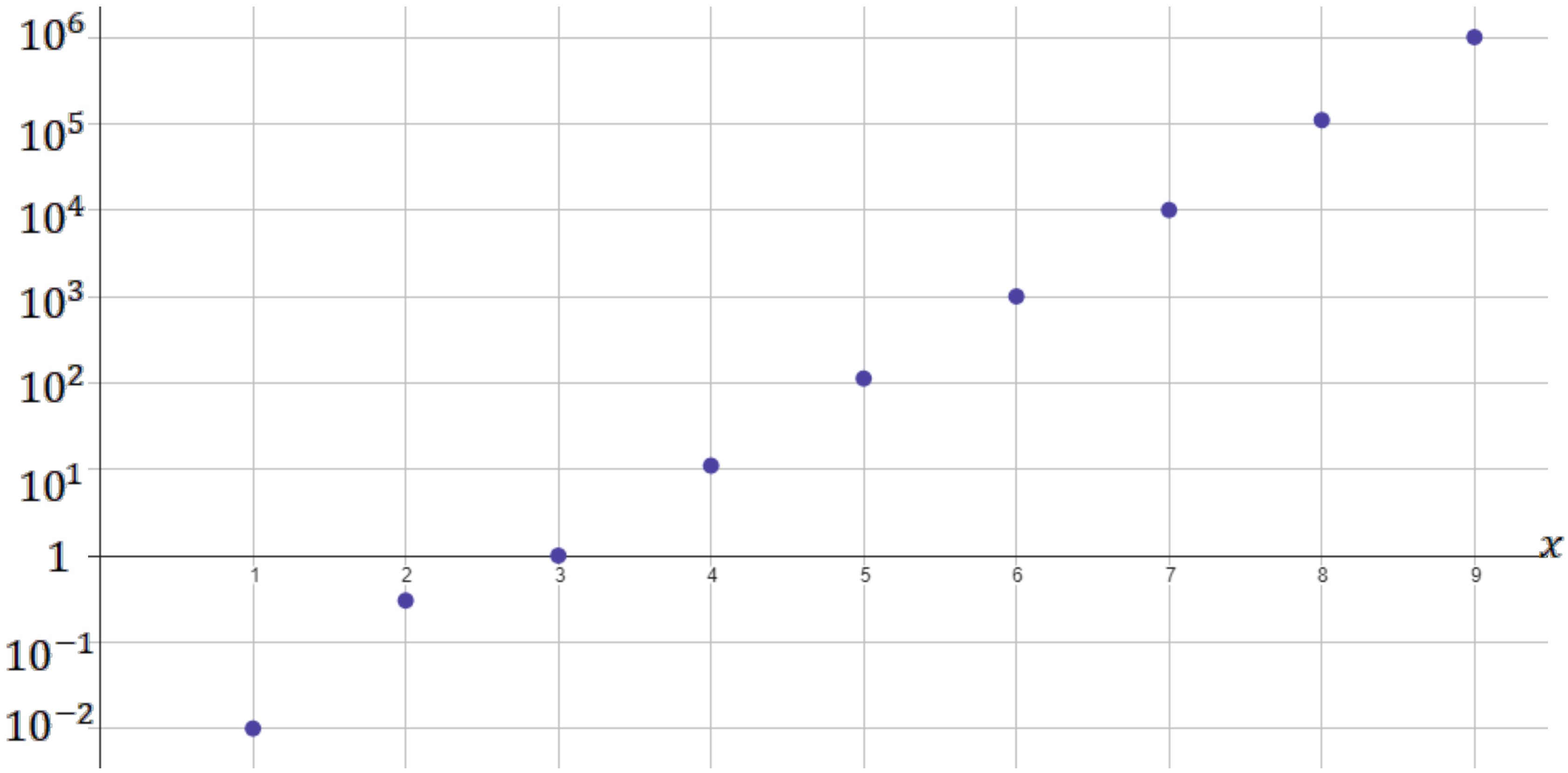
- Αυτό συμβαίνει γιατί η τιμές της μεταβλητής *y* αυξάνονται περίπου εκθετικά ως δυνάμεις του 10. Το αποτέλεσμα είναι να «κρύβονται» πληροφορίες του διαγράμματος.
- Αν όμως λογαριθμίσουμε με βάση το 10 τις τιμές της μεταβλητής *y*, τότε θα πάρουμε ένα διάγραμμα διασποράς που δεν κρύβει τις πληροφορίες του.

- Θα πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα



- Το οποίο μάλιστα μας πληροφορεί ότι η σχέση των μεταβλητών *x*, log *y* μοιάζει γραμμική.

- Αν το δούμε λίγο διαφορετικά έχουμε ορίσει (κατασκευάσει) για το μέγεθος *y* μία λογαριθμική κλίμακα στην οποία όταν ανεβαίνουμε μία μονάδα, το *y* αυξάνεται δέκα φορές.

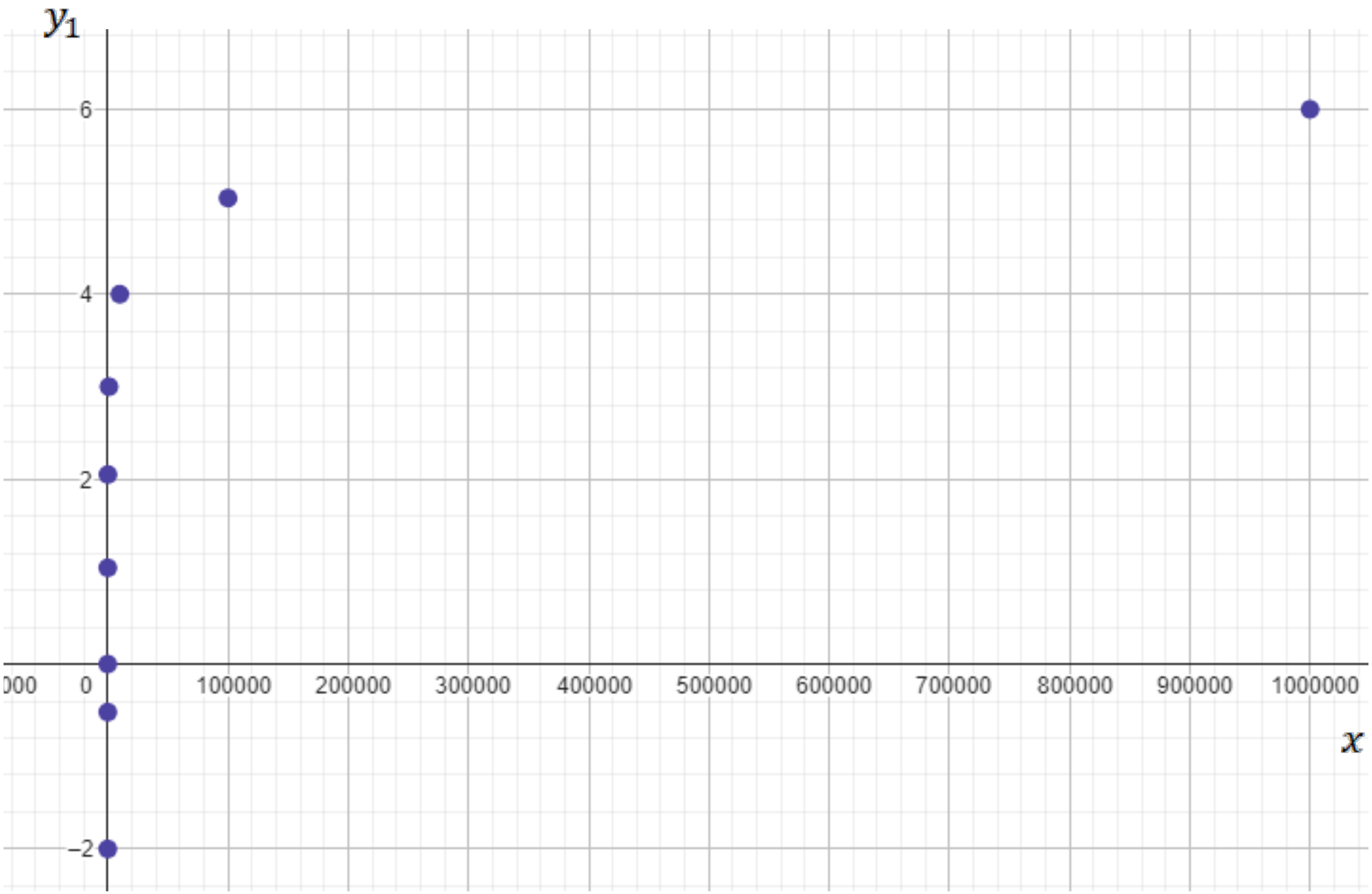


- Σκεφτείτε στην κλίμακα αυτή που θα βρίσκεται το 5, το 50 ή το 500.

- Ομοίως όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή *x* έχει τιμές που αυξάνονται εκθετικά, όπως στον ακόλουθο πίνακα,

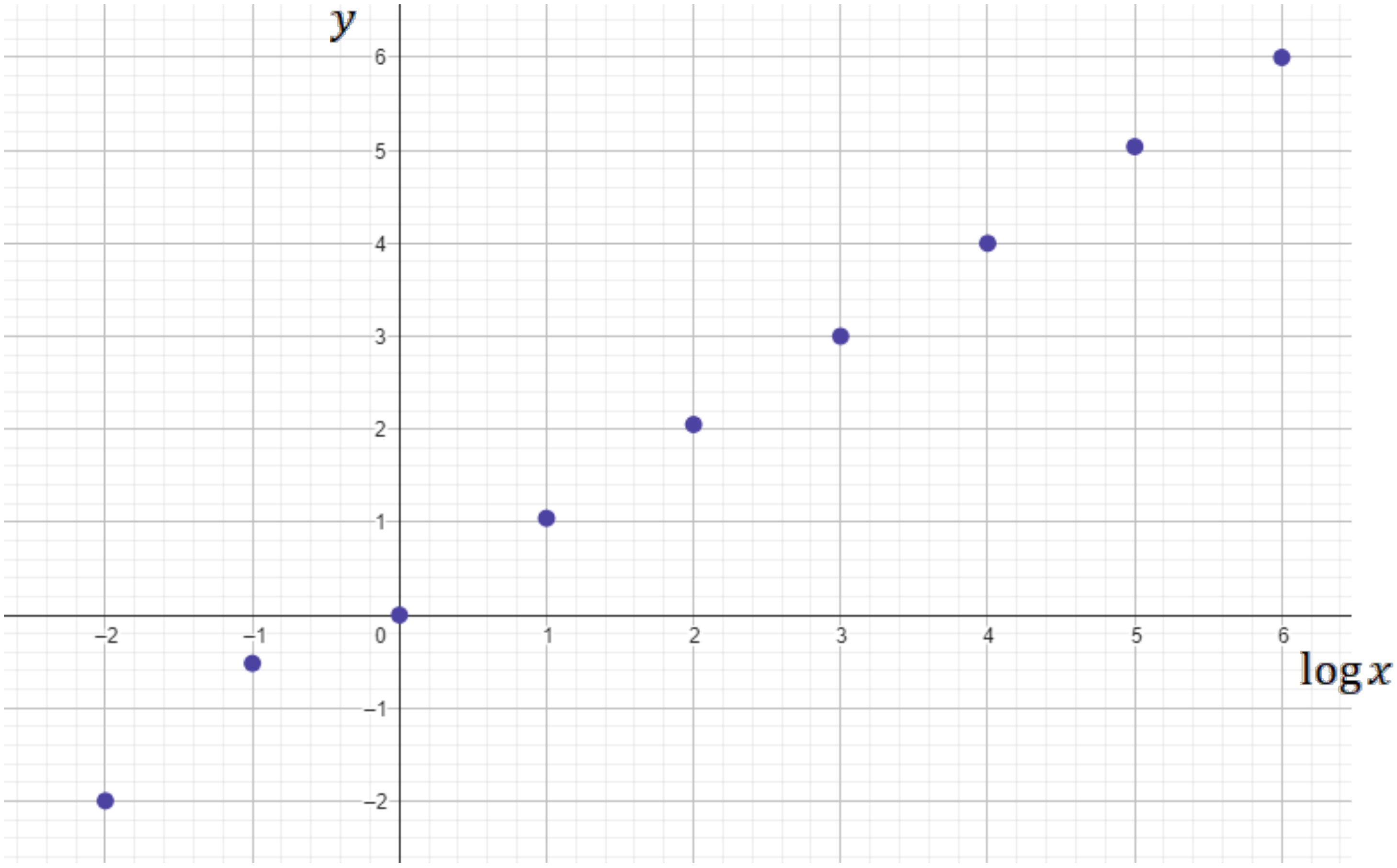
x	y
0,01	1
0,3	2
1	3
11	4
113	5
1003	6
10005	7
109900	8
1000900	9

τότε το διάγραμμα διασποράς θα μοιάζει κάπως έτσι,



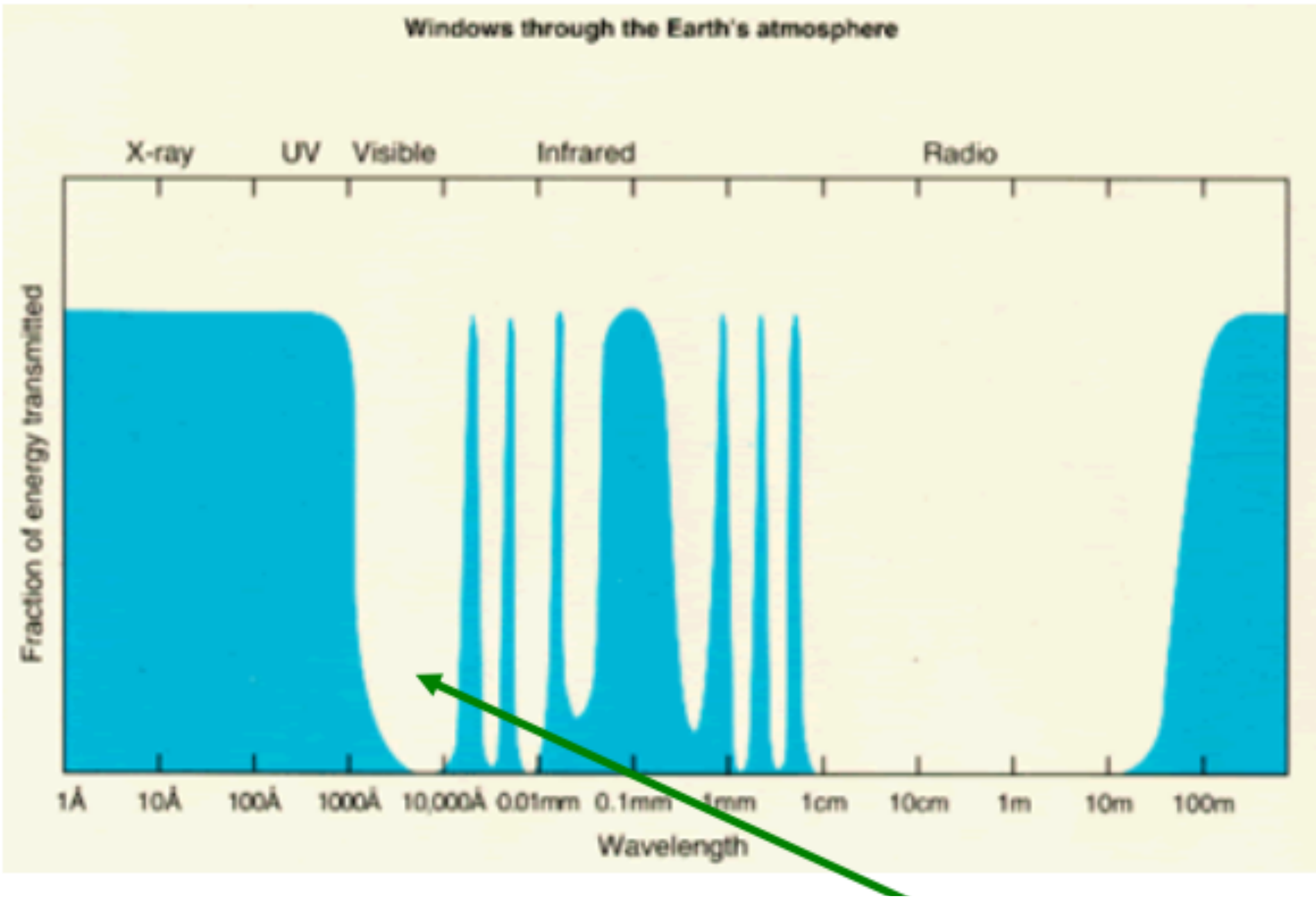
- Τα 6 από τα 9 σημεία φαίνονται κολλημένα στον κατακόρυφο άξονα.

- Για να αναδείξουμε τις πληροφορίες του διαγράμματος λογαριθμίζουμε τις τιμές της μεταβλητής *x* με βάση το 10

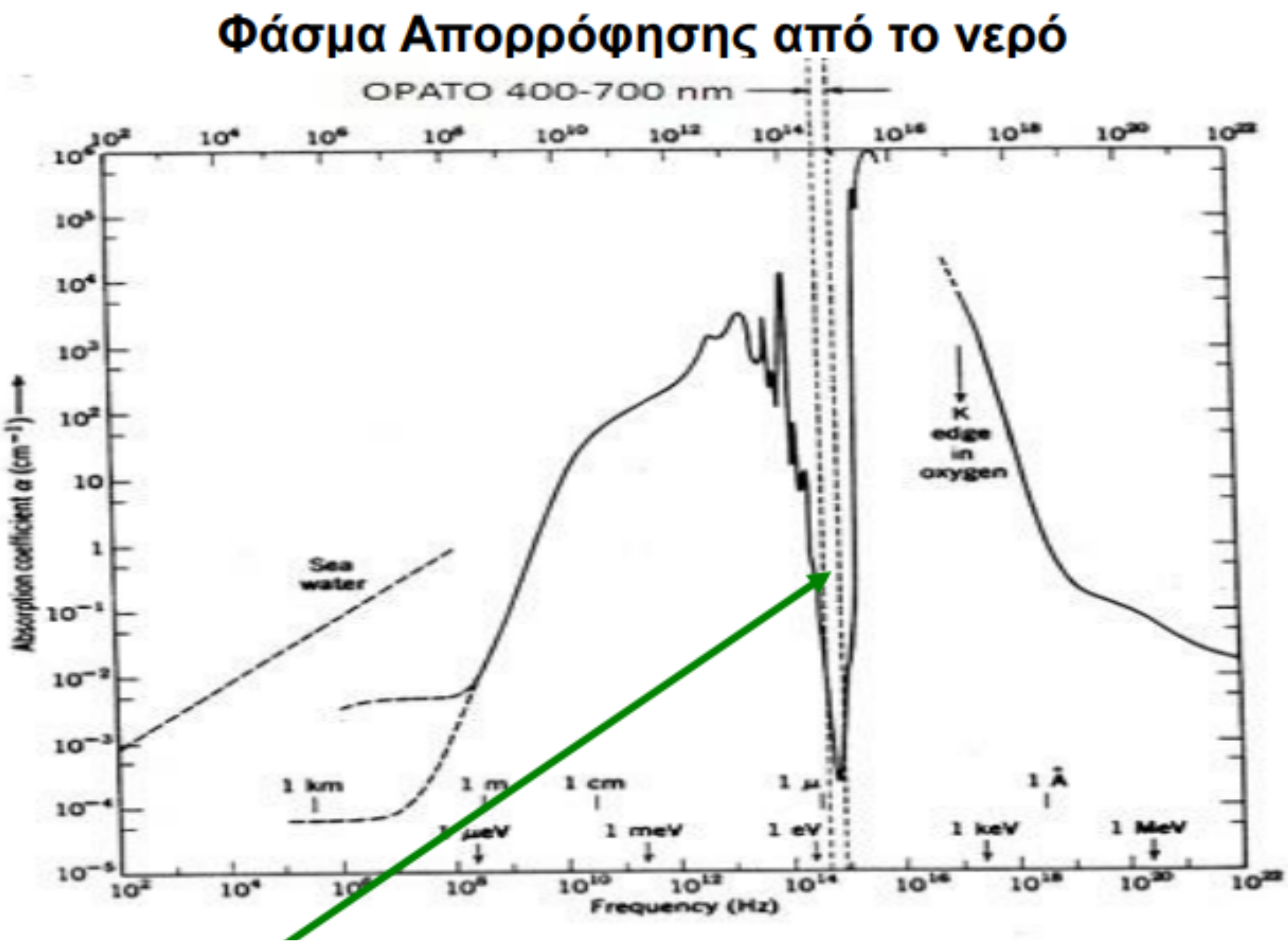


Παράδειγμα

Φάσμα Απορρόφησης από τη γήινη ατμόσφαιρα



- Παρατηρείστε ότι εδώ έχουμε λογαριθμική κλίμακα και στους δύο άξονες,



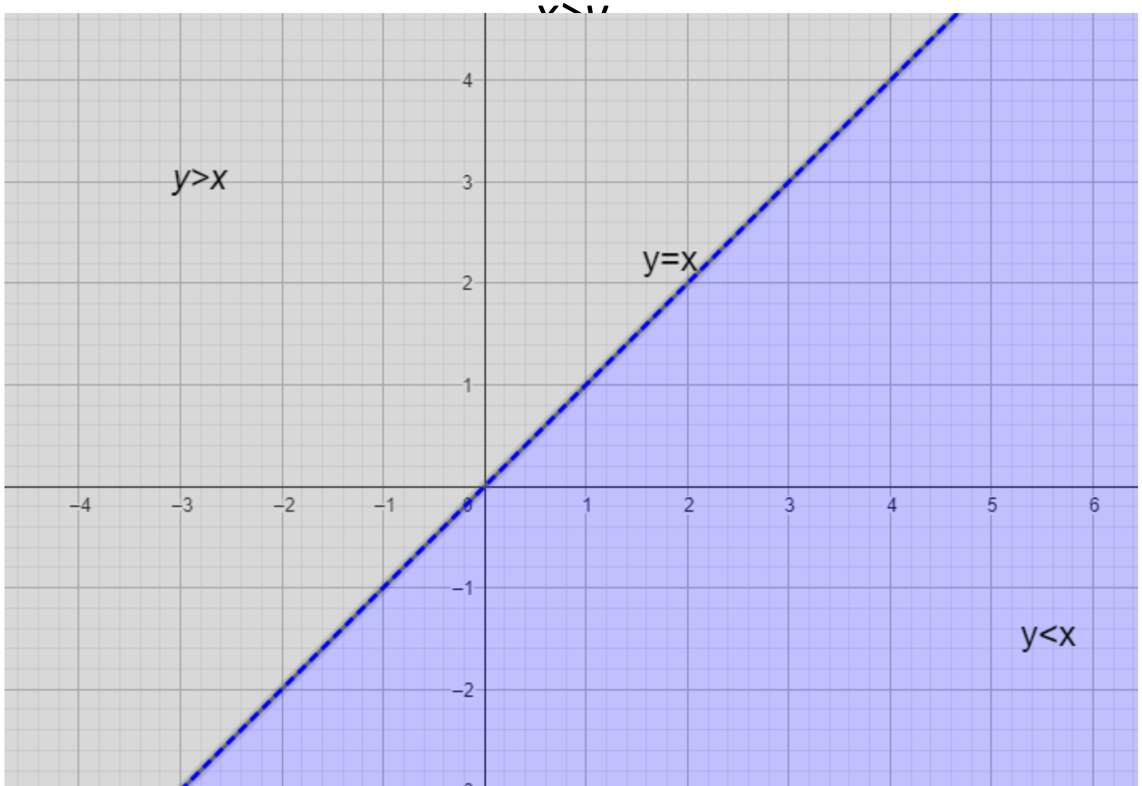
Περιοχές στο επίπεδο

- Η ευθεία $y=x$ χωρίζει το καρτεσιανό επίπεδο σε δύο περιοχές. Στην περιοχή που τα σημεία της (x,y) έχουν τετμημένη μικρότερη από την τεταγμένη,

$$x<y$$

και την περιοχή στην οποία τα σημεία της (x,y) έχουν τετμημένη μεγαλύτερη από την τεταγμένη,

$$x>y$$



- Με βάση αυτό θέλουμε να προχωρήσουμε δύο βήματα παραπέρα. Ο δείκτης μάζας σώματος BMI είναι,

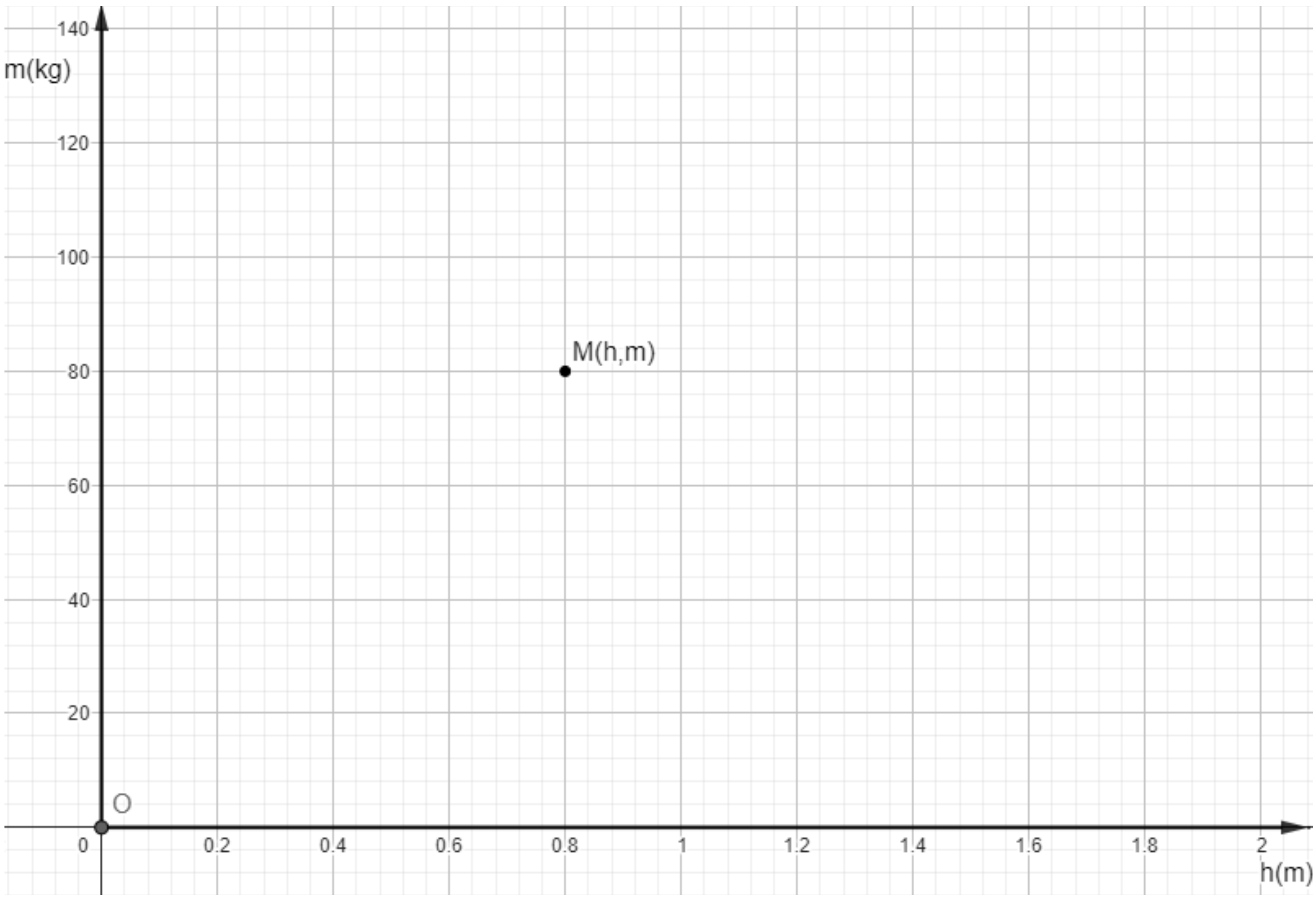
$$\mathrm{BMI} = \frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha(\mathrm{kg})}{[\acute{\upsilon}\psi o\varsigma(m)]^2}$$

και ανάλογα με την τιμή του έχουμε τις ακόλουθες κατηγορίες,

- BMI<22 ελλιποβαρές
- 22<BMI<27 φυσιολογικό βάρος
- 27<BMI<32 υπέρβαρο
- BMI>32 πάσχει από παχυσαρκία

Θέλουμε να εντοπίσουμε και να παρουσιάσουμε στο καρτεσιανό επίπεδο, με οριζόντιο άξονα το ύψος και κατακόρυφο το βάρος, τις περιοχές που αντιστοιχούν στις παραπάνω κατηγορίες.

Δηλαδή πότε ένα σημείο Μ(x,y) αντιστοιχεί σε BMI φυσιολογικό; Πότε σε ελλιποβαρές;

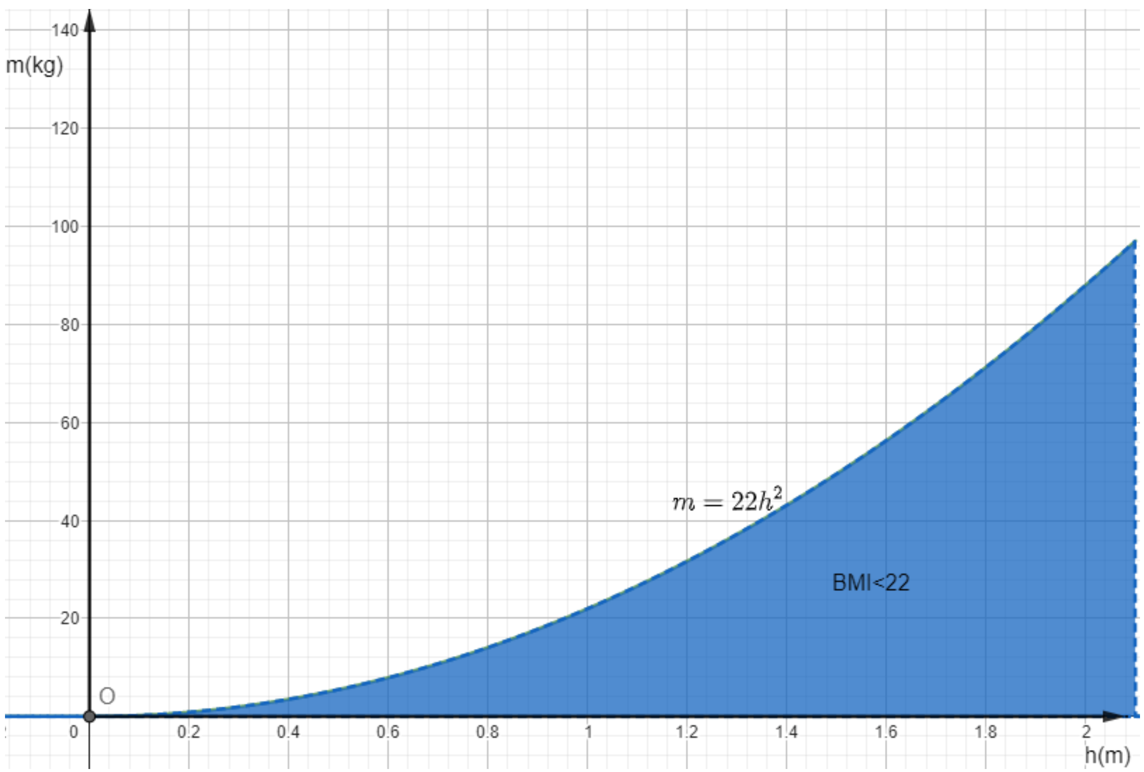


m(kg)
140
120
100
80
60
40
20
0
O
M(h,m)
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
h(m)

- Ένα σημείο (h,m) ανήκει στην περιοχή του ελλιποβαρούς όταν,

$$\mathrm{BMI} < 22 \Leftrightarrow$$
$$\frac{m}{h^2} < 22 \Leftrightarrow$$
$$m < 22 \cdot h^2$$

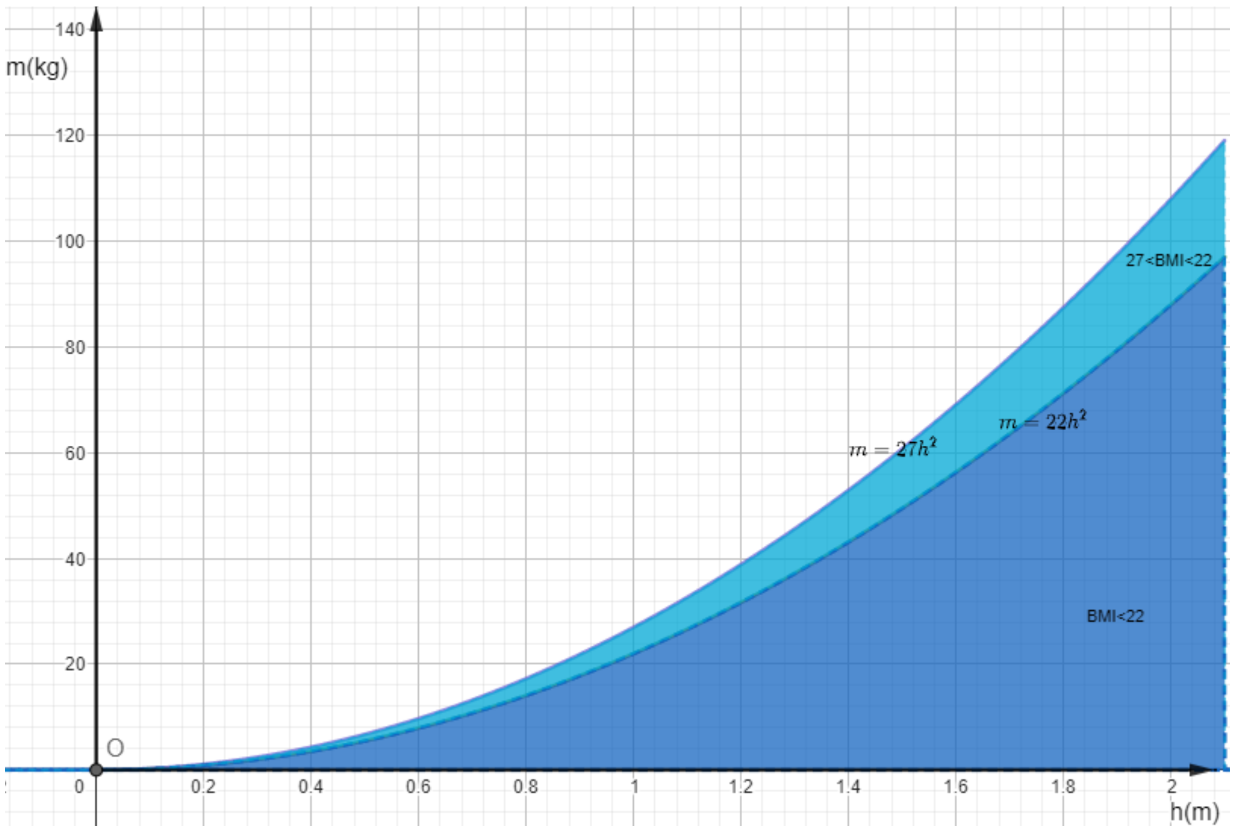
δηλαδή όταν βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(h)=22\cdot h^2$. Άρα έχουμε εντοπίσει την ελλιποβαρή περιοχή,



- Ένα σημείο (h,m) ανήκει στην περιοχή του φυσιολογικού όταν,

$$22<\mathrm{BMI}<27 \Leftrightarrow$$
$$22<\frac{m}{h^2}<27 \Leftrightarrow$$
$$22\cdot h^2<m<27\cdot h^2$$

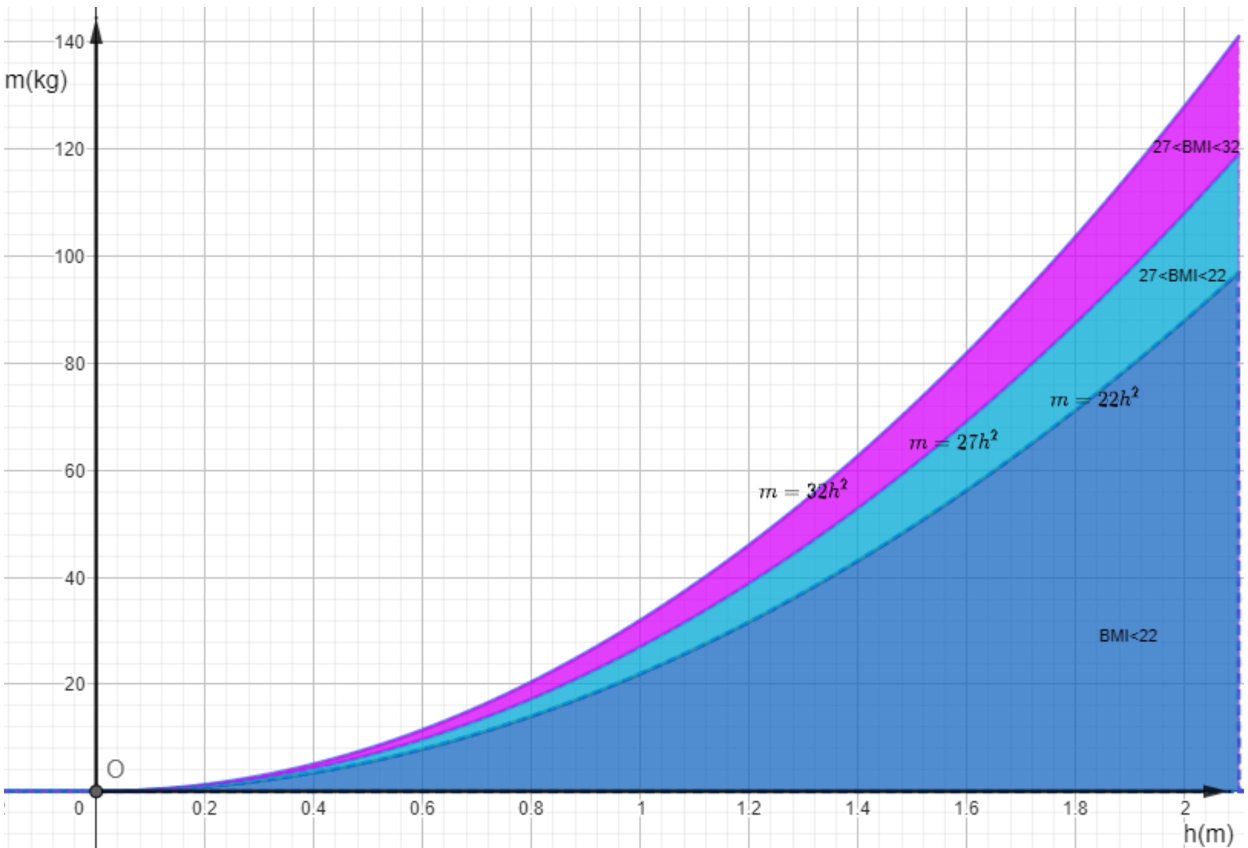
δηλαδή όταν βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(h)=22\cdot h^2$ και κάτω από αυτήν της $g(x)=27\cdot h^2$.



- Ένα σημείο (h,m) ανήκει στην περιοχή του υπέρβαρου όταν,

$$27<\mathrm{BMI}<32 \Leftrightarrow$$
$$27<\frac{m}{h^2}<32 \Leftrightarrow$$
$$27\cdot h^2<m<32\cdot h^2$$

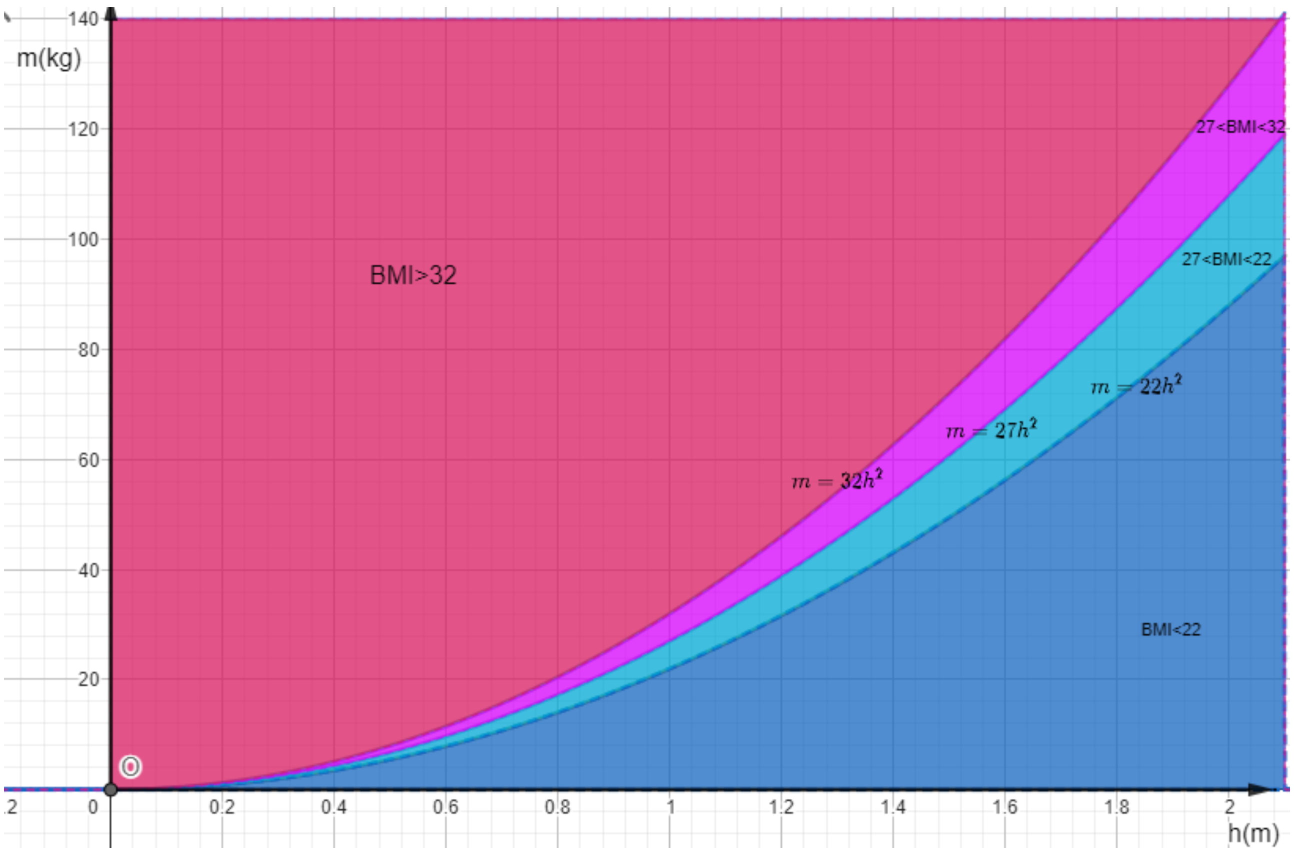
δηλαδή όταν βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(h)=27\cdot h^2$ και κάτω από αυτήν της $h(x)=32\cdot h^2$.



- Τέλος ένα σημείο (h,m) ανήκει στην περιοχή της παχυσαρκίας όταν,

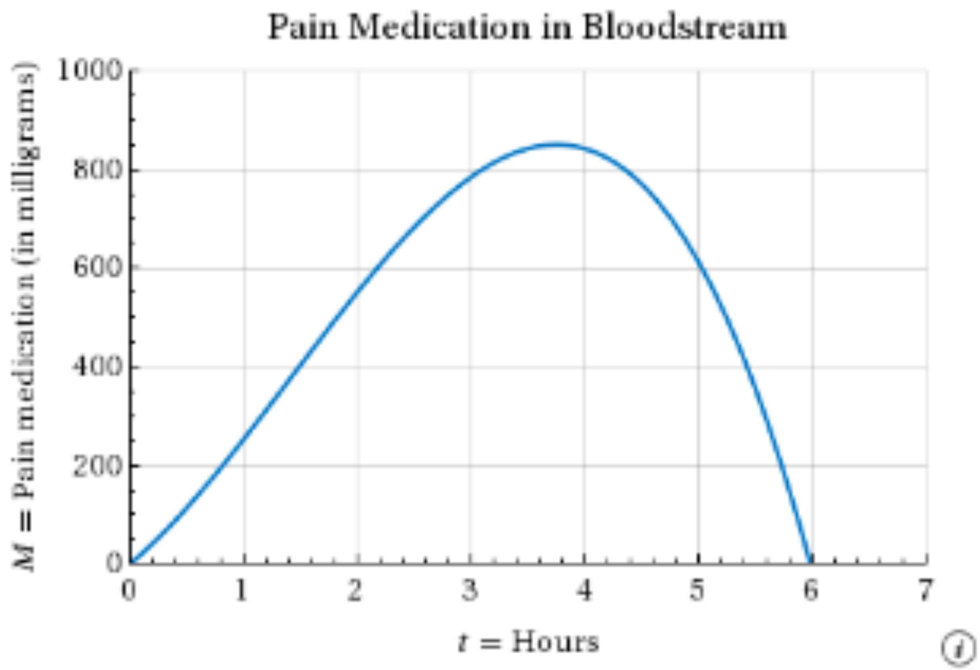
$$32 < \text{BMI} \Leftrightarrow$$
$$32 < \frac{m}{h^2} \Leftrightarrow$$
$$32 \cdot h^2 < m$$

δηλαδή όταν βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(h) = 32 \cdot h^2$.



Ασκήσεις

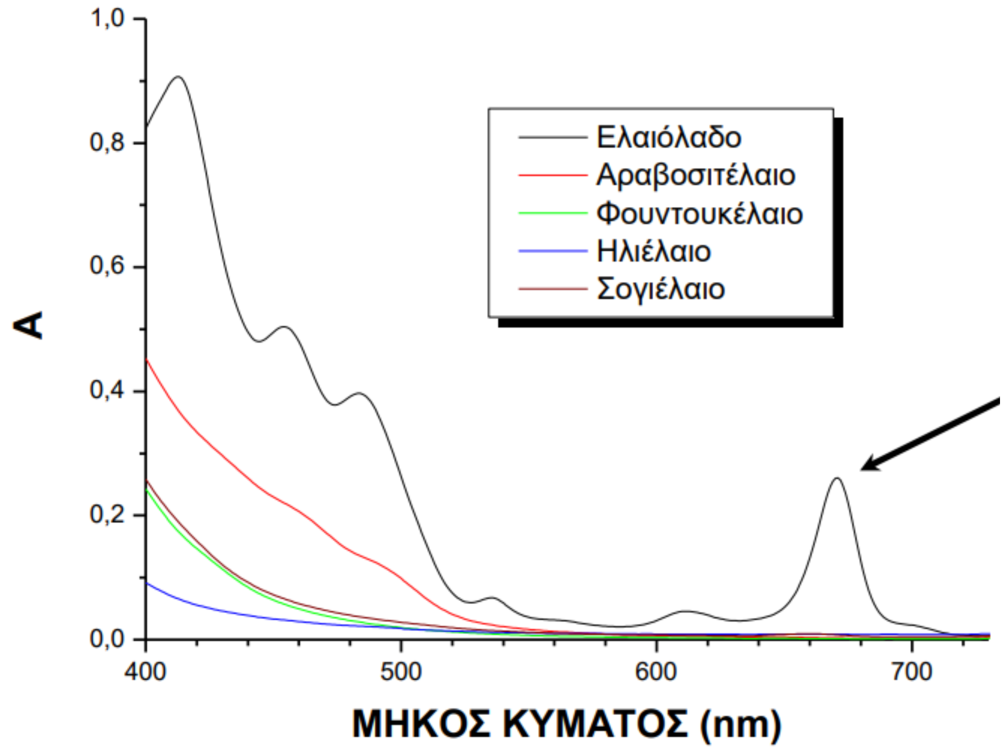
1. Στην παρακάτω γραφική παράσταση βλέπουμε πως μεταβάλλεται με τον χρόνο η ποσότητα παυσίπονου στο αίμα,



- Να υπολογίσετε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της ποσότητας του παυσίπονου στο αίμα κατά τα χρονικά διαστήματα από 0 έως 1 και από 5 έως 6 ώρες.
- Πότε γίνεται μέγιστη η ποσότητα του παυσίπονου στο αίμα; Εντοπίστε τα διαστήματα μονοτονίας.

Ασκήσεις

2. Στην παρακάτω γραφική παράσταση βλέπουμε το φάσμα απορρόφησης στην περιοχή του ορατού κάποιων ελαίων.



- Να εντοπιστούν τα τοπικά ακρότατα στο ελαιόλαδο καθώς και τα διαστήματα μονοτονίας.
- Να υπολογιστεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της απορρόφησης στα διαστήματα [400,440] και [640,670].

Τμήμα Επιστημών
Διατροφής & Διαιτολογίας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο